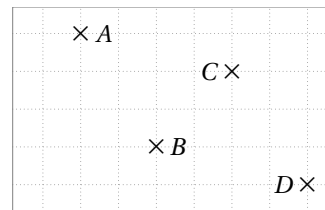
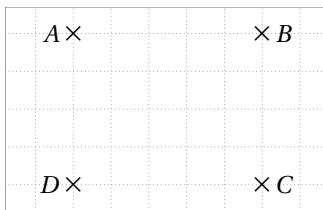
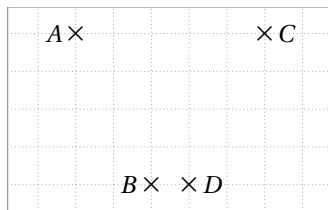


1 Activités

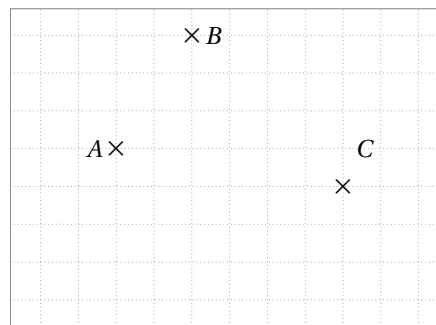
ACTIVITÉ 1

Pour chacune des figures ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?



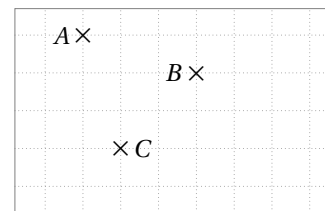
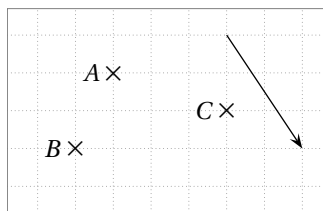
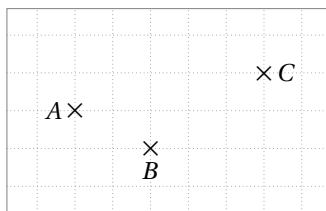
ACTIVITÉ 2

1. Construire, à partir des points A, B et C , les points D, E et F tels que :
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
 $\overrightarrow{BD} = \dots = \dots$ $\overrightarrow{BC} = \dots$ $\overrightarrow{BF} = \dots$



ACTIVITÉ 3

1. Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
2. Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?
3. Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



2 Égalité de vecteurs

2.1 Détermination d'un vecteur

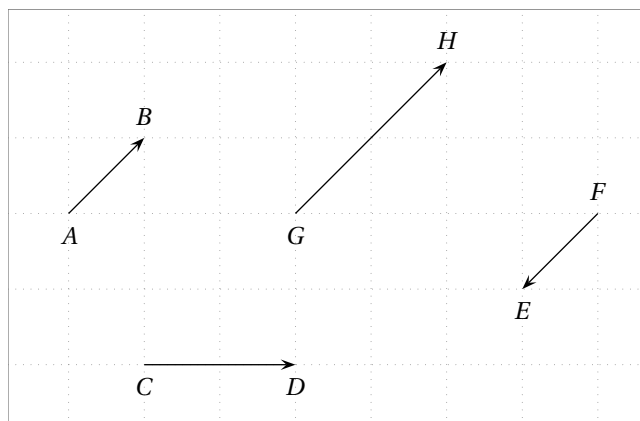
Définition 1

Un vecteur non nul est déterminé par :

- sa direction ;
- son sens ;
- sa longueur ou norme.

Exemple. Sur la figure ci-contre :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'ont pas la même direction : ils ne peuvent donc pas avoir le même sens ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ ont la même direction mais pas le même sens ;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ ont la même direction et le même sens, mais pas la même norme.



Remarque. A est appelée l'origine et B est appelée l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.2 Vecteurs égaux

Propriété 1

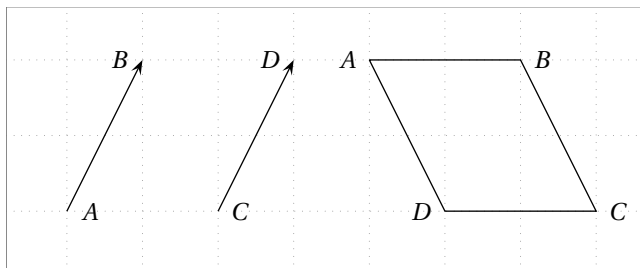
(admise)

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

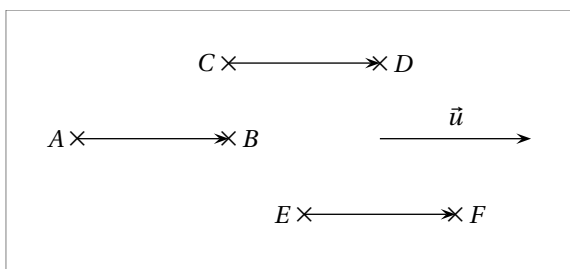
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $ABDC$ est un parallélogramme.
- Si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Remarque. Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors on a aussi $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$



2.3 Notation $\vec{u}$



Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

La *norme* du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

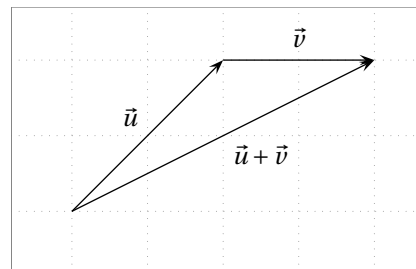
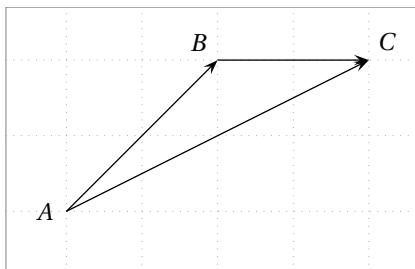
Si $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

3 Sommes de vecteurs

3.1 Relation de CHASLES

Propriété 2

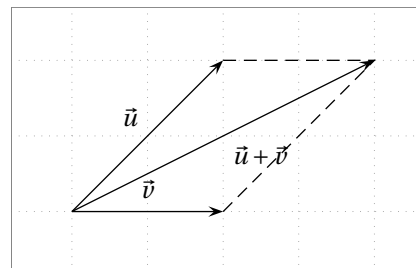
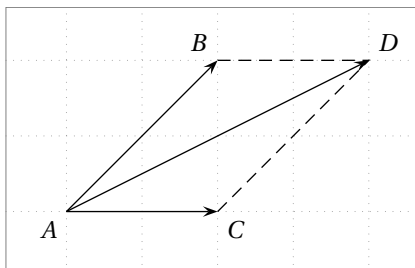
Pour tous points A, B et C , on a :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



3.2 Règle du parallélogramme

Propriété 3

Pour tous points A, B, C et D on a :
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ parallélogramme.



3.3 Somme

Propriété 4

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

3.4 Exercices

Exercices 1, 2 et 3.

4 Vecteur nul – Opposés – Différence

4.1 Vecteur nul

Définition 2

Tout vecteur ayant son extrémité confondue avec son origine est appelé vecteur nul. Il est noté $\vec{0}$.

Propriété 5

(admise)

Soit $\vec{0}$ le vecteur nul, A , B et M des points quelconques.

- La norme du vecteur nul est nulle (égale à 0), sa direction et son sens ne sont pas définis.
- $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{MM} = \vec{0}$.

4.2 Opposé d'un vecteur

D'après la relation de CHASLES, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ pour tout point A . Posons $\vec{u} = \vec{AB}$. On écrit : $\vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{u}$

Définition 3

Soit A et B deux points quelconques.

- Le vecteur $\vec{BA}$ est l'opposé du vecteur $\vec{AB}$.
- Le vecteur $-\vec{u}$ est l'opposé du vecteur $\vec{u}$.

Propriété 6

(admise)

Deux vecteurs opposés non nuls ont la même direction, la même norme et sont de sens contraire.

4.3 Différence de deux vecteurs

Définition 4

On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.

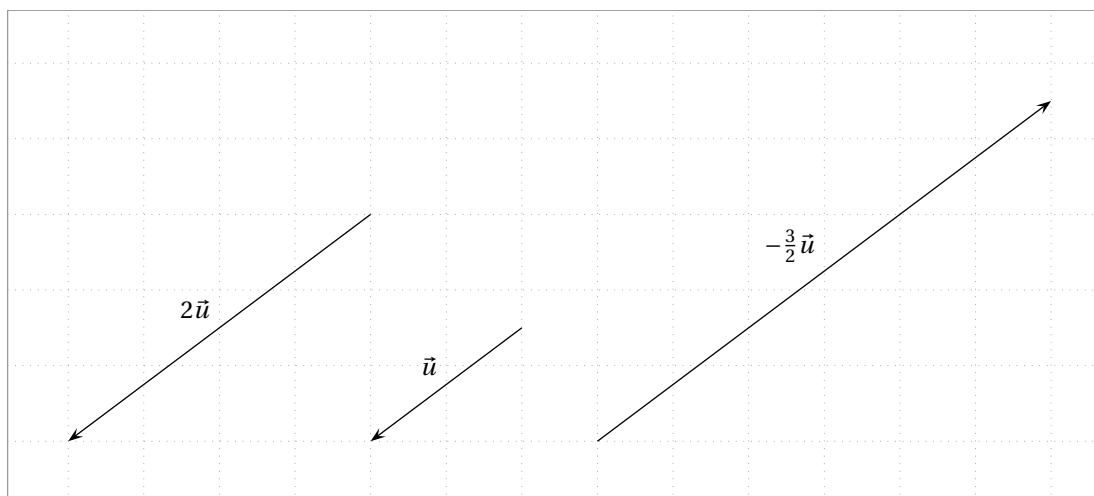
Remarque. Pour construire le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$, il faut donc commencer par représenter le vecteur $-\vec{v}$, opposé de $\vec{v}$, puis construire la somme $\vec{u} + (-\vec{v})$.

4.4 Exercices

Exercices 4 et 5.

5 Produit d'un vecteur par un réel

Exemple. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul.



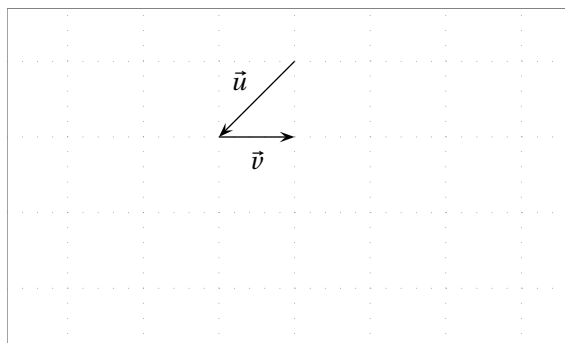
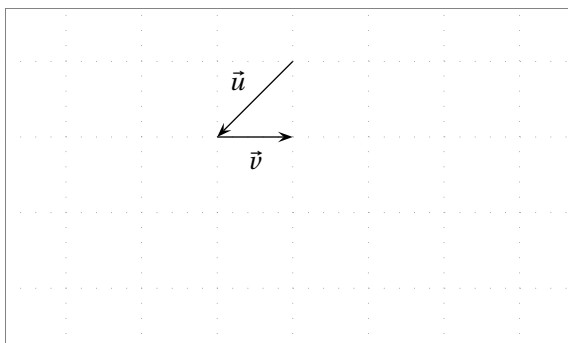
Ainsi :

- Le vecteur $2\vec{u}$ est le vecteur :
 - de même direction que le vecteur $\vec{u}$;
 - de même sens que le vecteur $\vec{u}$;
 - de norme $2\|\vec{u}\|$.
- Le vecteur $-\frac{3}{2}\vec{u}$ est le vecteur :
 - de même direction que le vecteur $\vec{u}$;
 - de sens opposé au vecteur $\vec{u}$, car $-\frac{3}{2}$ est négatif ;
 - de norme $\frac{3}{2}\|\vec{u}\|$.

ACTIVITÉ 4

On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.

Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?



Propriété 7

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' :

- $0\vec{u} = \vec{0}$;
- $k\vec{u} = \vec{0}$;
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$;
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

5.1 Exercices

Exercices 6 et 7.

6 Exercices

EXERCICE 1

Relation de CHASLES

Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{B}\dots$
- $\vec{XK} = \vec{XL} + \dots\vec{K}$
- $\vec{CD} = \dots\vec{A} + \vec{A}\dots$
- $\vec{MN} = \dots\vec{P} + \dots$

- $\dots\vec{E} = \vec{F}\dots + \vec{G}\dots$
- $\vec{H}\dots = \dots + \vec{IJ}$
- $\vec{RS} = \vec{R}\dots + \dots\vec{S}$
- $\dots = \vec{JK} + \dots\vec{M}$

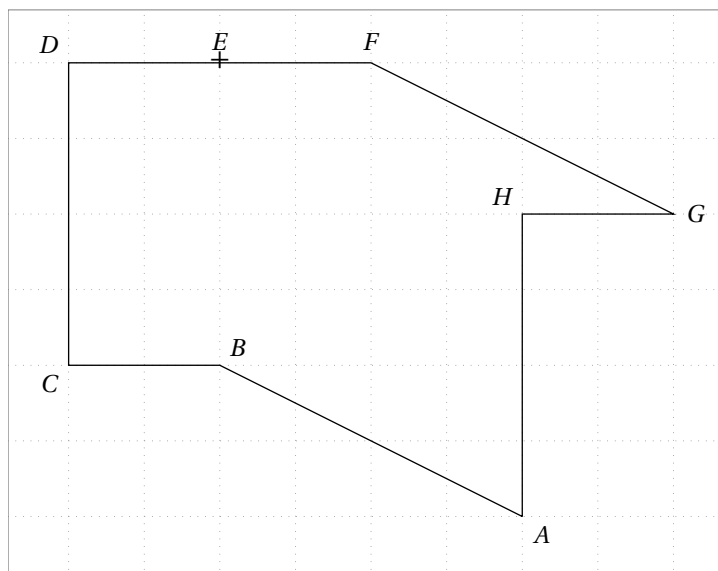
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \dots$
- $\vec{AB} = \dots\vec{C} + \dots\vec{D} + \dots$
- $\dots\vec{Y} = \vec{XJ} + \dots + \vec{R}\dots$

EXERCICE 2

Vecteurs égaux, somme

On considère le motif représenté ci-contre.

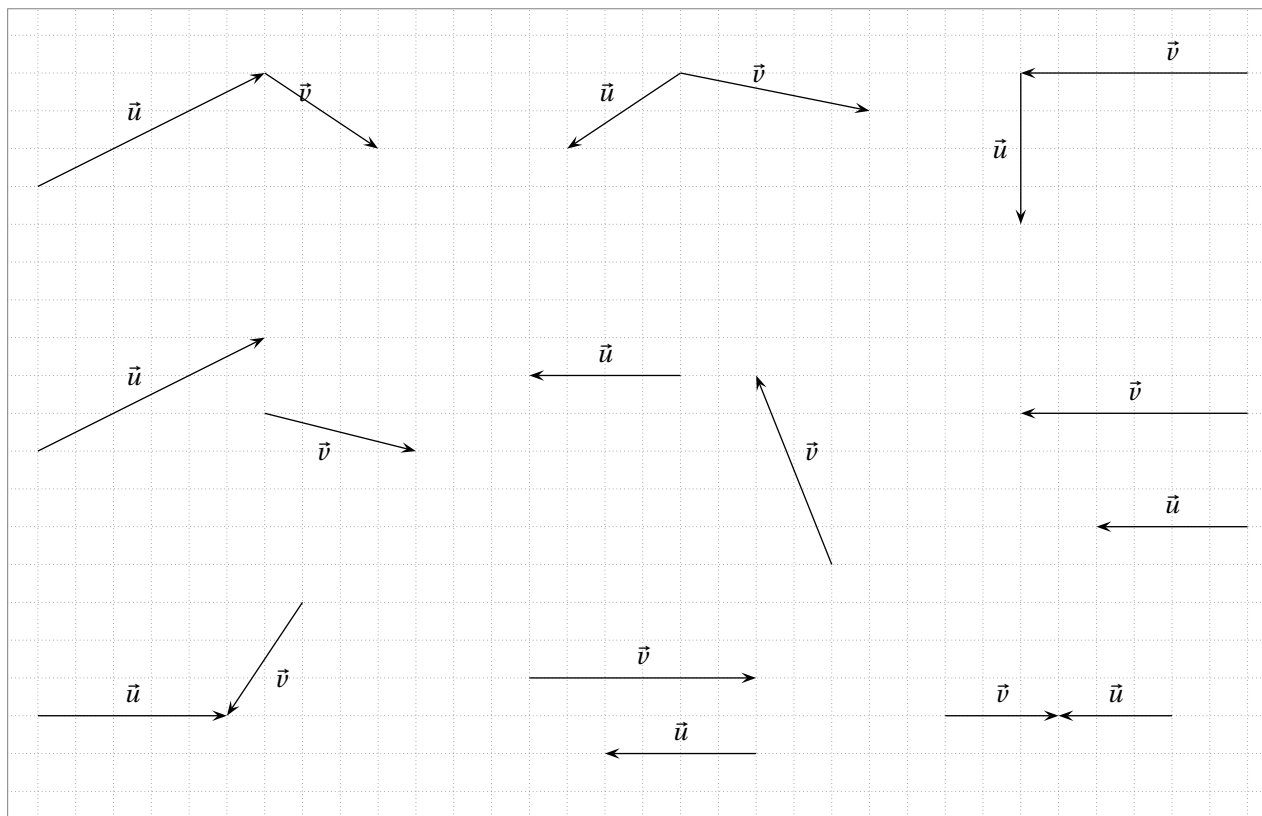
- Citer tous les vecteurs égaux :
 - au vecteur $\vec{AB}$ et représentés sur ce motif ;
 - au vecteur $\vec{FE}$ et représentés sur ce motif.
- En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\vec{AB} + \vec{FE}$.
- En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
 - $\vec{AB} + \vec{AH}$
 - $\vec{BA} + \vec{BC}$
 - $\vec{BC} + \vec{DE}$
 - $\vec{BF} + \vec{GF}$
 - $\vec{AE} + \vec{FB}$



EXERCICE 3

Sommes

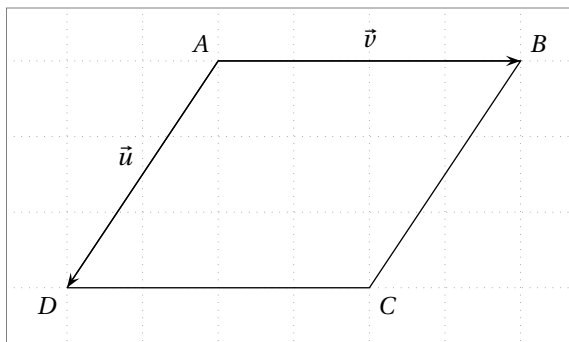
Dans chacun des cas suivants, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



EXERCICE 4

Différence

Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seulement :

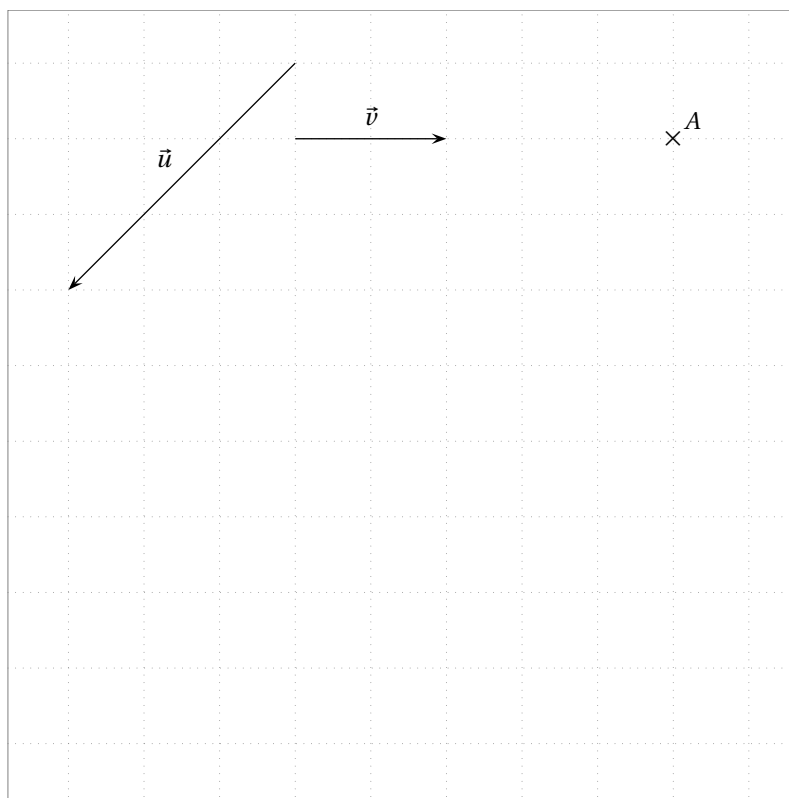
- $\overrightarrow{BA} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{DA} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{CB} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{DC} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{AC} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{CD} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{CA} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{DB} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{BD} = \dots\dots\dots$;
- $\overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$;

EXERCICE 5

Introduction à la multiplication par un réel

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné (voir schéma ci-dessous).

- Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
- Construire les points P , Q et R tels que :
 - $\overrightarrow{BP}$ a même direction et même sens que $\vec{u}$, sa norme est égale aux deux tiers de celle de $\vec{u}$;
 - $\overrightarrow{PQ}$ a même direction que $\vec{v}$, est de sens contraire à $\vec{v}$, sa norme est égale au double de celle de $\vec{v}$;
 - $\overrightarrow{QR}$ a même direction que $\vec{u}$, est de sens contraire à $\vec{u}$, sa norme est égale aux deux tiers de celle de $\vec{u}$.
- Que constate-t-on ? Comment peut-on l'expliquer ?

**EXERCICE 6***Produit par un réel*

Soit un triangle rectangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 4,5$ cm et $BC = 1,5$ cm.

1. Placer les points I , J , K et L définis par les égalités suivantes :

- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{BJ} = 2 \overrightarrow{BA}$;
- $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{CA}$;
- $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} - \frac{13}{6} \overrightarrow{BA}$.

2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que remarque-t-on ?

EXERCICE 7*Introduction au repérage*

Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

7 Repérage d'un point sur une droite

Définition 5

$(O; \vec{i})$ est un repère d'une droite si O appartient à la droite et $\vec{i} \neq \vec{0}$.
 O est appelé origine du repère.

Propriété 8*(admise)*

Soit Δ une droite munie d'un repère $(O; \vec{i})$ et $M \in \Delta$.

- Il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. On appelle abscisse de M ce réel.
- M et M' ont la même abscisse si, et seulement si, $M = M'$.

8 Repérage dans le plan

8.1 Repère

Définition 6

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan si les points I et J tels que

$\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ ne sont pas alignés.

On emploie les termes suivants :

- O est appelé origine du repère ;
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé base du repère ;
- Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal ;
- Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$, on dit que le repère est orthonormal (ou orthonormé).

8.2 Repérage d'un point

Propriété 9 Définition, existence et unicité des coordonnées d'un point (admise)

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple $(x; y)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

x est appelé abscisse de M , y est appelé ordonnée de M et le couple $(x; y)$ est appelé coordonnées de M .

On notera alors $M(x; y)$.

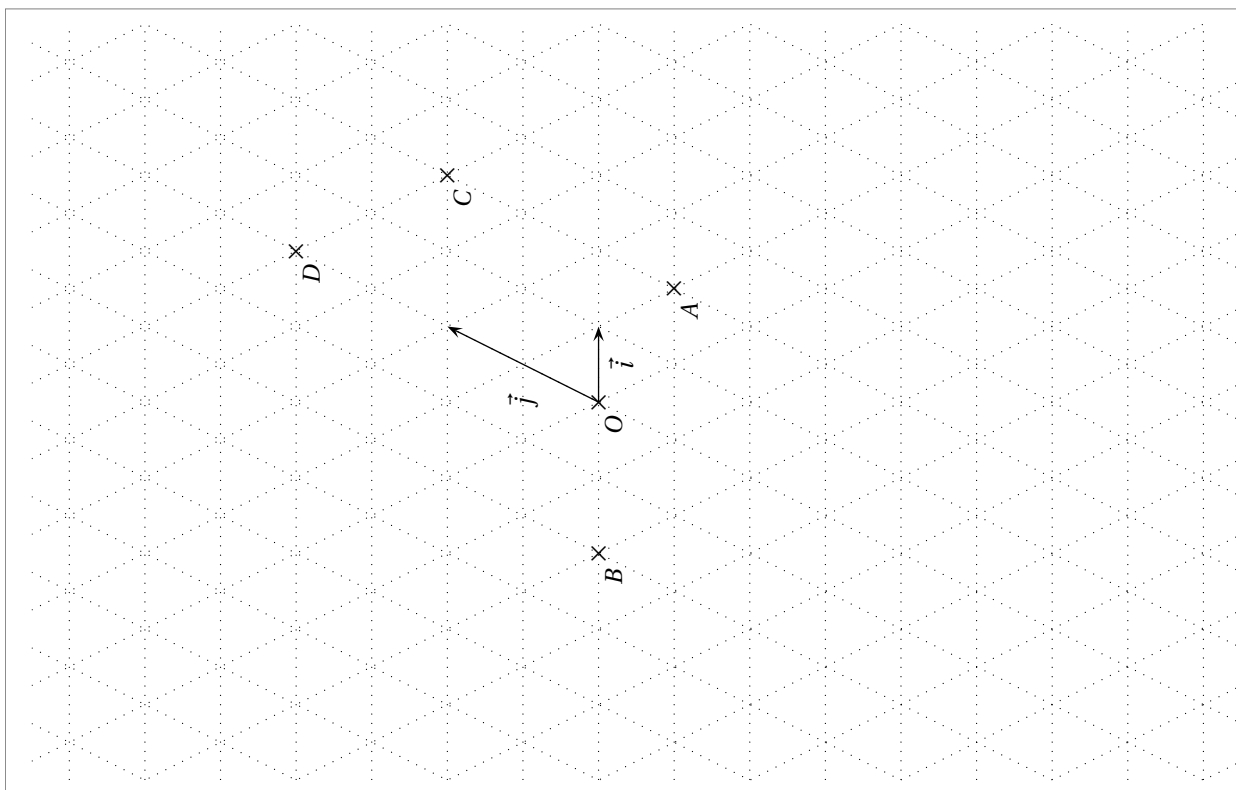
Remarque. On notera que :

- tout point a des coordonnées ;
- M et M' ont les mêmes coordonnées si, et seulement si, $M = M'$.

ACTIVITÉ 5

Sur le schéma ci-dessous :

1. Placer les points $M(3; 1)$, $N(-1; 1,5)$, $P(-2; -1)$ et $Q(3; -1)$;
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A , B , C et D ;
3. En faisant quelques essais, conjecturer le lien existant entre les coordonnées de deux points et les coordonnées du milieu de ces deux points.



Propriété 10

(sera démontrée plus tard)

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors

- $x_I = \dots\dots\dots$
- $y_I = \dots\dots\dots$

8.3 Coordonnées de vecteur dans le plan**Propriété 11** Définition, existence, unicité des coordonnées d'un vecteur (admise)

Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x; y)$, appelé coordonnées de $\vec{u}$, tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

On notera indifféremment $\vec{u}(x; y)$, ou $\vec{u} = (x; y)$, ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,
ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

Remarque. On notera que

- tout vecteur a des coordonnées;
- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- L'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur.

ACTIVITÉ 6

Sur le schéma précédent :

- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\vec{AB}$; $\vec{AC}$; $\vec{BD}$; $\vec{OA}$; $\vec{OB}$; $\vec{OC}$; $\vec{OD}$; $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Quel lien remarque-t-on entre les coordonnées d'un point M quelconque et celles de $\vec{OM}$?
- Soit E tel que $\vec{CE} = \vec{AB}$.
(a) Construire E .
(b) Déterminer les coordonnées de $\vec{CE}$.
- Soit F tel que $\vec{FD} = \vec{OC}$.
(a) Construire F .
(b) Déterminer les coordonnées de $\vec{FD}$.
- Compléter la propriété suivante.

Propriété 12

(admise)

Le plan est muni d'un repère.

- M et $\vec{OM}$ ont $\dots\dots\dots$
- Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
 $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

8.4 Opérations sur les vecteurs et coordonnées**ACTIVITÉ 7**

Sur le schéma ci-dessous :

- Placer $A(2; 0)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 4)$ et $D(-1; -2)$.
- (a) Construire un représentant de $\vec{AB} + \vec{CD}$.
(b) Donner les coordonnées de $\vec{AB}$, de $\vec{CD}$ et de $\vec{AB} + \vec{CD}$.
- (a) Construire un représentant de $\frac{1}{2}\vec{BC}$ et de $-2\vec{AD}$.
(b) Donner les coordonnées de $\vec{BC}$ et de $\frac{1}{2}\vec{BC}$.
(c) Donner les coordonnées de $\vec{AD}$ et de $-2\vec{AD}$.
- Compléter la propriété suivante.

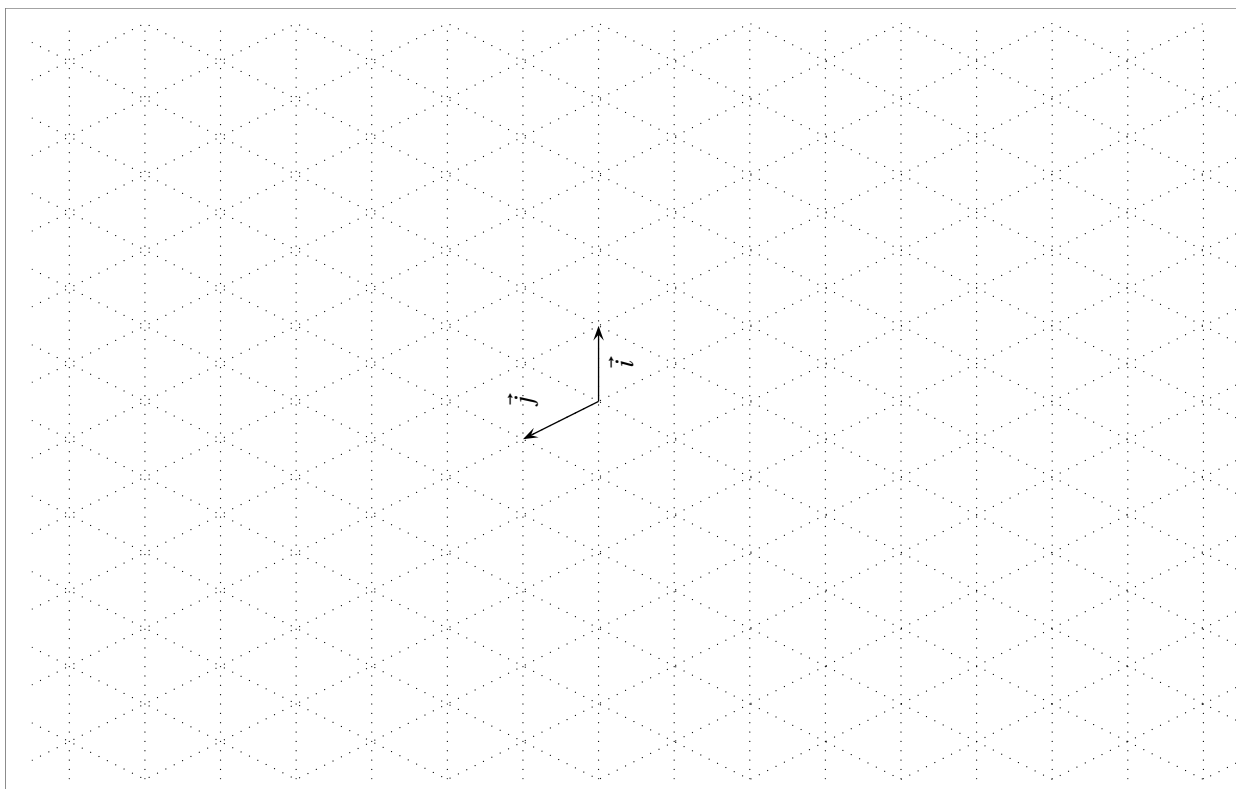
Propriété 13

(admise)

Le plan est muni d'un repère.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un réel.

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$.
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$.



8.5 Points et vecteurs

ACTIVITÉ 8

1. Par lectures graphiques sur le schéma précédent, compléter le tableau suivant :

Point M	Point N	Coordonnées de M	Coordonnées de N	Coordonnées de $\overrightarrow{MN}$
A	B			
B	A			
B	C			
C	B			
B	D			
D	B			

2. Compléter la propriété suivante.

Propriété 14

Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$.

Démonstration. Soit le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

On sait que $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et que $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ d'après la relation de CHASLES.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \square$$

Démonstration de la propriété sur les coordonnées du milieu d'un segment. Soit le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$, milieu de $[AB]$.

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}.$$

Or les coordonnées de I et de $\overrightarrow{OI}$ sont les mêmes. □

9 Exercices

EXERCICE 8

Soit ABC un triangle non aplati (A , B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

1. Faire un dessin.
2. Pourquoi peut-on choisir $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ comme repère du plan ?
3. Déterminer les coordonnées de B , E et D dans ce repère.
4. Déterminer les coordonnées du milieu de $[ED]$. Conclure.

EXERCICE 9

Soit ABC un triangle non aplati et les points D , E , F tels que :

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$$

1. Faire un dessin.
2. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:
 - (a) déterminer les coordonnées de A , B , E et D ;
 - (b) montrer que $ABEF$ est un parallélogramme.

EXERCICE 10

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$$

1. Faire un dessin.
2. Dans le repère de votre choix :
 - (a) déterminer les coordonnées de B , D , E et F ;
 - (b) montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.