Corrigé du devoir maison n°2

Partie A : Courbe de LORENZ

1. Lectures graphiques sur la courbe de LORENZ donnée en exemple.
   (a) Le point M est de coordonnées $(0,80\,;\,0,592)$. Interpréter ce point.

   Cela signifie que les 80 % des ménages les moins riches se partagent 59,2 % du total des revenus des ménages.

   (b) Avec la précision permise par le graphique, indiquer :
   - quel pourcentage du total des revenus revient aux 50 % les moins riches ;

     La courbe de Lorenz passe par le point $(0,5\,;\,0,25)$ donc les 50 % des ménages les moins riches se partagent 25 % du total des revenus des ménages.
   - quel pourcentage du total des revenus revient aux 20 % les plus riches ;

     On sait que la courbe de Lorenz passe par le point $(0,80\,;\,0,592)$ et donc que les 80 % des ménages les moins riches se partagent 59,2 % du total des revenus des ménages. Les 20 % les plus riches se partagent donc $100 - 59,2 = 40,8$ % du total des revenus des ménages.

2. (a) On propose deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de Lorenz associées à deux pays $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Dans lequel de ces deux pays la répartition des revenus est-elle la moins inégale ?

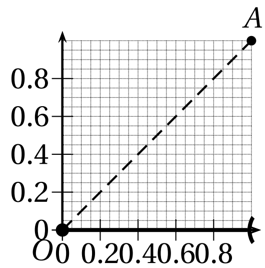
   On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est toujours située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_1$ donc, pour un même pourcentage des moins riches, ils se partagent alors un pourcentage du total des revenus supérieur dans le second pays que dans le premier. La répartition des revenus est donc moins inégale dans le second pays.

   (b) On suppose que tous les ménages d'un pays ont exactement la même part du total des revenus. On parle alors d'égalité parfaite.
   Expliquer pourquoi la courbe de LORENZ est alors confondue avec le segment $[OA]$.

   Si tous les ménages ont le même revenu, si l'on prend les 10 % les moins riches (n'importe quels 10 % de la population puisqu'ils sont tous à égalité), ils se partagent 10 % des revenus, si on prend les 20 % les moins riches de la population, ils se partagent 20 % des revenus, etc. Plus généralement x % de la population se partage x % des revenus et la courbe de Lorenz est donc d'équation $y = x$, où y est le pourcentage de revenu partagé et x les x % les moins riches.

   (c) On suppose qu'une seule personne possède la totalité des revenus. On parle alors d'inégalité totale.
   Que devient dans ce cas la courbe de LORENZ ?

   La courbe est alors constituée d'un segment passant par $(0\,;\,0)$ et $(1\,;\,0)$, ce dernier point étant exclu, et du point $(1\,;\,1)$. En effet, pour $x \in [0\,;\,1[$, les x % les moins riches disposent de 0 % des revenus et pour $x = 1$, soit 100 % de la population, 100 % des revenus sont partagés, d'où le point $(1\,;\,1)$.



   Remarque. Certains ont pensé à tord que la courbe incluait le segment vertical allant du point $(1\,;\,0)$ au point $(1\,;\,1)$.

3. Généralités sur les courbes de LORENZ.
   (a) i. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ passe toujours par les points O et A.

Les 0 % les moins riches se partagent toujours 0 % des revenus, donc la courbe de Lorenz passe forcément par $O(0\,;\,0)$. Les 100 % les moins riches se partagent toujours 100 % des revenus, donc la courbe de Lorenz passe forcément par $A(1\,;\,1)$.

ii. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ ne peut jamais être au-dessus de la première bissectrice (la droite (OA) d'équation $y = x$ tracée en pointillés sur les différentes figures).
On pourra se baser sur un exemple.

Supposons que la courbe passe par $(0,5\,;\,0,6)$ qui est situé au-dessus de la première bissectrice. On aurait alors les 50 % les moins riches qui toucheraient 60 % du revenu disponible, ce qui signifierait qu'il ne resterait alors que 40 % du revenu pour les 50 % les plus riches de la population. Les plus riches seraient moins riches que les moins riches, ce qui est contradictoire.

iii. Expliquer pourquoi une courbe de LORENZ représente toujours une fonction croissante.

Soient x et x' deux pourcentages de la population telles que $x < x'$ et y et y' les pourcentages respectifs du revenu total qu'ils se partagent. D'après la définition de la courbe de Lorenz, étant des fréquences cumulées, les x les moins riches sont contenus dans les x' les moins riches, donc les revenus cumulés correspondant à x' contiennent les revenus cumulés correspondant à x, donc $y < y'$. On a donc : si $x < x'$ alors $y < y'$, ce qui correspond à la définition d'une fonction croissante.

Remarque. Certains ont expliqué la croissance de la fonction par le fait qu'on partait des moins riches vers les plus riches donc que le revenu des derniers était supérieur au revenu des premiers. Ce n'est pas le bon argument. En effet, si on décidait de classer des plus riches au moins riches et qu'on faisait le cumul des revenus, on obtiendrait aussi une fonction croissante (mais située au-dessus de la première bissectrice). Bref l'argument est que l'on cumule les revenus, et pas que les revenus sont classés du plus petit au plus grand.

(b) Justifier que pour qu'une fonction f convienne, il faut qu'elle vérifie les points suivants :

- f doit être définie sur $[0\,;\,1]$;
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$;
- f croissante sur $[0\,;\,1]$.

x variant de 0 à 1, la fonction f doit être définie sur $[0\,;\,1]$.
On a vu qu'une courbe de Lorenz passe forcément par O et A, donc $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On a vu qu'une courbe de Lorenz $y = f(x)$ est forcément au-dessous de la première bissectrice $y = x$, donc $f(x) \leqslant x$.
On a vu qu'une courbe de Lorenz est la représentation graphique d'une fonction croissante.

(c) Montrer que les fonctions suivantes conviennent :

- $f_1(x) = x^2$;

f_1 est définie sur $[0\,;\,1]$.

$f_1(0) = 0$ et $f_1(1) = 1$.

$f_1(x) = x^2 \leqslant x$ sur $[0\,;\,1]$. En effet $x^2 - x = x(x-1)$ est négatif entre ses racines qui sont 0 et 1, donc $x^2 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant x$ sur $[0\,;\,1]$.

$f_1'(x) = 2x > 0$ sur $[0\,;\,1]$ donc f_1 est croissante sur $[0\,;\,1]$.

- $f_2(x) = x^3$;

f_2 est définie sur $[0\,;\,1]$.

$f_2(0) = 0$ et $f_2(1) = 1$.

$f_2(x) = x^3 \leqslant x$ sur $[0\,;\,1]$.
En effet $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ or :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sur $[0\,;\,1]$, $x^3 - x \leqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \leqslant x$.

$f_2'(x) = 3x^2 > 0$ donc f_2 est croissante sur $[0\,;\,1]$.

- $f_3(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\,;$

f_3 est définie sur $[0\,;\,1]$.

$f_3(0) = 0$ et $f_3(1) = 1$.

$f_3(x) \leqslant x$ sur $[0\,;\,1]$. En effet :
$f_3(x) - x = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - x = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{4}x(x^2 - 2x + 1) = -\frac{3}{4}x(x-1)^2$
Donc sur $[0\,;\,1]$, $f_3(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow f_3(x) \leqslant x$.

$f_3'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{4}$ est négatif sauf entre $x_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{3} \approx 1{,}41$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{3} \approx -0{,}07$ donc positive sur $[0\,;\,1]$ donc f_4 est croissante sur $[0\,;\,1]$.

- $f_4(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e} - 2)x - 1$.

f_4 est définie sur $[0\,;\,1]$.

$f_4(0) = \mathrm{e}^0 - (\mathrm{e}-2) \times 0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$. $f_4(1) = \mathrm{e}^1 - (\mathrm{e}-2) \times 1 - 1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 - 1 = 1$.

$f_4(x) \leqslant x$ sur $[0\,;\,1]$. En effet :
Posons $g(x) = f_4(x) - x$.
$g(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)x - 1 - x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x + 2x - 1 - x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x + x - 1$.
On ne peut résoudre d'inéquation de la forme $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}x + x - 1 \geqslant 0$ car il y a dans cette expression à la fois e^x et x et aucune possibilité d'éliminer l'un et l'autre en même temps.
Tentons d'étudier les variations de g :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1$.
$g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} - 1 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(\mathrm{e}-1) \approx 0{,}54$.
On a donc :

x	0		$\ln(\mathrm{e}-1)$		1
$g'(x)$		$-$		$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc sur $[0\,;\,1]$, $g(x) = f_4(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow f_4(x) \leqslant x$.

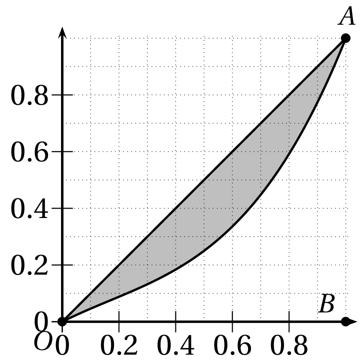
$f_4'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)$.
Résolvons, par exemple, $f_4'(x) \geqslant 0$.
$f_4'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} - 2 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(\mathrm{e}-2) \approx -0{,}33$.
On a alors :

x	$-\infty$		$\ln(\mathrm{e}-2)$		0		1		$+\infty$
$\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}-2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

Donc sur $[0\,;\,1]$ $f_4'(x)$ strictement positif, donc f_4 strictement croissante.

Partie B : Indice de GINI

$$\gamma=\frac{\text{aire de la partie grisée}}{\text{aire du triangle } OBA}$$



1. Expliquer pourquoi $0\leqslant\gamma\leqslant 1$.
   Préciser dans quelle situation on a $\gamma=0$ et dans quelle situation on a $\gamma=1$.

   Une aire est positive donc le quotient de deux aires est aussi positif. Par ailleurs, la courbe de Lorenz étant située sous le segment $[OA]$ et au-desus de l'axe des abscisses (la part du revenu total est une quantité toujours positive), l'aire de la partie grisée est inférieure à l'aire du triangle OAB, donc le quotient est inférieur à 1. On a donc on a $0\leqslant\gamma\leqslant 1$.
   On a vu qu'en cas d'égalité parfaite la courbe de Lorenz est confondue avec de segment $[OA]$. Dans ce cas l'aire de la partie grisée est nulle et $\gamma=0$.
   En cas d'inégalité totale la courbe de Lorenz est le segment $[OB]$ (B exclu) donc l'aire de la partie grisée est égale à l'aire du triangle OBA et $\gamma=1$.

2. Si on note f la fonction associée à la courbe de LORENZ, montrer que $\gamma=1-2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   aire du triangle $OBA=\frac{1}{2}$.
   aire de la partie grisée = aire du triangle $OBA-\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Donc :
   $$\gamma=\frac{\text{aire de la partie grisée}}{\text{aire du triangle } OBA}=\frac{\frac{1}{2}-\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}}$$
   $$=\left(\frac{1}{2}-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\times 2=1-2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. (a) Calculer γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4, les indices de GINI correspondant aux fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 de la question 3c de la Partie A.

   $f_1(x)=x^2$ donc $F_1(x)=\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de f_1.
   $\gamma_1=1-2\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x=1-2(F_1(1)-F_1(0))=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\approx 0,33.$

   $f_2(x)=x^3$ donc $F_2(x)=\frac{1}{4}x^4$ est une primitive de f_2.
   $\gamma_2=1-2\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x=1-2(F_2(1)-F_2(0))=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0,5.$

$f_3(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$ donc $F_3(x) = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^2$ est une primitive de f_3.
$\gamma_3 = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f_3(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(F_3(1) - F_3(0)) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 0,125.$

$f_4(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}-2)x - 1$ donc $F_4(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}(\mathrm{e}-2)x^2 - x$ est une primitive de f_4.
$\gamma_4 = 1 - 2\displaystyle\int_0^1 f_4(x)\,\mathrm{d}x = 1 - 2(F_4(1) - F_4(0)) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - 1\right) = 3 - \mathrm{e} \approx 0,28.$

(b) Ranger ces fonctions de celle correspondant à la répartition des salaires la plus égalitaire à la répartition la moins égalitaire.

Plus l'indice de Gini est proche de 0 et plus la répartition est égalitaire et plus l'indice de Gini est proche de 1 et plus la répartition est inégalitaire.
On a $0 < \gamma_3 < \gamma_4 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ donc les fonctions sont, dans l'ordre demandé, f_3, f_4, f_1 et f_2.

4. Rechercher sur Internet l'indice de GINI (ou le coefficient de GINI = $100 \times \gamma$) de la France et des États-Unis à une même date (on donnera l'adresse exacte de la source sur sa copie) et comparer ces deux indices.

Toutes les sources (récentes) indiquent que l'indice de GINI de la France est inférieur à celui des USA donc que la France est moins inégalitaire que les USA.