EXERCICES

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral, M, N et P sont des points respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ tels que $BM = CN = AP$.

1. Montrer que les triangles BMP, CNM et NAP sont isométriques.
2. En déduire que MNP est équilatéral.

EXERCICE 2

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Par O on mène une droite Δ qui coupe (AB) en P et (CD) en Q.

1. Montrer que les triangles AOP et COQ sont isométriques.
2. Comparer OP et OQ.
3. Trouver deux autres triangles isométriques.

EXERCICE 3

$ABCD$ est un parallélogramme, N est un point du segment $[CD]$ distinct de C ou D. La droite (AN) coupe (BC) en M.

1. Démontrez que les triangles ADN et ABM sont semblables.
2. Déduisez-en que $DN \times BM = AB \times AD$

EXERCICE 4

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$ cm et $AD = 3$ cm. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ coupe $[DC]$ en M et (BC) en N.

1. Démontrer que les triangles ADM et ABN sont isocèles et semblables.
2. En déduire que aire$(ADM) = 0,36 \times$ aire(ABN).

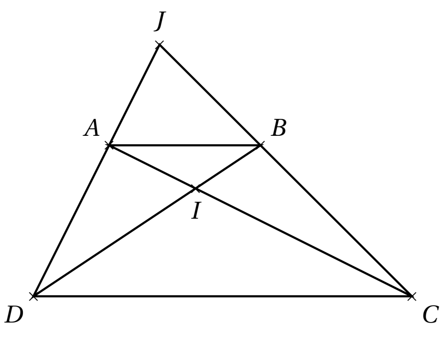
EXERCICE 5

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ cm et $AB = 4$ cm. On appelle I le milieu de $[BC]$ et J le point de la demi-droite $[DC)$ tel que $DJ = 6$ cm.
Prouver de deux façons différentes que les triangles BCD et IJC sont semblables. *Indication : pour l'une des deux façons on pourra calculer DB et IJ.*

EXERCICE 6

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$; (AC) et (BD) se coupent en I, (AD) et (BC) se coupent en J (voir figure).

1. Démontrer que les triangles IAB et ICD sont semblables.
2. Démontrer que les triangles JAB et JDC sont semblables.

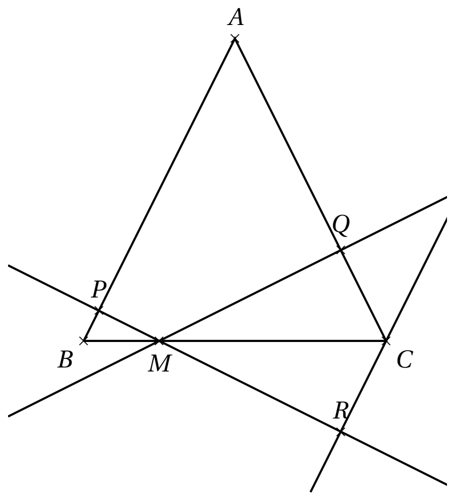


EXERCICE 7

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que $BC = B'C'$ et les hauteurs relatives aux côtés $[BC]$ et $[B'C']$ ont la même longueur.
Sont-ils isométriques ? Ont-ils la même aire ? Ont-ils le même périmètre ?

EXERCICE 8

Soit ABC un triangle isocèle en A et M un point de $[BC]$.
Par M on mène la perpendiculaire à (AB), qui coupe (AB) en P, et la perpendiculaire à (AC), qui coupe (AC) en Q.
Par C, on mène la perpendiculaire à (MP), qui coupe (MP) en R (voir figure).
Démontrer que les triangles MQC et MRC sont isométriques.

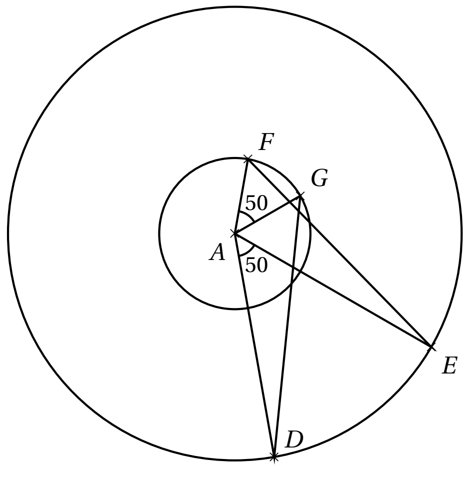


EXERCICE 9

On donne la figure ci-dessous où :

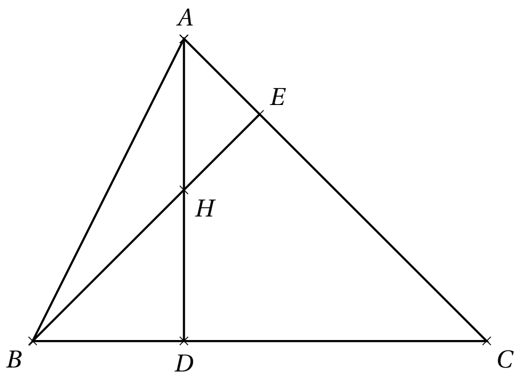
- A est le centre des deux cercles ;
- D et E sont sur le grand cercle ;
- F et G sont sur le petit cercle ;
- $\widehat{FAG} = \widehat{EAD} = 50$.

Démontrer que les triangles AGD et AFE sont isométriques.



EXERCICE 10

Soit ABC un triangle. On note D et E le pied des hauteurs issues respectivement de A et B. On note H l'orthocentre (intersection des deux hauteurs) de ABC.



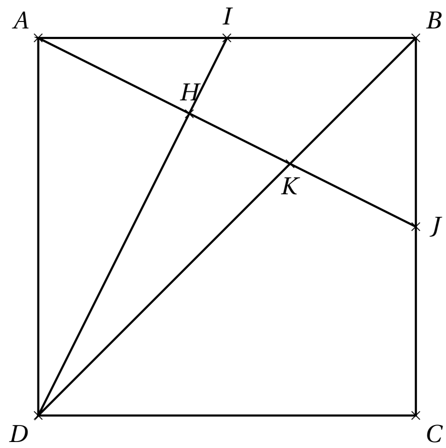
1. (a) Démontrer que les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{EBC}$ sont égaux.
   (b) Démontrer que ADC et BDH sont semblables.
   (c) En déduire que $DA \times DH = BD \times DC$.
   (d) Démontrer que ADC et AEH sont semblables.
   (e) En déduire que $AD \times AH = AC \times AE$.
2. On donne $AD = 4$, $BD = 3$ et $AC = 6$.
   (a) Calculer AB, DC et BC.
   (b) Calculer AH, AE et EH.

EXERCICE 11

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. B' est le pied de la hauteur issue de B. D est le point d'intersection de (AC) et de la perpendiculaire à (AB) passant par B.
Démontrer que $AC^2 = AB' \times AD$

EXERCICE 12

$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. La droite (AJ) coupe le segment $[DI]$ en H et la diagonale $[DB]$ en K.



1. (a) Démontrer que les triangles DAI et ABJ sont isométriques.
   (b) En déduire que les triangles AIH et ABJ sont semblables.
   (c) Quelles égalités de quotient de longueurs peut-on en déduire ?
2. On donne $AB = 4$.
   (a) Déterminer AJ.
   (b) En déduire IH et AH.
   (c) En déduire l'aire du triangle AIH.
3. Exprimer l'aire du triangle AIH en fonction de l'aire du carré $ABCD$. Combien de triangles de ce type peut-on mettre à l'intérieur du carré $ABCD$?

EXERCICE 13

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme, ABE et DCF sont des triangles rectangles et isocèles respectivement en B et D.

1. Démontrer que les triangles ABO et DCO sont isométriques.
2. Démontrer que les triangles EBO et DFO sont isométriques.
3. En déduire que E, O et F sont alignés.

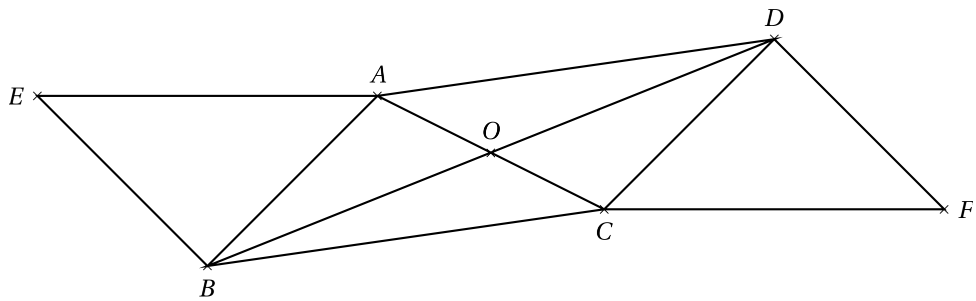


FIG. 1 – Figure de l'exercice 13