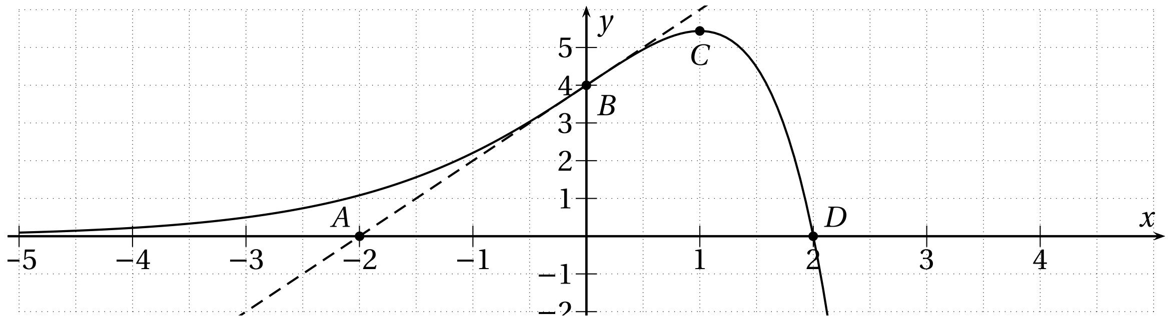
Devoir surveillé n° 2

Généralités sur les fonctions – Suites

EXERCICE 1.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on donne sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous.

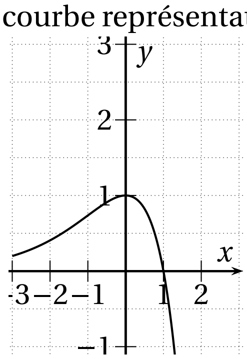


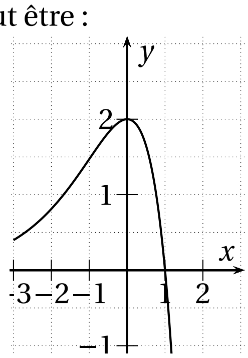
On sait que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $B\,(0\ 4)$ et $C\,(1\,;\alpha)$, où $\alpha \approx 5,44$, et coupe l'axe des abscisses en un unique point $D\,(2\,;0)$. Par ailleurs la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en B passe par $A\,(-2\,;0)$ et la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en C est parallèle à l'axe des abscisses.

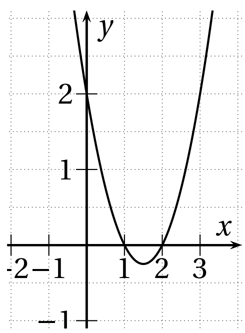
On utilisera les informations de l'énoncé et celles lues sur la figure pour répondre aux questions.

Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte.
Recopier sur votre copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. $f'(0)$ est égal à :
   (a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) 4
2. $f'(x)$ est strictement positif sur :
   (a) $\mathbb{R}$ (b) $]-\infty\,;2[$ (c) $]-\infty\,;1[$
3. Une équation de la tangente à la courbe au point B est :
   (a) $y = 2x+4$ (b) $y = x+4$ (c) $y = -2x+4$
4. Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 1$:
   (a) admet une solution (b) admet deux solutions (c) n'admet aucune solution
5. Une courbe représentative de f' peut être :

(a) 

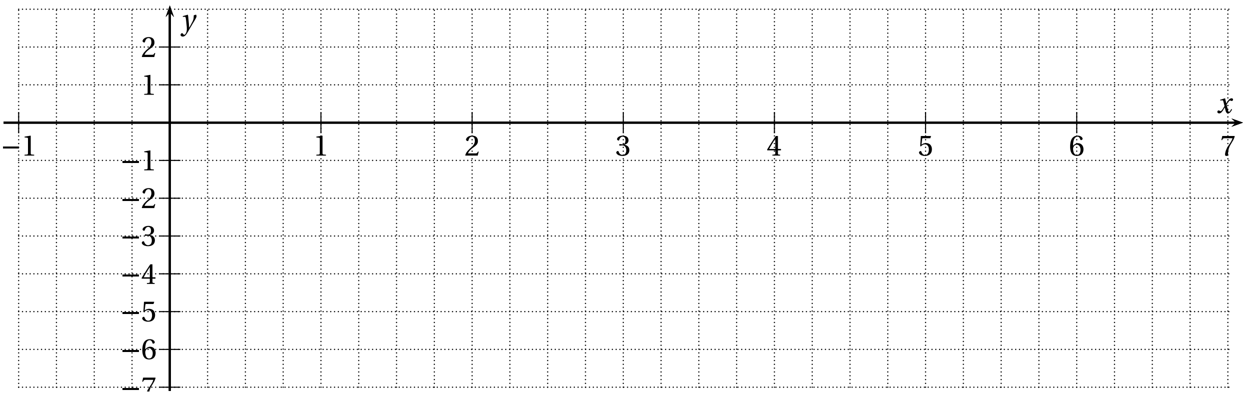
(b) 

(c) 

EXERCICE 2.

La fonction f est définie sur $[0;5]$ par $f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2x+4 & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \end{cases}$

1. Tracer la courbe de f dans le repère ci-dessous.
2. La fonction est-elle continue sur $[0;5]$? *Justifier.*



EXERCICE 3.

Le bénéfice d'une entreprise en milliers d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus en milliers d'unités, est modélisé par $B(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x - 20$ pour $x \in [0;10]$.

1. **Conjecture**
   Représenter la courbe de la fonction B à l'écran d'une calculatrice et conjecturer pour quelles ventes l'entreprise est rentable et pour quelle vente son bénéfice est maximal.
2. **Démonstration**
   (a) Étudier les variations de la fonction B et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[0;10]$.
   (b) Justifier que l'équation $B(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 dans $[0;10]$.
   (c) Déterminer des encadrements d'amplitude 10^{-3} de x_1 et x_2.
   (d) En déduire, à l'unité près, la quantité minimale et la quantité maximale que l'entreprise doit vendre pour que son activité soit rentable.
   (e) Quelle est la quantité d'objets à vendre pour que le bénéfice soit maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

EXERCICE 4.

L'année 2007, un groupe de tourterelles comptait 1 000 têtes.
On a remarqué que, d'une année sur l'autre, 20 % des individus de cette population mourraient mais qu'en même temps 100 jeunes tourterelles naîssaient.
On appelle t_n le nombre d'individus dans ce groupe à l'année $(2007+n)$.
On a donc $t_0 = 1\,000$.

1. Combien de tourterelles comportera ce groupe en 2008 et en 2009 ?
2. Justifier que $t_{n+1} = 0,8\,t_n + 100$.
3. On pose $v_n = t_n - 500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que $t_n = 500 \times 0,8^n + 500$.
   (c) Déterminer le nombre de tourterelles en 2017.
   (d) Ce groupe de tourterelles est-il destinée à s'éteindre ? *Justifier.*