Un corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (4 points).
Commun à tous les candidats

On considère une fonction f :

- définie, continue et doublement dérivable sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- strictement décroissante sur les intervalles $[-1\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$.

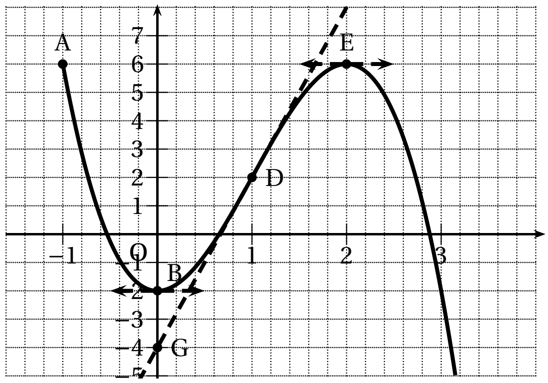
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Elle passe par les points $A(-1\,;6)$, $B(0\,;-2)$, $D(1\,;2)$ et $E(2\,;6)$.

Elle admet au point D une tangente passant par le point $G(0\,;-4)$.

Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



1. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$. Justifier les réponses.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f, c'est-à-dire à $\mathscr{C}$, au point d'abscisse a.
$f'(1)$ est donc le coefficient directeur de la tangente au point D, c'est-à-dire de la droite (DG), donc :
$f'(1) = \frac{y_G - y_D}{x_G - x_D} = \frac{-4-2}{0-1} = 6$.
$f'(2) = 0$ car la tangente est horizontale au point E.

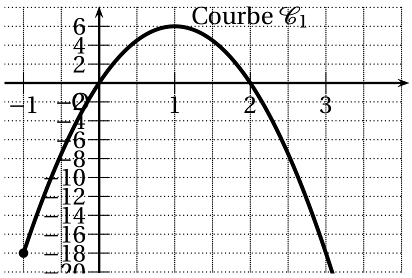
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D.

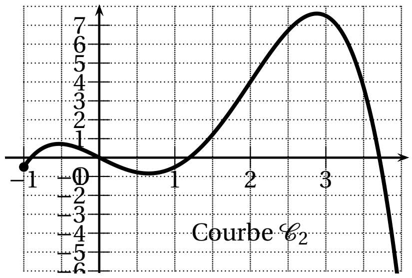
Cette tangente admet une équation de la forme $y = mx + p$ et on vient de voir que $m = 6$ donc $y = 6x + p$.
Comme cette tangente coupe l'axe des ordonnées à l'ordonnée -4, $p = -4$.
Donc une équation de la tangente à la courbe au point D est $y = 6x - 4$

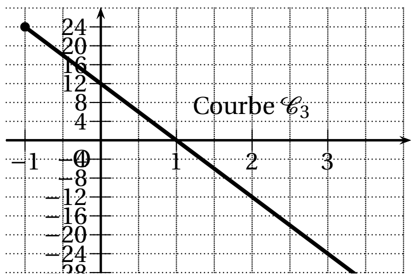
3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, trois solutions que l'on notera x_1, x_2 et x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$. Dresser le tableau de signes de la fonction f.

x	$0,25$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

4. Parmi les trois courbes suivantes, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente f', et celle qui représente f''.







Les variations de f donnent le signe de f' donc :

x	0.25		0		2		$+\infty$
Variations de f		↘		↗		↘	
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	

Seule la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une fonction ayant ces signes.

La convexité de f donne le signe de f'' donc :

x	0.25		1		$+\infty$
Convexité de f		convexe		concave	
Signe de $f''(x)$		+		−	

Seule la courbe $\mathscr{C}_3$ correspond à une fonction ayant ces signes.

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Dans un centre de vacances, on propose aux toursites deux activités sportives : le golf et le tennis.
Sur 240 personnes du centre, 126 font seulement du tennis, 42 font seulement du golf, 30 font tennis et golf et les autres ne font aucun sport.

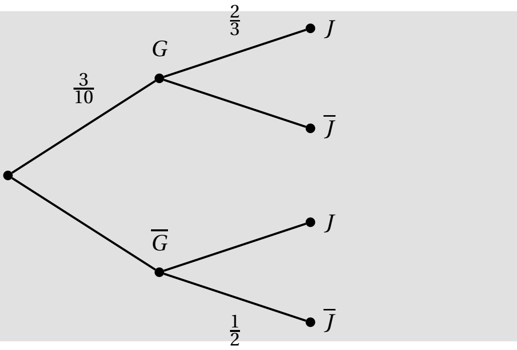
1. On interroge une personne prise au hasard.
   On note :
   T l'événement : « la personne fait du tennis » ;
   G l'événement : « la personne fait du golf ».
   (a) Justifier que $p(G) = \frac{3}{10}$.

   Le choix d'une personne étant au hasard, il y a équiprobabilité. Il suffit donc d'obtenir le nombre de personnes convenant à l'événement et de la diviser par le nombre de personnes appartenent à l'ensemble de départ considéré.
   Ainsi : $p(G) = \frac{42+30}{240} = \frac{72}{240} = \frac{3}{10}$

   (b) Calculer les probabilités d'interroger :
   - une personne faisant du golf et du tennis ;
   - une personne faisant du golf ou du tennis ;
   - une personne faisant un seul des deux sports ;
   - une personne faisant du golf sachant qu'elle fait du tennis.

   La même règle s'impose.
   On appelant p_1, p_2, p_3 et p_4 les probabilités recherchées, on a :
   - $p_1 = \frac{30}{240} = \frac{1}{8}$
   - $p_2 = \frac{126+42-30}{240} = \frac{138}{240} = \frac{23}{40}$
   - $p_3 = \frac{126+42}{240} = \frac{168}{240} = \frac{7}{10}$
   - $p_4 = \frac{30}{126} = \frac{5}{21}$

2. On sait que $\frac{2}{3}$ des touristes qui font du golf ont moins de 40 ans et que 50 % des touristes qui ne font pas de golf ont 40 ans et plus.
   On note J l'événement : « la personne a moins de 40 ans ».
   (a) Représenter la situation par un arbre pondéré.



   (b) Calculer $p(G \cap J)$ puis $p(J)$.

   $p(G \cap J) = p(G) \times p_G(J) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$.
   G et $\overline{G}$ réalisent une partition de l'univers donc, formule des probabilités conditionnelles totales :
   $p(J) = p(G \cap J) + p(\overline{G} \cap J) = \frac{1}{5} + \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} = \frac{11}{20}$.

   (c) On interroge une personne de moins de 40 ans.
   Calculer la probabilité qu'elle fasse du golf.

   $p_J(G) = \frac{p(J \cap G)}{p(J)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{5} \times \frac{20}{11} = \frac{4}{11}$.

3. On interroge successivement trois personnes de ce groupe de toursites prises au hasard.
   Parmi ces trois personnes, le nombre de personnes jouant au golf est une variable aléatoire notée X.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;0,3)$.

   - Chaque épreuve n'a que deux issues : un succès (G), de probabilité 0,3 ou un échec ($\overline{G}$), c'est donc une épreuve de BERNOULLI.
   - On répète les épreuves 3 fois, de manière indépendantes, c'est donc un schéma de BERNOULLI.
   - X représente le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli donc X suit la loi $\mathscr{B}(3\,;0,3)$.

   (b) Calculer la probabilité :
   - qu'aucune des trois personnes ne joue au golf ;
   - qu'au moins une des trois personnes joue au golf ;
   - qu'une seule des trois personnes joue au golf.

   Soient q_1, q_2 et q_3 les probabilités recherchées.
   - $q_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000}$
   - $q_2 = 1 - p(X = 0) = 1 - \frac{343}{1000} = \frac{657}{1000}$
   - $q_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left(\frac{3}{10}\right)^1 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{441}{1000}$

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les graphes dont il est question dans cet exercice, dans les deux parties, représentent les plans de villes différentes, les arêtes de ces graphes étant les avenues commerçantes et les sommets les carrefours de ces avenues (on nommera ces carrefours avec des lettres disposées dans l'ordre alphabétique dans les matrices d'adjacence).

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A
On donne le graphe G.

1. Donner l'ordre de ce graphe puis le degré de chacun de ses sommets.

Il y a 6 sommets, donc le graphe est d'ordre 6.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	4	3	4	3	3	3

2. Ce graphe est-il complet ?
Interpréter sa réponse en termes d'avenues et de carrefours.

Non le graphe n'est pas complet (les sommets D et F, par exemple, ne sont pas adjacents).
Cela signifie que tous les carrefours ne sont pas reliés par une avenue.

3. Ce graphe est-il connexe ?
Interpréter sa réponse en termes d'avenues et de carrefours.

Oui le graphe est connexe (on peut n'importe quel couple de sommets par une chaîne).
Cela signifie qu'on peut joidre n'importe quel couple de carrefour par une succession d'avenues.

4. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? *Justifier sa réponse.*

Il s'agit de savoir s'il existe une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes, donc si le grpahe est eulérien. Or ce graphe comporte strictement plus de 2 sommets impairs (B, D, E et F) donc il ne contient pas de chaîne eulérienne.
Donc un tel trajet est impossible.

5. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe et indiquer le nombre de trajets empruntant exactement 5 avenues (qui peuvent être les mêmes) permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F.

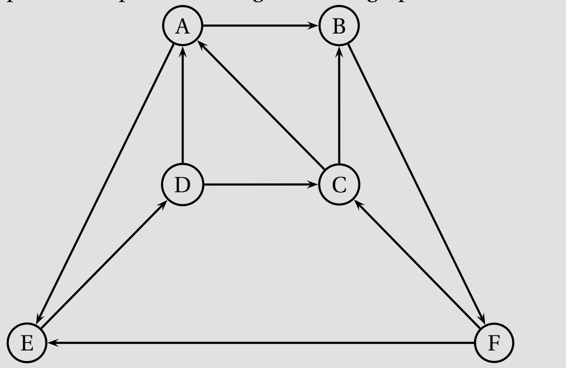
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

M^5 indique le nombre de chaînes de longueur 5 entre les différents sommets du graphe. D'après la calculatrice, le coefficient de la ligne 1, colonne 6 de M^5 est 63. Il y a donc 63 trajets empruntant 5 avenues permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F.

Partie B
La matrice d'adjacence N ci-contre est celle associée à un graphe G'.
On donne aussi certaines de ses puissances.

1. Dessiner un graphe pouvant lui correspondre.

La matrice d'adjacence n'étant pas symétrique par rapport à sa première diagonale, le graphe est orienté.



2. Combien y a-t-il de trajets empruntant exactement 3 avenues et permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F ?

La matrice N^3 indique le nombre de chaînes de longueur 3 entre les différents sommets. Le coefficient de la ligne 1, colonne 6 est 0. Il n'y a donc aucun trajet empruntant exactement 3 avenues permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F.

3. (a) Combien y a-t-il de trajets empruntant exactement 4 avenues et permettant de se rendre du carrefour D au carrefour C ?

La matrice N^4 indique le nombre de chaînes de longueur 4 entre les différents sommets. Le coefficient de la ligne 4, colonne 3 est 3. Il y a donc 3 trajets empruntant exactement 4 avenues permettant de se rendre du carrefour D au carrefour C.

(b) Donner tous ces trajets.

Ces trajets sont : $DABFC$, $DAEDC$ et $DCBFC$.

EXERCICE 3 (5 points).
Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.
Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note u_n le nombre dh'abitants de la ville en l'année $2012+n$. On a donc $u_0 = 40000$.
On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,875 \times u_n + 1200$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 9600$.

1. La valeur de u_1 est :

   (a) 6 200 (b) 35 000 (c) 36 200 (d) 46 200

   $u_1 = 0,875u_0 + 1200 = 0,875 \times 40000 + 1200 = 36200$ c'est donc la réponse c.

2. La suite (v_n) est :

   (a) géométrique de raison $-12,5\,\%$
   (b) géométrique de raison 0,875
   (c) géométrique de raison $-0,875$
   (d) arithmétique de raison -9600

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 9600 = 0,875 \times u_n + 1200 - 9600 = 0,875 \times u_n - 8400 = 0,875\left(u_n - \frac{8400}{0,875}\right) = 0,875(u_n - 9600) = 0,875 \times v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 40000 - 9600 = 30400$ et de raison 0,875 c'est donc la réponse b.

3. La suite (u_n) a pour limite :

   (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1 200 (d) 9 600

   (v_n) étant géométrique, $v_n = v_0 \times 0,875^n = 30400 = u_n - 9600$.
   Donc $u_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$.
   $0,875 \in [0\,;\,1[$ donc $\lim 0,875^n = 0$ donc $\lim u_n = 30400 \times 0 + 9600 = 9600$ c'est donc la réponse d.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
   u, n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 40 000
   n PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
   TANT QUE u>10000 FAIRE
     n PREND LA VALEUR n+1
     u PREND LA VALEUR 0,875*u + 1200
   FIN TANT QUE
SORTIE
   n
```

   Cet algorithme permet d'obtenir :

   (a) la valeur de u_{40000}
   (b) toutes les valeurs de u_0 à u_n
   (c) le plus petit rang n pour lequel on a : $u_n \leqslant 10000$
   (d) le nombre de termes inférieurs à 1 200

   L'algorithme calcule les termes consécutifs de u_n jusqu'à ce que u_n soit inférieur à 10 000 où il s'arrête et affiche n. L'algorithme affiche donc le plus petit rang n pour lequel on a $u_n \leqslant 10000$, c'est donc la réponse c.

5. La valeur affichée est :

   (a) 33 (b) 34 (c) 9 600 (d) 9 970,8

   On peut l'implémenter sur une calculatrice ou résoudre l'inéquation : $u_n \leqslant 10000$.
   $u_n \leqslant 10000 \Leftrightarrow 30400 \times 0,875^n + 9600 \leqslant 10000 \Leftrightarrow 0,875^n \leqslant \frac{400}{30400}$.
   On applique ln :
   $n \ln 0,875 \leqslant \ln\left(\frac{400}{30400}\right)$.
   On divise par $\ln 0,875$, qui est négatif car $0,875 < 1$:
   $n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{400}{30400}\right)}{\ln 0,875} \approx 32,43$.
   Il faut donc que n soit supérieur à environ 32,43, mais n étant entier, il faut donc que n soit supérieur à 33, soit la réponse a.

EXERCICE 4 (9 points).
Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_{\text{T}}(x)$, pour x variant de $0,25$ à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe Γ fournie en **annexe** est la représentation graphique de la fonction C_{T} sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.
La tangente à Γ au point $A(1\,;\,1)$ est horizontale.

PARTIE A

1. (a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0,25\,;\,5]$ par $R(x) = 1,5x$.
Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

   200 litres correspond à $x = 2$. La recette est donc $R(2) = 3$ milliers d'euros, soit 3 000 euros.

   (b) Tracer, sur le graphique fourni en **annexe**, le segment représentant graphiquement la fonction R.

   Voir la courbe $\mathscr{R}$ sur l'annexe.

2. **Lectures graphiques**

   (a) Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.

   Il s'agit de déterminer quand la recette est supérieure aux coûts, c'est-à-dire quand la courbe $\mathscr{R}$ est au-dessous de celle de Γ.
   Par lecture graphique cela semble être entre $x = 0,65$ et $x = 4,5$, c'est-à-dire entre 65 litres et 450 litres.

   (b) Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.

   Il s'agit de mesurer graphiquement l'écart entre les deux courbes lorsque $x = 2$.
   Il semble être d'environ 1,77, c'est-à-dire de 1 770 euros.

   (c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
   À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

   Il s'agit de déterminer pour quelle valeur de x l'écart entre les deux courbes est le plus grand.
   Cela semble être pour environ 2,75 et l'écart semble alors d'environ 2,125.
   Le bénéfice maximal semble être pour 275 litres et il vaut environ 2 125 euros.

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_{T} est définie sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$ par $C_{\text{T}}(x) = x^2 - 2x\ln(x)$.

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par : $B(x) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x)$.
Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la **partie A**.

   Le bénéfice est égal à la recette moins le coût donc $B(x) = R(x) - C_T(x) = 1,5x - \left(x^2 - 2x\ln(x)\right) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x)$.
   $B(2) = 3 - 4 + 4\ln(2) \approx 1,773$ soit environ 1 773 euros de bénéfice, ce qui correspond environ au résultat obtenu à la question 2. b. de la partie A.

2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2\ln(x) - 2x + 3,5$.

   $B'(x) = 1,5 - 2x + 2\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 1,5 - 2x + 2\ln(x) + 2 = 2\ln(x) - 2x + 3,5.$

3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$:

x	$0,25$		1		5
$B'(x)$	y_1	$\nearrow$	$1,5$	$\searrow$	y_2

On précise les encadrements : $0,22 < y_1 < 0,23$ et $-3,29 < y_2 < -3,28$.

(a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.

Sur $[0,25\,;\,1]$, d'après le tableau de variation, $B'(x) > 0$.
Sur $[1\,;\,5]$, B' étant continue et strictement décroissante, $B'(1) = 1,5 > 0 > B'(5) = y_2$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution.
Donc $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $2,77$ *pour valeur approchée de* α.

(b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0,25\,;\,5]$. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.
Les valeurs approchées des extremums sont attendues.

x	$0,25$		α		5
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	$-0,381$	$\nearrow$	$2,127$	$\searrow$	$-1,406$

4. (a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ?
On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres.
Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

D'après le tableau de variations de B, le bénéfice est maximal pour $x = \alpha \approx 2,77$ c'est-à-dire pour 277 litres et il vaut $B(\alpha) \approx 2,127$ c'est-à-dire 2 127 euros.

(b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

Oui.

ANNEXE