

Devoir maison n°3

Suites arithmétiques et géométriques

À rendre pour le vendredi 24 octobre

PROBLÈME 3.1.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, $\forall n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. (a) Montrer que $u_n = \frac{w_n + t_n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

PROBLÈME 3.2.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n + 36}{-u_n - 5} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Calculer v_0, v_1 et v_2 .
Que peut-on conjecturer sur la nature de (v_n) ?
 - (b) Démontrer la conjecture.
 - (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n .
 - (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
 - (e) Étudier la monotonie de (u_n) .
 - (f) Calculer u_{20} .