BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2014

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Séries
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES, toutes spécialités

Classes
TES1, TES2, TES3, TES4 ET TES5

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le barème n'est qu'indicatif.

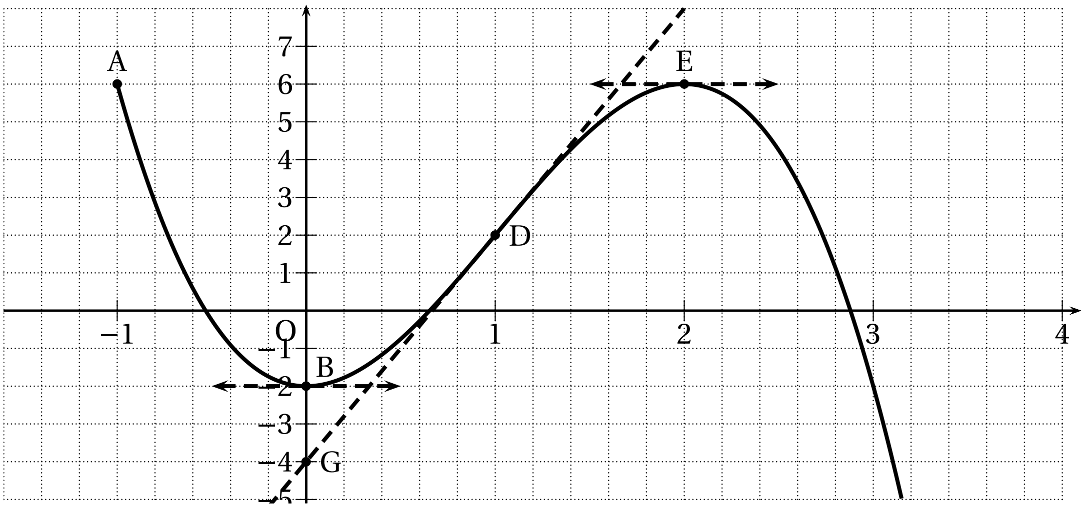
Le sujet comporte 8 pages.

EXERCICE 1 (4 points).
Commun à tous les candidats

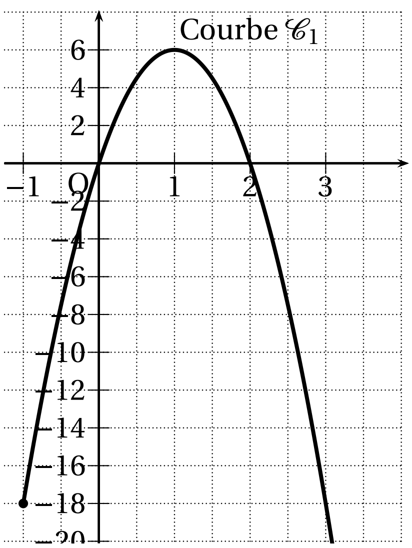
On considère une fonction f :

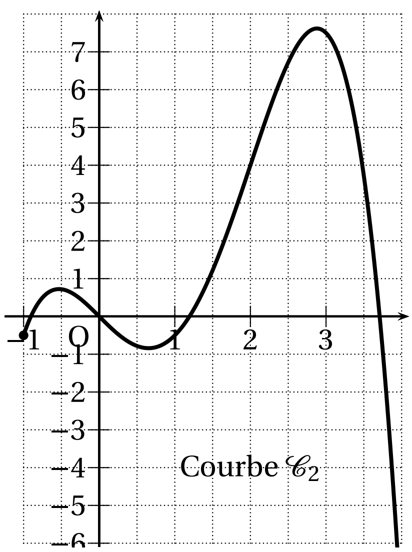
- définie, continue et doublement dérivable sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$;
- strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$;
- strictement décroissante sur les intervalles $[-1\,;0]$ et $[2\,;+\infty[$.

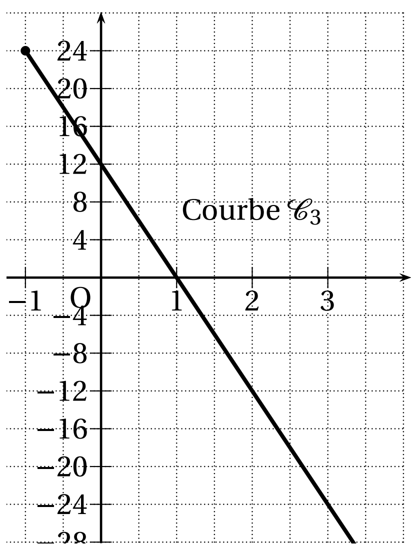
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Elle passe par les points $A(-1\,;6)$, $B(0\,;-2)$, $D(1\,;2)$ et $E(2\,;6)$.
Elle admet au point D une tangente passant par le point $G(0\,;-4)$.
Elle admet au point B et au point E une tangente horizontale.



1. Déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$. Justifier les réponses.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point D.
3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, trois solutions que l'on notera x_1, x_2 et x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
4. Parmi les trois courbes suivantes, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, préciser, en justifiant la réponse, celle qui représente f', et celle qui représente f''.







EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Dans un centre de vacances, on propose aux toursites deux activités sportives : le golf et le tennis. Sur 240 personnes du centre, 126 font seulement du tennis, 42 font seulement du golf, 30 font tennis et golf et les autres ne font aucun sport.

1. On interroge une personne prise au hasard.
   On note :

   T l'événement : « la personne fait du tennis » ;

   G l'événement : « la personne fait du golf ».

   (a) Justifier que $p(G) = \frac{3}{10}$.

   (b) Calculer les probabilités d'interroger :
   - une personne faisant du golf et du tennis ;
   - une personne faisant du golf ou du tennis ;
   - une personne faisant un seul des deux sports ;
   - une personne faisant du golf sachant qu'elle fait du tennis.

2. On sait que $\frac{2}{3}$ des touristes qui font du golf ont moins de 40 ans et que 50 % des touristes qui ne font pas de golf ont 40 ans et plus.
   On note J l'événement : « la personne a moins de 40 ans ».

   (a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

   (b) Calculer $p(G \cap J)$ puis $p(J)$.

   (c) On interroge une personne de moins de 40 ans. Calculer la probabilité qu'elle fasse du golf.

3. On interroge successivement trois personnes de ce groupe de toursites prises au hasard.
   Parmi ces trois personnes, le nombre de personnes jouant au golf est une variable aléatoire notée X.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3\,;\,0,3)$.

   (b) Calculer la probabilité :
   - qu'aucune des trois personnes ne joue au golf ;
   - qu'au moins une des trois personnes joue au golf ;
   - qu'une seule des trois personnes joue au golf.

EXERCICE 2 (5 points)**.**

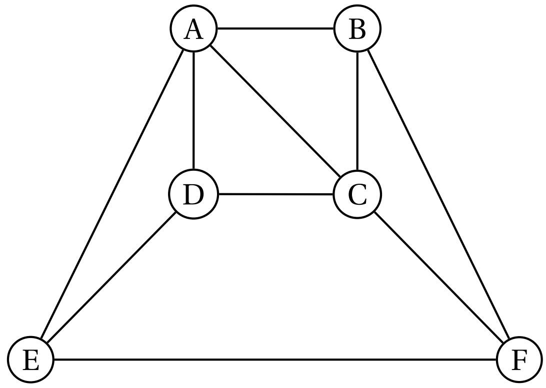
Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les graphes dont il est question dans cet exercice, dans les deux parties, représentent les plans de villes différentes, les arêtes de ces graphes étant les avenues commerçantes et les sommets les carrefours de ces avenues (on nommera ces carrefours avec des lettres disposées dans l'ordre alphabétique dans les matrices d'adjacence).

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On donne le graphe G ci-contre.



1. Donner l'ordre de ce graphe puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Ce graphe est-il complet ?
   Interpréter sa réponse en termes d'avenues et de carrefours.
3. Ce graphe est-il connexe ?
   Interpréter sa réponse en termes d'avenues et de carrefours.
4. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? *Justifier sa réponse.*
5. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe et indiquer le nombre de trajets empruntant exactement 5 avenues (qui peuvent être les mêmes) permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F.
   Sans donner forcément le détail des calculs, on indiquera brièvement comment il a été procédé pour obtenir ce résultat.

Partie B

La matrice d'adjacence N ci-contre est celle associée à un graphe G'.

On donne aussi certaines de ses puissances.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner un graphe pouvant lui correspondre.
   On pourra s'inspirer de la disposition des sommets du graphe de la partie A.
2. Combien y a-t-il de trajets empruntant exactement 3 avenues et permettant de se rendre du carrefour A au carrefour F ?
   On justifiera à l'aide des matrices.
3. (a) Combien y a-t-il de trajets empruntant exactement 4 avenues et permettant de se rendre du carrefour D au carrefour C ?
   On justifiera à l'aide des matrices.
   (b) Donner tous ces trajets.

EXERCICE 3 (5 points)**.**
Commun à tous les candidats

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.
Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note u_n le nombre dh'abitants de la ville en l'année $2012 + n$. On a donc $u_0 = 40000$.
On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,875 \times u_n + 1200$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 9600$.

Les question numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte.
Recopier le numéro de la question sur sa copie et la réponse éventuellement choisie.
Une réponse exacte rapporte 1 point, ***une réponse fausse enlève 0,5 point****. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à 0.*
Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de u_1 est :
   (a) 6 200 (b) 35 000 (c) 36 200 (d) 46 200
2. La suite (v_n) est :
   (a) géométrique de raison $-12,5\,\%$
   (c) géométrique de raison $-0,875$
   (b) géométrique de raison 0,875
   (d) arithmétique de raison -9600
3. La suite (u_n) a pour limite :
   (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1 200 (d) 9 600
4. On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES
   u, n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 40 000
   n PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
   TANT QUE u>10000 FAIRE
     n PREND LA VALEUR n+1
     u PREND LA VALEUR 0,875*u + 1200
   FIN TANT QUE
SORTIE
   n
```

   Cet algorithme permet d'obtenir :
   (a) la valeur de u_{40000}
   (b) toutes les valeurs de u_0 à u_n
   (c) le plus petit rang n pour lequel on a : $u_n \leqslant 10000$
   (d) le nombre de termes inférieurs à 1 200
5. La valeur affichée est :
   (a) 33 (b) 34 (c) 9 600 (d) 9 970,8

EXERCICE 4 (6 points).
Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_{\text{T}}(x)$, pour x variant de $0,25$ à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe Γ fournie en **annexe** est la représentation graphique de la fonction C_{T} sur l'intervalle $[0,25\,;5]$.
La tangente à Γ au point $A(1\,;1)$ est horizontale.

PARTIE A

1. (a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0,25\,;5]$ par $R(x) = 1,5x$.
   Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

   (b) Tracer, sur le graphique fourni en **annexe**, le segment représentant graphiquement la fonction R.

2. **Lectures graphiques**
   Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement.
   On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe.
   Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.

   (a) Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.

   (b) Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.

   (c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
   À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_{T} est définie sur l'intervalle $[0,25\,;5]$ par

$$C_{\text{T}}(x) = x^2 - 2x\ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

   $$B(x) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x).$$

   Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la **partie A**.

2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0,25\,;5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2\ln(x) - 2x + 3,5$.

3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$:

x	$0,25$		1		5
$B'(x)$			$1,5$		
	y_1	↗		↘	y_2

On précise les encadrements : $0,22 < y_1 < 0,23$ et $-3,29 < y_2 < -3,28$.

(a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.
Pour la suite de l'exercice, on prendra $2,77$ *pour valeur approchée de* α.

(b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.
En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,25\,;\,5]$.
Les valeurs approchées des extremums sont attendues.

4. (a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ?
On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres.
Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

(b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

ANNEXE

Exercice 4

À rendre avec la copie