Devoir surveillé n°1

Second degré – Vecteurs

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.* *La qualité de la rédaction et de la présentation entrera pour une part importante dans la notation de la copie.* *Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 30 points).*

EXERCICE 1 (8 points)**.**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation : $x^2 - 2x - 1 = 0$.
2. Déterminer le signe de l'expression : $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.
3. (a) Résoudre l'inéquation : $2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.
   (b) Résoudre l'inéquation :
   $$\frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^2 + 5x - 6} < 0$$

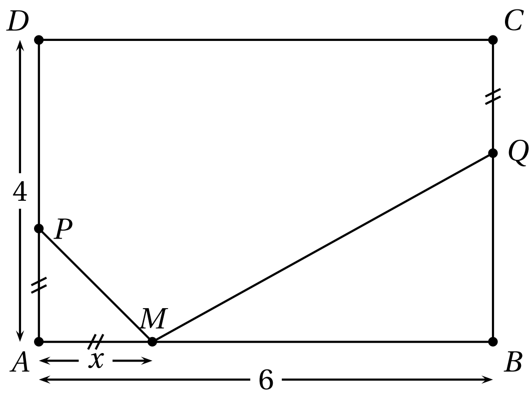
EXERCICE 2 (5 points)**.**
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques respectives dans un même repère.

1. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. (a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

EXERCICE 3 (3 points)**.**
Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 4$.
$M \in [AB]$, $P \in [AD]$ et $Q \in [BC]$ tels que $AM = AP = CQ$.
On construit les deux triangles AMP et MBQ.
On pose $AM = x$ et on appelle $f(x)$ la somme des aires des triangles AMP et MBQ.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3. (a) Justifier que f admet un minimum.
   (b) Déterminer la valeur de x rendant l'aire totale minimale.
   (c) Donner la valeur exacte de cette aire minimale.

EXERCICE 4 (3 points)**.**
On considère l'algorithme ci-contre.

1. Que renvoie l'algorithme pour $x = 4$?
2. Cet algorithme calcule l'image d'une certaine fonction. Laquelle ?
3. Quelle fonction obtiendrait-on en permutant les lignes 4 et 5 ?

```
1  ENTREE
2     LIRE x
3  INSTRUCTIONS
4     x PREND LA VALEUR x+3
5     x PREND LA VALEUR x^2
6     x PREND LA VALEUR 5x
7  SORTIE
8     AFFICHER x
```

EXERCICE 5 (5,5 points)**.**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.
ABC est un triangle quelconque.
Les points D, E, F, G, et H sont définis par :

- $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

1. Sur l'annexe, construire les points D, E, F, G, et H.
2. Montrer que E est le milieu de $[DF]$.
3. Exprimer $\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 6 (5,5 points)**.**
Sur l'annexe, $ABCD$ est un parallélogramme.
E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.
F est le point tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

1. Construire E et F.
2. Montrer que $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires.
   Que cela signifie-t-il pour les points C, E et F ?

EXERCICE 7 (Exercice bonus, hors barème)**.**
Soit $\mathscr{P}$ la fonction polynôme définie pour tout x par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$.

1. Montrer que 2 est une racine de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$ pour tout x.
3. Factoriser au maximum $f(x)$. *On attend un produit de facteurs du premier degré.*
4. Résoudre l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.

Annexe

Figure de l'exercice 5

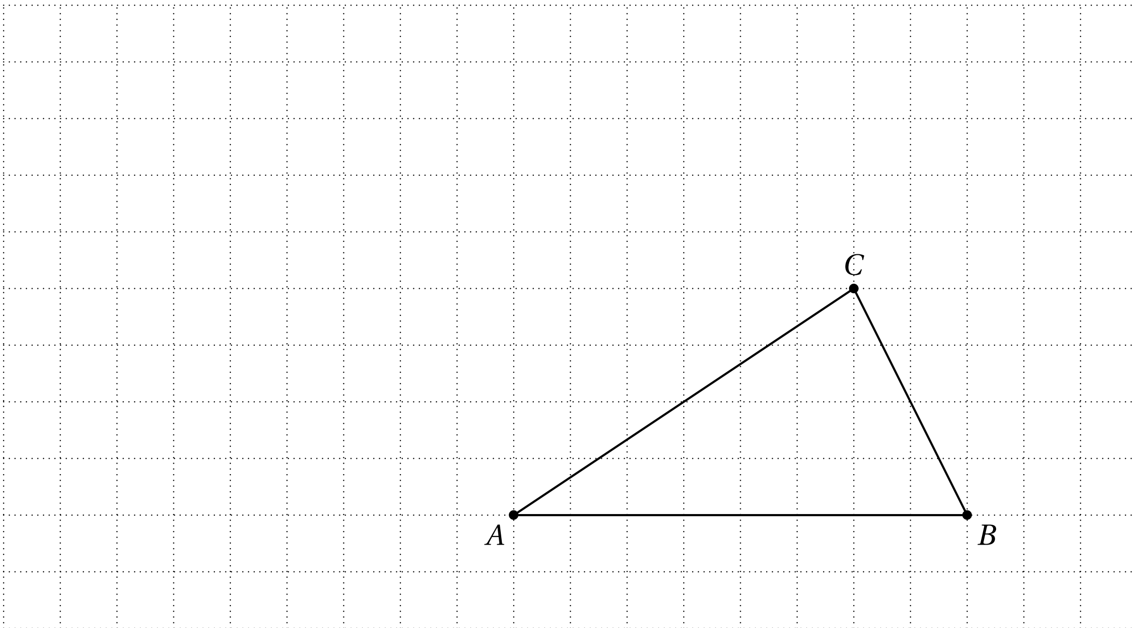


Figure de l'exercice 6