1 Activités

Activité 1

1. Construire, si c'est possible, des triangles ABC dans chacun des cas donnés par le tableau suivant où les longueurs sont données en centimètres et les angles en degrés :

Cas	AB	BC	AC	$\widehat{A}$	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
a	8	7	5			
b	13	8	4			
c	7	8				
d				45	70	60
e				50	65	
f	7		5	75		
g	6		5		50	
h	4			135	30	
i	7				35	45
j	4			80		

2. À l'aide d'un papier calque, comparer pour chaque cas votre triangle avec celui de votre voisin. Que constate-t-on ?

Activité 2

Les triangles de la figure de la présente page sont isométriques, c'est-à-dire que leurs trois côtés sont respectivement de la même longueur :

- $AB = A'B' = A''B''$
- $AC = A'C' = A''C''$
- $BC = B'C' = B''C''$

1. Conjecturer que l'on peut amener ABC en $A'B'C'$ à l'aide de transformations usuelles (symétries, rotation, translation).
2. Conjecturer que l'on peut amener ABC en $A''B''C''$ à l'aide de transformation usuelles.
3. En quoi les deux situations diffèrent-elles ?

Activité 3

Les triangles de la figure de la présente page sont semblables, c'est-à-dire que leurs trois angles sont respectivement de la même mesure :

- $\widehat{A} = \widehat{A'} = \widehat{A''}$
- $\widehat{B} = \widehat{B'} = \widehat{B''}$
- $\widehat{C} = \widehat{C'} = \widehat{C''}$

1. (a) Conjecturer que l'on peut amener ABC sur $A'B'C'$ dans une configuration de Thalès à l'aide de transformations usuelles (symétries, rotation, translation).
   (b) En déduire que les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
2. Conjecturer que l'on peut amener ABC sur $A''B''C''$ dans une configuration de Thalès à l'aide de transformations usuelles. Que peut-on en déduire ?
3. En quoi les deux situations diffèrent-elles ?

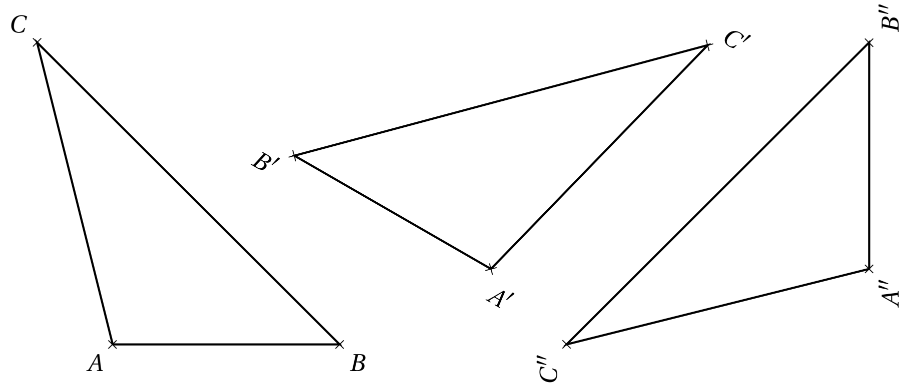


Fig. 1 – Figure de l'activité 2

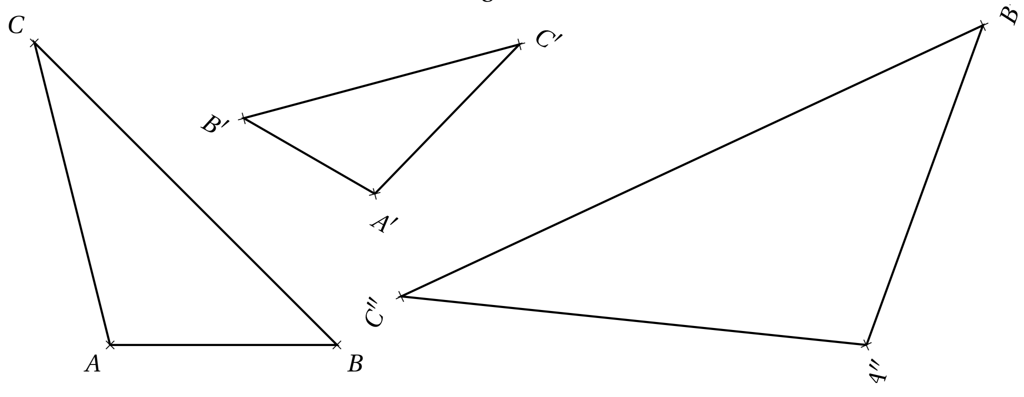


Fig. 2 – Figure de l'activité 3

2 Bilan et compléments

2.1 Triangles semblables

Définition 1

Deux triangles sont dits semblables *s'ils ont les mesures de leurs angles égales deux à deux.*
On dit parfois qu'ils ont même forme.

Remarque. L'expression « deux à deux » signifie qu'un des angles de l'un est égal à un des angles de l'autre, un autre angle de l'un est égale à un autre angle de l'autre et le dernier angle de l'un est égal au dernier angle de l'autre.

Propriété 1

Si deux triangles ont deux angles *de mesures égales deux à deux, alors ils sont semblables.*

Démonstration. La somme des angles d'un triangles étant égale à 180 degrés, s'ils ont deux angles de mesures égales, alors leurs troisièmes angles sont aussi de mesures égales. □

Remarque. Grâce à cette propriété, il suffit de démontrer que deux triangles ont deux mesures d'angles égales deux à deux pour prouver qu'ils sont semblables.

Propriété 2

Soit deux triangles.

- *Si ces deux triangles sont semblables, alors ils ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.*
- *Si ces deux triangles ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles, alors ils sont semblables.*

On appelle k le coefficient de proprotionalité.

Démonstration.

- On a vu en activité, dans un cas particulier, que lorsque deux triangles avaient leurs angles égaux deux à deux, on pouvait par des isométries les « mettre » dans une configuration de THALÈS. On admettra que c'est vrai dans le cas général. Or dans une configuration de THALÈS, les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles.
- On admettra que la réciproque est aussi vraie.

□

Propriété 3

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre des côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors ils sont semblables.

Démonstration. Là encore, on admettra qu'on peut généraliser à partir d'un cas particulier. Ainsi si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre des côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors, une fois « mis » dans une configuration de THALÈS, on peut appliquer la réciproque de THALÈS, à savoir : si les longueurs sont proportionnelles, alors les droites sont parallèles. Et donc les angles des triangles, qui sont des angles correspondants, sont égaux deux à deux. □

Propriété 4

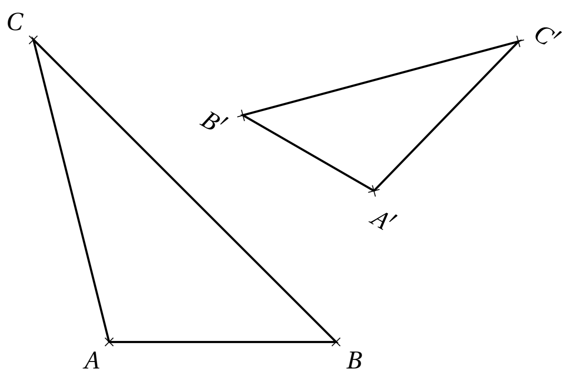
Soit deux triangles semblables et k le coefficient de proportionnalité par lequel il faut multiplier les longueurs du premier pour obtenir les longueurs du second. Alors il suffit de multiplier l'aire du premier par k^2 pour obtenir l'aire du second.

On l'admettra.

RÉSUMÉ

Avec les conventions du dessin ci-contre, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si on a une des conditions suivantes :

- $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$ ou
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$ ou
- $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k \end{cases}$



2.2 Triangles isométriques

Définition 2
Deux triangles sont dits isométriques *s'ils ont les longueurs de leurs côtés égales deux à deux.*
On dit parfois qu'ils sont superposables.

Propriété 5
Si deux triangles sont isométriques alors ils sont semblables.

Démonstration. Les longueurs sont proportionnelles, le coefficient de proportionalité étant égal à 1. ☐

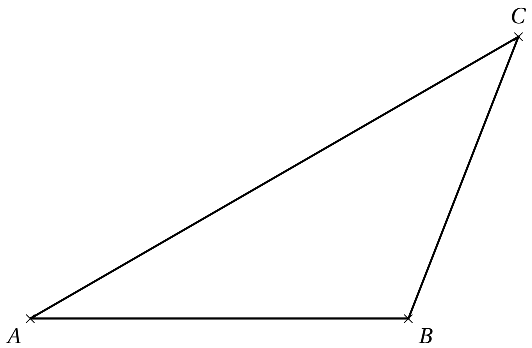
Remarque. La réciproque n'est pas vraie.

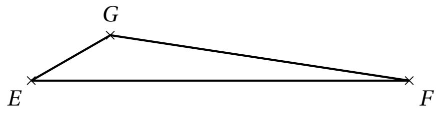
On a aussi des triangles isométriques dans les deux cas suivants (on l'admettra) :

Propriété 6
Si deux triangles ont un angle de même mesure **compris entre** *deux côtés de longueurs égales deux à deux, alors ils sont isométriques.*

Remarque. Les positions relatives de l'angle et des longueurs égales sont très importantes. On peut avoir deux triangles ayant un angle de même mesure et deux côtés de longueurs égales deux à deux, sans qu'ils soient isométriques, si jamais l'angle n'est pas compris entre les deux longueurs égales.

Exemple. Sur le schéma ci-dessous, on a $AB = EF = 5$, $GF = BC = 4$ et $\widehat{A} = \widehat{E} = 30$ et pourtant les triangles ne sont clairement pas isométriques. Ceci est dû au fait que les angles égaux ne sont pas compris entre les longueurs égales deux à deux.



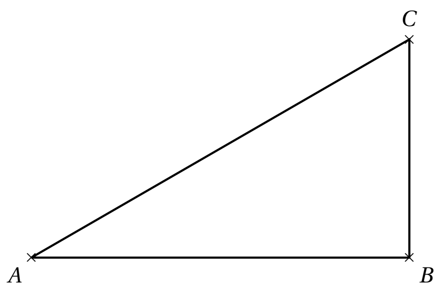


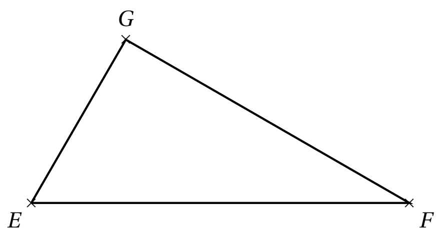
Si, par contre, on avait eu $\widehat{B} = \widehat{F} = 30$, alors les triangles auraient été isométriques.

Propriété 7
Si deux triangles ont un côté de même mesure **compris entre** *deux angles de mesures égales deux à deux, alors ils sont isométriques.*

Remarque. Là encore, les positions relatives des angles et des côtés égaux sont d'une extrême importance. Si le côté de même mesure n'est pas compris entre les deux angles égaux, on n'a pas isométrie.

Exemple. Sur le schéma ci-dessous, on a $AB = EF = 5$, $\widehat{C} = \widehat{E} = 60$ et $\widehat{A} = \widehat{F} = 30$ et pourtant les triangles ne sont clairement pas isométriques. Ceci est dû au fait que les longueurs égales ne sont pas compris entre les angles égaux deux à deux.





Si, par contre, on avait eu $AC = EF = 5$, alors les triangles auraient été isométriques.

RÉSUMÉ

Avec les conventions du dessin ci-contre, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont isométriques si on a une des conditions suivantes :

- $\left\{\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right.$ ou
- $\left\{\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AB = A'B' \\ AC = A'C' \end{array}\right.$ ou
- $\left\{\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right.$