

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE : COLINÉARITÉ

1 Rappels

Nous avons vu dans le premier chapitre des définitions et propriétés que nous rappelons ici.

1.1 Définition d'un vecteur

Définition 1

Un vecteur non nul est déterminé par :

- sa direction ;
- son sens ;
- sa longueur ou norme.

Remarque. A est appelée l'origine et B est appelée l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Propriété 1

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Remarques.

- Attention à l'ordre des lettres !
- ABCD est un parallélogramme équivaut aussi à $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$;
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

1.3 Relation de CHASLES

Propriété 2

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

1.4 Règle du parallélogramme

Propriété 3

Pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ parallélogramme.

1.5 Vecteur nul

Définition 2

Tout vecteur ayant son extrémité confondue avec son origine est appelé vecteur nul. Il est noté $\vec{0}$.

- La norme du vecteur nul est nulle (égale à 0), sa direction et son sens ne sont pas définis.
- $A\vec{A} = B\vec{B} = M\vec{M} = \vec{0}$.

1.6 Vecteurs opposés

Définition 3

Soit A et B deux points quelconques.

- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Le vecteur $-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

On a donc : deux vecteurs opposés non nuls ont la même direction, la même norme et sont de sens contraire.

1.7 Différence de deux vecteurs

Définition 4

On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.

1.8 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 5

Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur.

Si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Dans les autres cas, le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur tel que :

- $k\vec{u}$ a même direction que $\vec{u}$;
- si $k > 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même sens, si $k < 0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire ;
- $\|k\vec{u}\|$, la norme de $k\vec{u}$, est égale à $|k|\|\vec{u}\|$.

Propriété 4

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

1.9 Repère

Définition 6

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan si les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ ne sont pas alignés.

On emploie les termes suivants :

- O est appelé origine du repère ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé base du repère ;
- Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal ;
- Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$, on dit que le repère est orthonormal (ou orthonormé).

1.10 Repérage d'un point

Propriété 5

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x; y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

x est appelé abscisse de M, y est appelé ordonnée de M et le couple (x; y) est appelé coordonnées de M.

On notera alors M(x; y).

1.11 Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 6

Soit A(x_A; y_A) et B(x_B; y_B) et I(x_I; y_I) milieu de [AB].

Alors

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

1.12 Coordonnées d'un vecteur

Propriété 7

Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple (x; y), appelé coordonnées de $\vec{u}$, tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarque. On notera que

- tout vecteur a des coordonnées ;
- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- L'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur.

Propriété 8

Le plan est muni d'un repère.

- M et $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées.

- Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $x = x'$ et $y = y'$.

Propriété 9

Le plan est muni d'un repère.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel.

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

2 Une nouvelle notion : la colinéarité

Définition 7

Deux vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont même direction.

Remarque. Le vecteur nul n'ayant pas de direction, il n'est colinéaire à aucun autre.

Propriété 10

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Démonstration. Par définition $\vec{v}$ et $k\vec{v}$ ont même direction, donc si il existe un réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction.

On admettra que s'ils ont même direction, alors le réel $k \neq 0$ existe. $\square$

Propriété 11

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

Démonstration.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $kx' = 0$ et donc $x' = 0$ car $k \neq 0$ et donc $xy' - x'y = 0$.

Si $x' = 0$ alors $x = kx' = 0$ et donc $xy' - x'y = 0$.

De même si $y = 0$ ou si $y' = 0$.

Dans les autres cas (x, x', y, y' tous non nuls) :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x}{x'} \\ k = \frac{y}{y'} \end{cases}$$

Donc $\frac{x}{x'} = k = \frac{y}{y'} \Leftrightarrow xy' = x'y \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

On admettra la réciproque. $\square$

3 Applications de la colinéarité

3.1 Droites parallèles

Propriété 12

Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow (AB)$ et (CD) parallèles.

Démonstration. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction $\Leftrightarrow (AB)$ et (CD) ont même direction $\Leftrightarrow (AB)$ et (CD) parallèles. $\square$

3.2 Points alignés

Propriété 13

Soit A, B et C trois points distincts du plan.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow A, B$ et C alignés.

Démonstration. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow (AB)$ et (AC) parallèles $\Leftrightarrow A, B$ et C alignés (car (AB) et (AC) parallèles avec un point en commun : A). $\square$

4 Exercices

Dans tous les exercices, on pourra procéder par calcul vectoriel direct, ou bien choisir un repère et travailler avec les coordonnées.

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M et S tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les droites (MS) et (BC) sont parallèles.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points M et P tels que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA}$.
2. Montrer que les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

EXERCICE 3

Soit ABC un triangle.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}$.
2. Montrer que les points B , C et D sont alignés.

EXERCICE 4

Soit un triangle ABC un triangle rectangle en A .

1. Construire les points I , J , K et L définis par les égalités suivantes :
 - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
 - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
 - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
 - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifier.

EXERCICE 5

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que les points C , E et F sont alignés.

EXERCICE 6

$ABCD$ est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$.

1. Construire le point E défini par $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$.
2. Montrer que les points A , E et C sont alignés.

EXERCICE 7

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2. Montrer que les points A , E et D sont alignés.

EXERCICE 8

Soit ABC un triangle.

1. Construire les points J , D et K tels que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les points J , D et K sont alignés.

EXERCICE 9

ABC est un triangle et D est le milieu du segment $[BC]$.

1. Construire les points E , F et G définis par :
 - $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
 - $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$;
 - $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{11}\overrightarrow{EF}$.
2. Les points A , G et D sont-ils alignés? Justifier.

EXERCICE 10

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points E , F et G définis par :
 - $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$;
 - $\overrightarrow{EF} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$;
 - $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Les points E , F et G sont-ils alignés? Justifier.

EXERCICE 11

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 3$ cm.

Construire les points K , L , M et N tels que :

- $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{0}$;
- $2\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
- $5\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 12

Soit ABC un triangle quelconque.

Construire les points P , Q et R tels que :

- $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC}$;
- $9\overrightarrow{QA} = 4\overrightarrow{QB}$;
- $2\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{CB}$.

EXERCICE 13

Soit ABC un triangle quelconque. A' , B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Construire le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.
2. Montrer que le point G appartient aux trois médianes. Conclure.