

# Chapitre 7

## Systèmes

### Sommaire

|               |    |
|---------------|----|
| 7.1 Activité  | 57 |
| 7.2 Bilan     | 57 |
| 7.3 Exercices | 58 |

### 7.1 Activité

Nous savons que par deux points du plan passe une unique droite.

Le plan étant muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , soient  $A(2; 3)$  et  $B(4; 6)$  deux points de ce plan et  $(AB)$  :  $y = mx + p$  l'équation réduite de la droite  $(AB)$ .

1. Montrer que  $m$  et  $p$  sont solutions du système : 
$$\begin{cases} 2m + p = 3 \\ 4m + p = 6 \end{cases}$$
2. On donne les matrices  $A$ ,  $X$  et  $B$  suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ .  
Calculer  $AX$ .  
En déduire une équation matricielle équivalente au système de la question 1.
3. On suppose que  $A$  est inversible et on note  $A^{-1}$  son inverse.  
Isoler la matrice des inconnues  $X$  à l'aide de  $A^{-1}$ .
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer alors les valeurs de  $m$  et  $p$ .

### 7.2 Bilan

**Propriété 7.1.** Tout système linéaire à  $n$  inconnues et  $n$  équations peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle  $AX = B$  où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ ,  $X$  la matrice colonne  $(n \times 1)$  des inconnues et  $B$  une matrice colonne  $(n \times 1)$ .

Si  $A$  est inversible, alors le système a une unique solution qui est telle que  $X = A^{-1} \times B$ .

## 7.3 Exercices

### EXERCICE 7.1.

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que la matrice inverse de  $A$  est  $\begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ 3,5 & -3 \end{pmatrix}$ .

2. Soit le système  $\begin{cases} 6x - 4y = 7 \\ 7x - 5y = 8 \end{cases}$ .

En utilisant la matrice  $A^{-1}$ , chercher la solution de ce système.

### EXERCICE 7.2.

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 30 € pièce, les autres 60 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.

On note  $x$  le nombre de chaises à 30 € et  $y$  le nombre de chaises à 60 € vendues dans la journée.

1. Montrer que :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$

2. Déterminer l'inverse de la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$ .

3. En déduire le nombre de chaises à 30 € et à 60 € qui ont été vendues.

### EXERCICE 7.3.

Pour chacun des systèmes suivants, les écrire sous la forme matricielle  $A \times X = B$ , chercher la matrice inverse de  $A$  et, à l'aide de votre calculatrice, en déduire la solution du système.

1.  $\begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 3x - 8y = -3 \end{cases}$       3.  $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$       4.  $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ 2x - y + z + 2t = 4 \\ 3x - 2y + 5z - 2t = 4 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

2.  $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ -x + y - 2z = -5 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

### EXERCICE 7.4.

Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.

On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.

On note  $n$  la longueur du parcours de natation,  $p$  celle du parcours de course à pied et  $b$  celle du parcours à bicyclette.

1. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  et on admet que  $A$  est inversible. Montrer que :  $\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer  $n$ ,  $p$  et  $b$ .

**EXERCICE 7.5.**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Sa courbe  $\mathcal{C}$  passe par les points  $M(1; 0)$ ,  $N(-1; -4)$  et  $P(2; -1)$ .

1. Montrer que  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = -4 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système à l'aide des matrices.

**EXERCICE 7.6.**

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en  $\text{m}^3$  utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

|                                        |      |     |   |      |    |
|----------------------------------------|------|-----|---|------|----|
| Nombre de jours écoulés : $x_i$        | 1    | 3   | 5 | 8    | 10 |
| Volume utilisé en $\text{m}^3$ : $y_i$ | 2,25 | 4,3 | 8 | 17,5 | 27 |

1. Représenter le nuage de points  $(x_i; y_i)$ .  
(Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un  $\text{m}^3$ ).
2. Le nuage de points a une allure qui permet d'envisager une modélisation de la consommation par une parabole  $\mathcal{P}$  qui aurait pour équation  $y = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.
  - (a) Déterminer un système d'équation d'inconnues  $(a; b; c)$  sachant qu'on veut que la parabole passe par les points  $A(1; 2,25)$ ,  $B(5; 8)$  et  $C(10; 27)$ .
  - (b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.
  - (c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique.  
Ce modèle semble-t-il satisfaisant ?
  - (d) À l'aide de ce modèle, déterminer quelle serait la consommation d'eau pour l'exploitation au bout de 20 jours.

**EXERCICE 7.7.**

Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure  $v_i$  (en km/h) de l'automobile, puis la distance  $d_i$  (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule.

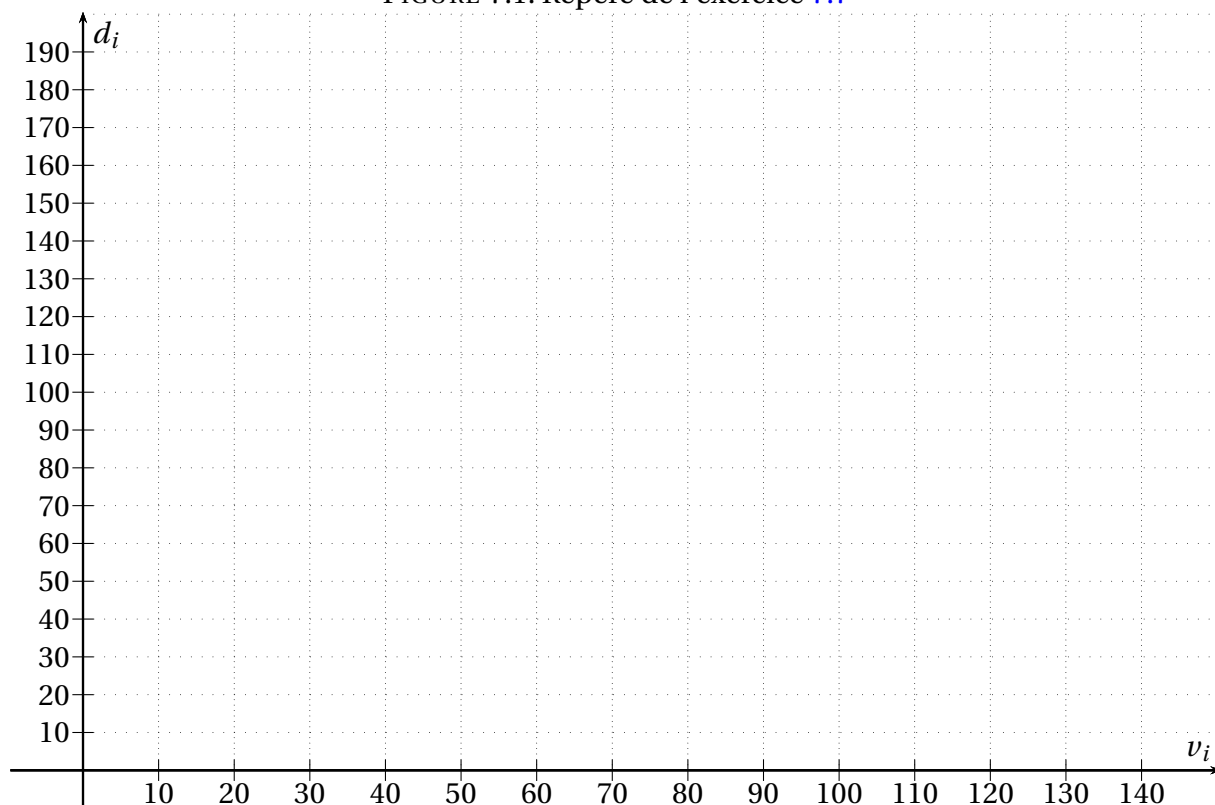
Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

|                        |     |      |      |      |       |       |       |
|------------------------|-----|------|------|------|-------|-------|-------|
| vitesse $v_i$          | 20  | 43   | 62   | 80   | 98    | 115   | 130   |
| distance d'arrêt $d_i$ | 3,5 | 20,5 | 35,9 | 67,8 | 101,2 | 135,8 | 168,5 |

1. Dans le repère fourni sur la figure 7.1 page suivante, représenter le nuage de points de coordonnées  $(v_i; d_i)$ .  
Un modèle affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On envisage un modèle parabolique d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  passant par les points  $(20; 3,5)$ ,  $(80; 67,8)$  et  $(130; 168,5)$ .
  - (a) Déterminer le système d'équation dont  $(a; b; c)$  est solution.
  - (b) À l'aide des matrices, résoudre ce système.
  - (c) Représenter alors cette parabole sur le même graphique.  
Ce modèle semble-t-il satisfaisant ?

- (d) Le manuel du code de la route donne, pour calculer la distance d'arrêt (en m), la méthode suivante : « Prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h ». Comparer les résultats obtenus par le modèle parabolique à ceux que l'on obtiendrait avec cette méthode.

FIGURE 7.1: Repère de l'exercice 7.7

**EXERCICE 7.8** (Modèle fermé de LEONTIEF).

Dans un pays imaginaire, l'économie repose sur trois secteurs : industrie, services et électricité. Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production des deux autres secteurs et d'une partie de sa propre production. Ces échanges durant une année sont résumés dans le tableau des entrées-sorties ci-dessous :

|                                          | Industrie | Services | Électricité |
|------------------------------------------|-----------|----------|-------------|
| Produire 1 unité de l'industrie consomme | 30 %      | 30 %     | 30 %        |
| Produire 1 unité de services consomme    | 40 %      | 10 %     | 50 %        |
| Produire 1 unité d'électricité consomme  | 30 %      | 60 %     | 20 %        |

Ce modèle est dit *fermé* car on suppose qu'il n'existe aucun échange avec l'extérieur.

Cette économie est dite *équilibrée* si la production totale de chaque secteur est égale à sa consommation totale.

On se propose de déterminer la production de chaque secteur afin que l'économie soit équilibrée.

On note  $x$ ,  $y$  et  $z$  le nombre d'unités produites, respectivement, par les secteurs de l'industrie, des services et de l'électricité.

- Expliquer pourquoi l'économie est équilibrée si et seulement si on a  $A \times P = P$  où  $A$  est une matrice qu'on explicitera et  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

2. Expliquer pourquoi résoudre  $A \times P = P$  revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -0,7x + 0,3y + 0,3z = 0 \\ 0,4x - 0,9y + 0,5z = 0 \\ 0,3x + 0,6y - 0,8z = 0 \end{cases}$$

3. Voici la résolution de ce système avec le logiciel Xcas. Expliquer l'affichage.

```
insolve([-0.7x+0.3y+0.3z=0, 0.4x-0.9y+0.5z=0, 0.3x+0.6y-0.8z=0], [x,y,z])
[0.823529411765*z, 0.921568627451*z, z]
```

4. Pour une production de 10 000 unités d'électricité, combien les secteurs de l'industrie et des services doivent-ils produire d'unités pour que l'économie soit équilibrée (*on arrondira à l'unité*) ?

### EXERCICE 7.9.

Un vendeur de glaces et un autre de boissons travaillent sur une plage isolée. La journée de travail est longue aussi consomment-ils tous les deux glaces et boissons et vendent le reste aux vacanciers selon les modalités indiquées en pourcentage suivantes :

| nécessite pour le vendeur | de l'ensemble des glaces | de l'ensemble des boissons | Demande des vacanciers |
|---------------------------|--------------------------|----------------------------|------------------------|
| 1 € de glaces vendues     | 2 %                      | 1 %                        | 116                    |
| 1 € de boissons vendues   | 4 %                      | 3,25 %                     | 150                    |

On note respectivement  $x$  et  $y$  le nombre d'euros de glaces et de boissons vendues.

On se propose de déterminer  $x$  et  $y$  pour que chacun, vendeurs et vacanciers, consomme ce qu'il souhaite et que tous les produits soient vendus.

#### 1. Modélisation

- Expliquer pourquoi  $0,02x + 0,01y + 116 = x$  puis écrire une équation analogue pour les boissons.
- Montrer que le système d'équations obtenu dans la question précédente est équivalent à l'équation matricielle  $A \times V + D = V$  où les matrices  $A$ ,  $V$  et  $D$  seront à préciser.
- Montrer que  $A \times V + D = V$  est équivalent à  $\mathcal{L} \times V = D$  où  $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0,98 & -0,01 \\ -0,04 & 0,9675 \end{pmatrix}$

#### 2. Résolution du problème

- À l'aide de la calculatrice, résoudre  $\mathcal{L} \times V = D$ .
- Résoudre le problème.

### EXERCICE 7.10.

Ce tableau est un extrait de la table créée par WASSILY LEONTIEF lors de son étude de l'économie américaine en 1947. L'unité est le milliard de dollars de 1947.

| nécessite... unités du secteur | La production d'1 unité de produits |              |             | Demande de la population |
|--------------------------------|-------------------------------------|--------------|-------------|--------------------------|
|                                | agricole                            | manufacturés | de services |                          |
| Agriculture                    | 0,4102                              | 0,0301       | 0,0257      | 39,24                    |
| Manufactures                   | 0,0624                              | 0,3783       | 0,1050      | 60,02                    |
| Services                       | 0,1236                              | 0,1588       | 0,1919      | 130,65                   |

On suppose que l'économie est équilibrée, c'est-à-dire que la production totale de ces trois secteurs couvre les besoins de ces secteurs et de la population.

1. Écrire l'équation matricielle qui traduit l'équilibre de cette économie.
2. Déterminer alors la production de chaque secteur en 1947 (*on arrondira les résultats à l'unité*).
3. Analyser le changement de production de chaque secteur si la demande de la population est

donnée par  $D = \begin{pmatrix} 40,24 \\ 60,02 \\ 130,65 \end{pmatrix}$

#### EXERCICE 7.11.

Les tableaux ci-dessous indiquent les ventes de la buvette lors d'un festival de musique durant trois jours ainsi que les prix pratiqués.

| Ventes | Sandwich | Frite | Boisson |
|--------|----------|-------|---------|
| Jour 1 | 70       | 110   | 225     |
| Jour 2 | 105      | 135   | 290     |
| Jour 3 | 63       | 90    | 185     |

|          | Prix   |
|----------|--------|
| Sandwich | 4 €    |
| Frite    | 2,50 € |
| Boisson  | 1,50 € |

Certains participants du festival ont laissé entendre au gérant de la buvette qu'il pratiquait des prix trop élevés.

En prévision du festival de l'année prochaine, le gérant estime qu'en baissant ses prix de 20 %, il augmenterait ses ventes de 20 %.

A-t-il intérêt à baisser ses prix ? *On utilisera les matrices pour répondre à la question.*