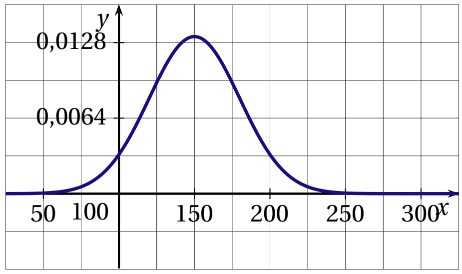
Devoir surveillé n° 9

Loi normale – Graphes probabilistes

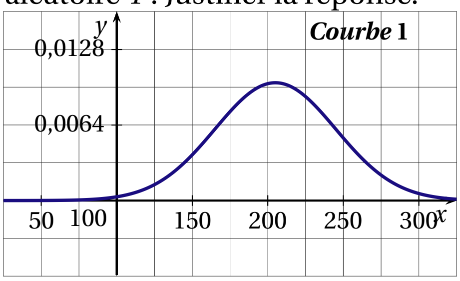
EXERCICE 9.1 (5 points)**.**
On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

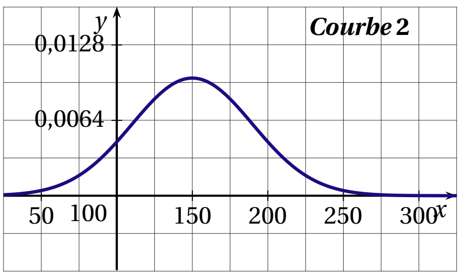
A. Étude de la zone 1
On note X la variable aléatoire qui à chaque poisson observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.

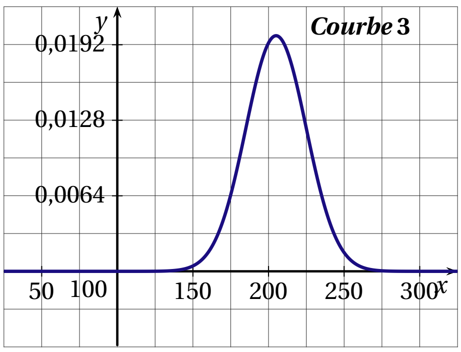


1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm. On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un poisson adulte.
4. (a) On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
   Est-il vrai que $p(X < k) < 0,5$? Justifier.
   (b) Déterminer le nombre k, arrondi à l'unité, tel que $p(X \leqslant k) < 0,3$. Interpréter le résultat.

B. Étude de la zone 2
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.







EXERCICE 9.2 (5 points)**.**
Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître la quantité de lait achetée en 1 mois. Elle montre qu'environ 5 % des familles achètent moins de 10 litres par mois alors que 80 % en achètent plus de 15 litres.
On choisit une famille au hasard.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de litres de lait acheté.
On admet que X suit une loi normale.
On se propose de déterminer l'espérance et la variance de X.

1. Si X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$?
2. Traduire l'énoncé en termes de probabilités sur X, puis en termes de probabilité sur Z.
3. En déduire que μ et σ sont les solutions du système suivant *(les coefficients ont été arrondis au dixième)* :
$$\left\{\begin{array}{l}\mu-1,6\sigma=10\\ \mu-0,8\sigma=15\end{array}\right.$$
4. Déterminer les valeurs de μ et σ.
5. Quelle est la proportion de familles qui achètent entre 7,5 litres de lait et 32,5 litres de lait ?

EXERCICE 9.3 (3,5 points)**.**
Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.
Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.
La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaitre leurs choix de boisson a montré que :
- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.
On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'événement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'événement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix}c_n & t_n\end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste le jour n.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T.
2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.
3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M=\begin{pmatrix}0,97 & 0,03\\ 0,02 & 0,98\end{pmatrix}$.
   Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
   Est-ce que la société CAFTHÉ a raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?

EXERCICE 9.4 (6,5 points).
Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à $0,2$.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à $0,3$.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = (1 \quad 0)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. (a) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.
   (b) Calculer M^2.
   (c) Déterminer l'état probabiliste P_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et préciser la valeur de u_0.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.