Devoir surveillé n° 3

Généralités sur les fonctions – Probabilités conditionnelles

EXERCICE 1 (7 points)**.**
Dans une région imaginaire, en septembre, la probabilité qu'il pleuve chaque jour est $\frac{3}{5}$.
Leïla habite cette région et elle n'arrive pas toujours à l'heure à son travail, particulièrement lorsqu'il pleut. Plus précisément :

- S'il ne pleut pas, il y a 80 % de chance que Leïla arrive à l'heure à son travail ;
- S'il pleut, il y a 50 % de chance que Leïla arrive à l'heure à son travail.

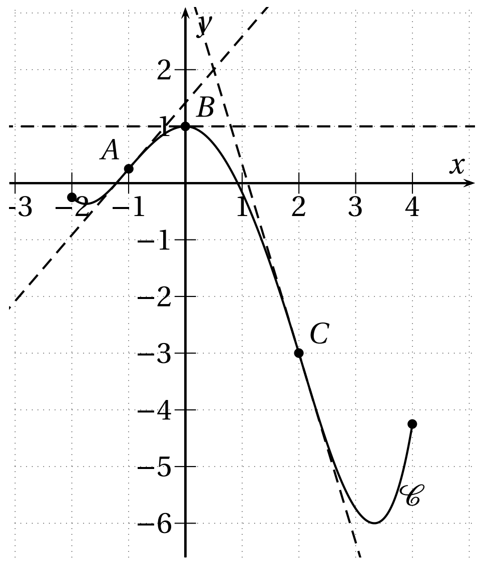
On définit les événements suivants :
P : « Il pleut ce jour » H : « Leïla arrive à l'heure à son travail aujourd'hui »
Les résultats seront arrondis au besoin au centième.

1. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation aléatoire.
2. (a) Déterminer la probabilité de l'événement « il pleut et Leïla arrive à l'heure ».
   (b) Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{P} \cap H$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que la probabilité que Leïla arrive à l'heure ce jour est égale à 0,68.
4. Leïla est arrivé à l'heure aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ?
5. (a) Sur trois jours de travail consécutifs, déterminer la probabilité que Leïla arrive à l'heure au moins une fois.
   (b) **Question bonus (hors barème) :** Il y avait 20 jours ouvrés cette année en septembre, c'est-à-dire 20 jours où Leïla travaillait. Déterminer la probabilité que Leïla soit arrivée à l'heure 15 fois.

EXERCICE 2 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, il y a une seule réponse exacte.
Recopier le numéro de la question et la réponse choisie sur votre copie.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

Dans le repère ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ représente une fois f deux fois dérivable sur $[-2;4]$ ainsi que ses tangentes en certains points.



1. f est convexe sur l'intervalle :
   a. $[-0,5;1]$ **b.** $[-2;0]$ **c.** $[2;4]$
2. La courbe $\mathscr{C}$ admet :
   a. un point d'inflexion **b.** deux points d'inflexion **c.** trois point d'inflexion
3. Sur $[-2;0]$, la fonction f' :
   a. est croissante **b.** est décroissante **c.** change de variation
4. $f''(x) \leqslant 0$ pour tout réel x de l'intervalle :
   a. $[-0,5;1]$ **b.** $[-2;0]$ **c.** $[2;4]$

EXERCICE 3 (9 points).

La fonction f est définie sur $[0\,;6]$ par $f(x) = -4x^3 + 24x^2 - 21x - 9$.

Partie A : Étude mathématique

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ et dresser son tableau de variations.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{3}{2}\right)$.
   (b) Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[3{,}5\,;6]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. (a) Montrer que $f''(x) = -24x + 48$.
   (b) Étudier la convexité de f sur $[0\,;6]$.
   (c) En déduire que la courbe de f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

Partie B : Application économique

Pour une production comprise entre 0 et 600 objets, le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus, en centaines d'unités, est modélisé par $f(x)$.

Les réponses aux questions ci-dessous seront arrondies, si besoin, à l'unité pour les productions et à l'euro pour les bénéfices.

1. Déterminer pour quelle production l'entreprise est rentable.
2. Déterminer pour quelle production l'entreprise réalise un bénéfice maximum et déterminer ce bénéfice maximum.
3. Déterminer pour quelle production la croissance du bénéfice ralentit.