

ENSEMBLES DE NOMBRES

1 Activités

ACTIVITÉ 1

Nombres et mesure

1. Repérer les différents nombres rencontrés dans le chapitre précédent (*Géométrie dans l'espace*) et regrouper ceux qui se ressemblent.
2. Quels types de nombres que vous connaissez n'a-t-on pas rencontré? Pourquoi?

ACTIVITÉ 2

Générer les entiers naturels

Les nombres considérés dans cette activité sont des entiers naturels (0, 1, 2, etc.).

$40 = 8 \times 5$: on dit que 40 est généré par multiplication et par les entiers 8 et 5.

Mais $40 = 2 \times 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; donc 40 est généré par 2, 4 et 5, mais aussi par 2 et 5.

Remarquons que $40 = 1 \times 40$, donc que 40 est généré par 1 et lui-même.

1. Déterminer le plus petit ensemble d'entiers naturels permettant de générer par multiplication tous les entiers de 2 à 50.
Exemple : Pour générer par multiplication tous les entiers de 2 à 10, il suffit des entiers 2, 3, 5, 7 car $2 = 2$; $3 = 3$; $4 = 2 \times 2$; $5 = 5$; $6 = 2 \times 3$; $7 = 7$; $8 = 2 \times 2 \times 2$; $9 = 3 \times 3$ et $10 = 2 \times 5$.
2. On appelle nombres composés les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme de produits d'entiers supérieurs ou égaux à 2.
Considérer un nombre composé entre 2 et 50.
Écrire ce nombre sous la forme d'un produit d'entiers naturels différents de 1 qui comporte le plus grand nombre de facteurs possibles. Que constate-t-on?
Exemple : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$.
3. Caractériser tous les nombres, différents de 1, de la liste établie à la première question (qu'ont-ils tous en commun?).

2 Ensembles de nombres

2.1 Définitions

- L'ensemble des entiers *naturels* est l'ensemble $\{0; 1; 2; \dots\}$. On le note $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers *relatifs* est l'ensemble $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$. On le note $\mathbb{Z}$.
- Un *nombre décimal* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ où p est un entier et n un entier naturel.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.
- Un *nombre rationnel* est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- À chaque point d'une droite dotée d'un repère, on peut associer un nombre x appelée *abscisse* de ce point.
Ces nombres sont appelés des nombres réels et l'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

2.2 Exemples

- $0,4 \notin \mathbb{N}$, $0,4 \notin \mathbb{Z}$, $0,4 \in \mathbb{D}$ car $0,4$ peut s'écrire $\frac{4}{10}$, $0,4 \in \mathbb{Q}$ pour la même raison, $0,4 \in \mathbb{R}$ car il peut être l'abscisse d'un point.
- $-13 \notin \mathbb{N}$, $-13 \in \mathbb{Z}$, $-13 \in \mathbb{D}$ car -13 peut s'écrire $\frac{-130}{10}$, $-13 \in \mathbb{Q}$ car il peut s'écrire $\frac{-13}{1}$, $-13 \in \mathbb{R}$ car il peut être l'abscisse d'un point.
- $\frac{17}{23} \notin \mathbb{N}$, $\frac{17}{23} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{17}{23} \notin \mathbb{D}$, $\frac{17}{23} \in \mathbb{Q}$, $\frac{17}{23} \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais n'est ni un entier, ni un décimal, ni un rationnel car on ne peut pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers.
- $\pi \in \mathbb{R}$ seulement pour les mêmes raisons.

2.3 Inclusions

Les exemples ci-dessus montrent que certains nombres sont dans plusieurs ensembles.

En fait on a les inclusions suivantes :

Propriété 1

- *Tout entier naturel est aussi un entier relatif, l'inverse n'étant pas vrai.*
On dit que l'ensemble des entiers naturels est inclus dans l'ensemble des entiers relatifs, et on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- *Tout entier est aussi un décimal, l'inverse n'étant pas vrai.*
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- *Tout entier et tout décimal est aussi un rationnel, l'inverse n'étant pas vrai.*
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- *Tout entier, décimal et rationnel est aussi un réel, l'inverse n'est pas vrai.*
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, et, comme $-2 \notin \mathbb{N}$, l'inverse n'est pas vrai.
- Tout entier n (naturel ou relatif) peut s'écrire $\frac{10n}{10}$ et est donc décimal (exemple : $2 = \frac{20}{10}$)
Et comme $0,4$ n'est pas un entier, l'inverse n'est pas vrai.
- Tout entier n (naturel ou relatif) peut s'écrire $\frac{n}{1}$ et est donc rationnel.
Tout décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{10^n}$ donc est aussi rationnel.
Et comme $\frac{2}{3}$ n'est ni entier, ni décimal, l'inverse n'est pas vrai.
- Tous les entiers, décimaux et rationnels peuvent être des abscisses et donc sont aussi des réels.
Et comme $\sqrt{2}$ n'est dans aucun de ces ensembles, l'inverse n'est pas vrai.

□

Au final on a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

3 Écritures de nombres

Comme on l'a vu dans les exemples du paragraphe précédent, on peut écrire un nombre de différentes façons. On va s'intéresser dans ce paragraphe à deux types d'écriture : fractionnaire et décimale.

3.1 Écriture fractionnaire

Certains nombres peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers. Cette écriture est dite fractionnaire. On peut omettre le dénominateur lorsqu'il est égal à 1.

Les nombres d'un même ensemble ont le même type d'écriture fractionnaire. Plus précisément :

Propriété 2

- Tout entier (naturel ou relatif) admet une écriture fractionnaire dont le numérateur est un entier et le dénominateur est égal à 1.
- Tout décimal admet une écriture fractionnaire $\frac{p}{10^n}$ où p entier et n entier naturel.
- Tout rationnel admet une écriture fractionnaire $\frac{p}{q}$ où p et q entiers.
- Les réels qui ne sont pas aussi des rationnels n'admettent pas d'écriture fractionnaire.

Exemple. $-2 = \frac{-2}{1}$, $9,87 = \frac{987}{100}$

Démonstration.

- Pour tout entier n , on a $n = \frac{n}{1}$
- Les deuxième et troisième points viennent de la définition des décimaux et des rationnels.
- Si un réel x peut s'écrire $\frac{p}{q}$ alors c'est aussi un rationnel.

□

Enfin on a les propriétés suivantes :

THÉORÈME 3

(admis)

Un nombre rationnel admet une écriture unique sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire telle que p et q premiers entre eux.

Propriété 4

Tout nombre rationnel écrit sous la forme d'une fraction irréductible qui est telle que la décomposition du dénominateur en produit de facteurs premiers ne comporte que des puissances de 2 ou de 5 est un nombre décimal.

Démonstration. Soit x un nombre rationnel tel que $x = \frac{p}{q}$ est une fraction irréductible et $q = 2^n \times 5^m$ avec m et n entiers.

$$\begin{aligned} \text{• Si } n > m, \text{ alors} \\ x &= \frac{p}{2^n \times 5^m} \\ &= \frac{p}{p \times 5^{n-m}} \\ &= \frac{2^n \times 5^m \times 5^{n-m}}{p \times 5^{n-m} \times 5^{n-m}} \\ &= \frac{2^n \times 5^n}{p'} \\ &= \frac{10^n}{10^m} \end{aligned}$$

Donc x est un décimal.

$$\begin{aligned} \text{• Si } n \leq m, \text{ alors} \\ x &= \frac{p}{2^n \times 5^m} \\ &= \frac{p}{p \times 2^{m-n}} \\ &= \frac{2^n \times 5^m \times 2^{m-n}}{p \times 2^{m-n} \times 2^{m-n}} \\ &= \frac{2^m \times 5^m}{p'} \\ &= \frac{10^m}{10^n} \end{aligned}$$

Donc x est un décimal.

□

3.2 Écriture décimale

Un nombre peut s'écrire de façon décimale. Cette écriture est constituée d'une partie avant la virgule, appelée *partie entière* du nombre, et d'une partie après la virgule, appelée *partie décimale* du nombre.

Les nombres d'un même ensemble ont le même type d'écriture. Plus précisément, on a :

Propriété 5

(admise)

- Tout entier (naturel ou relatif) admet une écriture décimale dont la partie décimale est constituée uniquement de 0.
- Tout décimal admet une écriture décimale finie.
- Tout rationnel admet une écriture décimale infinie avec répétition d'une séquence à partir d'un certain rang.
- Les nombres réels qui ne sont pas rationnels admettent une écriture décimale infinie sans répétition de séquence.

Exemple.

- Le nombre 2 a une partie entière égale à 2 et une partie décimale constituée uniquement de 0 (non écrite).
- Le nombre 14,56 a une partie entière égale à 14 et une partie décimale finie égale à 56.
- Le nombre $\frac{2}{3}$ peut s'écrire 0,666... Il a une partie entière égale à 0 et une partie entière infinie (indiquée par les ...) avec répétition de la séquence 6. On écrit parfois $0,\overline{6}$, le trait au-dessus du 6 signalant qu'il faut répéter le 6 à l'infini.
- Le nombre $\frac{12}{700}$ peut s'écrire 0,017142871428... Il a une partie entière égale à 0 et une partie décimale infinie avec répétition de la séquence 71428 à partir du rang 3. On peut écrire $0,01\overline{71428}$.
- Le nombre π peut s'écrire 3,1415926... Il a une partie entière égale à 3 et une partie décimale infinie sans répétition.

3.3 Bilan des écritures fractionnaires et décimales

On peut résumer les deux paragraphes précédents sous forme de tableau :

Ensemble	Exemple	Écriture fractionnaire	Écriture décimale
$\mathbb{N}$	3	$\frac{3}{1}$	3,0
$\mathbb{Z}$	-5	$-\frac{5}{1}$	-5,0
$\mathbb{D}$	-0,56	$-\frac{56}{100}$ ou $-\frac{14}{25}$ (forme réduite avec uniquement des puissances de 2 ou de 5 au dénominateur)	-0,56
$\mathbb{Q}$	$\frac{26}{39}$	$\frac{26}{39}$ ou $\frac{2}{3}$ (forme réduite avec numérateur et dénominateur premiers entre eux)	0,666... = $0,\overline{6}$ (partie décimale infinie avec répétition de séquence)
$\mathbb{R}$	π	Aucune	3,14159265.. (partie décimale infinie sans répétition de séquence)

4 Valeurs approchées

Quand le nombre a une partie décimale longue ou infinie, on utilise parfois une valeur approchée de ce nombre.

Il y a trois sortes de façon de prendre une valeur approchée.

4.1 Troncature

Définition 1

Pour effectuer la troncature d'ordre k d'un nombre écrit sous forme décimale, on conserve les k premières décimales et on supprime les décimales suivantes.

La troncature d'ordre k d'un réel a est une valeur approchée à 10^{-k} près de a .

Exemple. Pour $\sqrt{23}$, la calculatrice affiche 4,795831523.

- La troncature d'ordre 0 de $\sqrt{23}$ est 4.
- La troncature d'ordre 1 de $\sqrt{23}$ est 4,7.
- La troncature d'ordre 4 de $\sqrt{23}$ est 4,7958.

4.2 Arrondis

Définition 2

Pour arrondir à l'ordre k un nombre écrit sous forme décimale, on effectue sa troncature d'ordre k , c'est-à-dire qu'on retient k décimales, mais la dernière décimale est susceptible d'être modifiée :

- on la conserve si la décimale suivante est 0, 1, 2, 3 ou 4 ;
- on l'augmente de 1 si la décimale suivante est 5, 6, 7, 8 ou 9.

L'arrondi d'ordre k d'un réel a est une valeur approchée à 10^{-k} près de a .

Exemple. Pour $\frac{10}{7}$, la calculatrice affiche 1,428571429.

- L'arrondi d'ordre 0 de $\frac{10}{7}$ est 1.
- L'arrondi d'ordre 1 de $\frac{10}{7}$ est 1,4.
- L'arrondi d'ordre 2 de $\frac{10}{7}$ est 1,43.
- L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{10}{7}$ est 1,429.

4.3 Approximation par défaut ou par excès

Définition 3

Pour obtenir l'approximation par défaut ou par excès d'ordre k d'un nombre écrit sous forme décimale, on détermine les nombres à k décimales les plus proches de ce nombre et :

- l'approximation par excès est le plus grand des deux ;
- l'approximation par défaut est le plus petit des deux.

Les approximations décimales d'ordre k d'un réel a sont des valeurs approchées à 10^{-k} près de a .

Exemple. Pour $\sqrt{2}$, la calculatrice affiche 1,414213562.

- L'approximation décimale par défaut d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ est 1,41.
- L'approximation décimale par excès d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ est 1,42.

Remarque. Attention à l'ordre de ces deux approximations lorsque le nombre est négatif.

Exemple. Pour $-\frac{22}{7}$, la calculatrice affiche -3,142857143.

- L'approximation décimale par défaut d'ordre 3 de $-\frac{22}{7}$ est -3,142.
- L'approximation décimale par excès d'ordre 3 de $-\frac{22}{7}$ est -3,141.

En effet $-3,142 < -\frac{22}{7} < -3,141$.

5 Écriture scientifique

On s'intéresse ici aux nombres réels positifs.

Lorsque les nombres sont très grands ou très petits, il peut être peu pratique de conserver tous ses chiffres.

Exemple.

- La vitesse de la lumière est de 300 000 000 m/s. Si la lumière d'une étoile met 56 000 ans à nous parvenir, elle est située à $300000000 \times 56000 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 5298048000000000000$ m de l'observateur.
- La taille d'un virus est de l'ordre 0,00000004 m.

Ces nombres ne sont guère utilisables : il y a trop de zéros et donc un risque d'en oublier ou d'en ajouter un à chaque écriture.

On les rencontre pourtant régulièrement en science, aussi les scientifiques utilisent-ils le système de notation suivant :

Définition 4

Un nombre x en notation scientifique s'écrit sous la forme $x = a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ et p entier (naturel ou relatif).

Exemple.

- $5298048000000000000 = 5,298048 \times 10^{20}$
- $0,00000004 = 4 \times 10^{-8}$

Cette notation permet aussi de comparer facilement les nombres puisque :

Propriété 6

Soit $x = a \times 10^p$ et $x' = a' \times 10^{p'}$ deux nombres positifs.

- Si $p \neq p'$ alors x et x' sont dans le même ordre que p et p' .
- Si $p' = p$ alors x et x' sont dans le même ordre que a et a' .

Démonstration. On a $1 \leq a < 10$ donc $10^p \leq a \times 10^p < 10^{p+1}$. De même $10^{p'} \leq a' \times 10^{p'} < 10^{p'+1}$.

- Si $p < p'$, cela signifie que $p < p + 1 \leq p'$ donc que $10^p < 10^{p+1} \leq 10^{p'}$.
Alors $10^p \leq a \times 10^p < 10^{p+1} \leq 10^{p'} \leq a' \times 10^{p'} < 10^{p'+1}$.
Donc $x < x'$
- Si $p' < p$ alors $10^{p'} \leq a' \times 10^{p'} < 10^{p'+1} \leq 10^p \leq a \times 10^p < 10^{p+1}$.
Donc $x' < x$
- Si $p = p'$, on a $x = a \times 10^p$ et $x' = a' \times 10^p$, donc si $a < a'$, $x < x'$ et si $a > a'$, $x > x'$.

□

6 Nombres premiers, nombres composés

Les entiers naturels jouent un rôle important puisqu'ils interviennent dans l'écriture des entiers, des décimaux sous forme de fraction, des rationnels sous forme de fractions et de certains non rationnels comme les radicaux ($\sqrt{8}$ par exemple).

Parmi les entiers, certains ont un rôle encore plus important : les nombres premiers.

6.1 Définitions

Définition 5

- On appelle nombre premier un entier naturel différent de 1 qui possède exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.
- On appelle nombre composé un entier naturel différent de 1 et qui n'est pas premier.

Exemple.

- 2, 3, 5, 7, ... sont des nombres premiers.
- $9 = 3 \times 3$ est un nombre composé. $12 = 2 \times 6$ aussi.

THÉORÈME 7

Un entier naturel différent de 1 :

- soit est un nombre premier ;
- soit s'écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Démonstration. Cela vient de la définition de ce que sont les nombres premiers et composés. $\square$

6.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Définition 6

Si n est un nombre entier composé, l'écriture de n sous la forme d'un produit de nombres premiers est appelée décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple. $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$.
 $2^3 \times 3$ est la décomposition en facteurs premiers de 24.

6.3 Applications de la décomposition

1. Simplification des fractions.

La décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur permet de s'assurer que la fraction est entièrement simplifiée.

Exemple. $\frac{84}{66} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 11} = \frac{2 \times 7}{11} = \frac{14}{11}$

2. Plus grand commun diviseur (PGCD).

La décomposition en facteurs premiers des deux nombres permet de trouver rapidement le plus grand diviseur commun.

Exemple. $\text{PGCD}(72; 48)$?

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

Les facteurs communs sont 2, 2, 2 et 3 donc
 $\text{PGCD}(72; 48) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

3. Simplification des radicaux.

La décomposition en facteurs premiers des deux nombres permet d'extraire de la racine les carrés.

Exemple. $\sqrt{72} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2^2} \sqrt{2} \sqrt{3^2} = 2 \times \sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}$

4. Réduction au même dénominateur.

La décomposition en facteurs premiers des deux dénominateurs permet d'obtenir un dénominateur commun à deux fractions qui est relativement petit, donc plus facilement manipulable dans les calculs.

Exemple. $\frac{13}{24} = \frac{13}{2 \times 2 \times 2 \times 3}$ $\frac{11}{18} = \frac{11}{2 \times 3 \times 3}$

Pour obtenir le même dénominateur, on observe qu'il manque un facteur 3 au premier dénominateur et deux facteurs 2 au second. Donc :
 $\frac{13}{24} = \frac{13 \times 3}{24 \times 3} = \frac{39}{72}$ $\frac{11}{18} = \frac{11 \times 2 \times 2}{18 \times 2 \times 2} = \frac{44}{72}$
 On peut ensuite comparer les fractions, les additionner ou les soustraire.

7 Exercices

7.1 Nombres premiers

EXERCICE 1

Crible d'ÉRATOSTHÈNE (environ 276-194 av. J.-C.)

Trouver les nombres premiers inférieurs à 100 en éliminant, à la manière d'ÉRATOSTHÈNE, les multiples de 2 strictement plus grands que 2, puis ceux de 3 strictement plus grands que 3, etc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

EXERCICE 2

Reconnaître un nombre premier

Méthode

Pour déterminer si 89 est premier :

- On considère le début de la liste des nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; etc.
- On remarque que $\sqrt{89} < 11$ donc en examinant si 89 est divisible par les nombres premiers strictement inférieurs à 11, on obtiendra tous ses diviseurs.
En effet, si 89 est divisible par un nombre premier plus grand que 11, par exemple 13, on aurait $89 = 13 \times n$ avec n premier et $n < 11$, or on aura déjà rencontré n .
On s'arrêtera donc à 7.
- On regarde si 89 est divisible par 2, puis 3, etc. jusqu'à 7.
Si on ne trouve pas de diviseurs de 89, alors 89 est premier, si on en trouve un, il n'est pas premier.

Déterminer si les nombres suivants sont des nombres premiers et, s'ils ne le sont pas, donner leur décomposition en produit de facteurs premiers :

- 236 ;
- 251 ;
- 363 ;
- 473 ;
- 1569 ;
- 5304.

7.2 Appartenance

EXERCICE 3

Appartenance

Compléter par $\in$ ou $\notin$:

- | | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| • 3,507 $\mathbb{R}$; | • $-\frac{3}{100}$ $\mathbb{D}$; | • $\sqrt{2}$ $\mathbb{Q}$; | • $\frac{2}{\pi}$ $\mathbb{Q}$; |
| • 10^{-3} $\mathbb{Q}$; | • $\frac{1}{3}$ $\mathbb{R}$; | • $\sqrt{121}$ $\mathbb{Z}$; | • $3,14$ $\mathbb{Q}$; |
| • -10^3 $\mathbb{N}$; | • $\frac{22}{7}$ $\mathbb{D}$; | • $-\frac{21}{6}$ $\mathbb{D}$; | • $\sqrt{\pi}$ $\mathbb{D}$; |
| • 4×10^{-3} $\mathbb{N}$; | • $-\frac{22}{7}$ $\mathbb{D}$; | • 0 $\mathbb{R}$; | • $\sqrt{\sqrt{16}}$ $\mathbb{N}$. |

On justifiera sa réponse en donnant :

- sa forme entière si c'est un entier ;
- son écriture décimale finie ou son écriture de la forme $\frac{p}{10^n}$ si c'est un décimal ;
- son écriture fractionnaire irréductible si c'est un rationnel.

EXERCICE 4

Fractions

1. En décomposant en produit de facteurs premiers les numérateurs et dénominateurs des fractions suivantes, donner l'écriture irréductible de $A = \frac{450}{756}$ et $B = \frac{2695}{525}$.
Ces nombres sont-ils des décimales ?
2. Réduire ces deux fractions au même dénominateur.
3. Effectuer le calcul suivant : $\frac{2695}{525} - \frac{450}{756}$ et donner le résultat sous forme irréductible.
Le résultat est-il décimal ?

EXERCICE 5

Fractions

1. Décomposer chacun des nombres suivants en produits de facteurs premiers : 360 ; 252 ; 1755 ; 2295.
2. Donner le plus grand diviseur commun de :
360 et 252 ; 360 et 1755 ; 252 et 1755 ;
360, 252 et 1755.
3. Effectuer le calcul suivant : $\frac{360}{252} + \frac{1755}{2295}$ et donner le résultat sous forme de irréductible.
Le résultat est-il décimal ?

EXERCICE 6

Radicaux

1. Simplifier les radicaux suivants et dire à quels ensembles de nombres ils appartiennent :

$$\begin{array}{llll}
 \bullet \sqrt{27}; & \bullet \sqrt{676}; & \bullet \sqrt{\frac{28}{63}}; & \bullet \sqrt{\frac{18}{98}}; \\
 \bullet \sqrt{196}; & \bullet \sqrt{\frac{117}{52}}; & \bullet \sqrt{\frac{891}{176}}; & \bullet \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{54}}. \\
 \bullet \sqrt{245}; & & &
 \end{array}$$

2. Simplifier au maximum le nombre $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{180}}{\sqrt{125}}$.
À quels ensembles de nombres appartient-il ?

7.3 Valeurs approchées

EXERCICE 7

Troncatures, arrondis, approximations décimales

1. Compléter le tableau suivant :

x	3,0140	4,3259	5,2045	6,3171
Arrondi d'ordre 2				
Arrondi à 10^{-3}				
Troncature d'ordre 2				

2. Compléter le tableau suivant :

x	$7 + \frac{87}{33}$	$\frac{71+87}{33}$	$\frac{17}{16} - 5$	$\frac{59}{19} - 19$	$\frac{59}{17} - 17$
Approximation décimale à 10^{-3} par défaut					
Approximation décimale à 10^{-3} par excès					
Troncature à 3 décimales					
Arrondi à 10^{-3}					

3. Vrai ou faux ?

- (a) 3,1416 est l'approximation décimale par excès d'ordre 4 de π .
- (b) 3,1415 est l'approximation décimale par défaut d'ordre 4 de π .
- (c) π a pour arrondi d'ordre 2 le nombre 3,14.
- (d) π a pour arrondi d'ordre 3 le nombre décimal 3,141.

EXERCICE 8

Valeurs approchées à la calculatrice

- Soit les nombres A et B : $A = \frac{3211}{9 \times 10^7}$ et $B = 0,0000356777777778$.
Afficher à l'écran de la calculatrice le nombre A et comparer le résultat affiché au nombre B .
 - Calculer à la calculatrice $A \times 10^7 - 356$ et $B \times 10^7 - 356$, puis la différence de ces deux nombres. Comparer alors A et B .
 - Le résultat obtenu en (b) est-il compatible avec l'observation faite en (a) ? sinon comment l'expliquer ?
- Afficher sur l'écran de la calculatrice les nombres C et D tels que : $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ et $D = 2 - \sqrt{3}$.
 - Peut-on en déduire que $C = D$?
 - L'affichage de $C - D$ confirme-t-il ce résultat ?
 - Utiliser le développement de $(2 - \sqrt{3})^2$ pour comparer C et D .
- Afficher sur la calculatrice les nombres E et F tels que : $E = \frac{7 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ et $F = 11 + 5\sqrt{3}$.
 - À partir du seul affichage de E et F , peut-on en déduire que $E = F$?
- L'affichage de deux calculatrices différentes donne, pour l'une, $E - F = 0$ et, pour l'autre, $E - F = 1 \times 10^{-13}$. Pour décider de l'égalité de E et F , exprimer E , sans la calculatrice, en multipliant le numérateur et le dénominateur de E par $2 + \sqrt{3}$.
- Afficher sur l'écran de la calculatrice le nombre p tel que $p = \sqrt{9,86960440108}$ puis le nombre π .
 - Comparer ces deux affichages. Peut-on en déduire que $p = \pi$?
 - Utiliser un calcul semblable à celui de la question 1. (b) pour comparer p et π .
- On pose $a = 1,09090909091$ et $b = 0,09090909091$.
 - Calculer $a - b$ et $\sqrt{a - b}$ avec une calculatrice.
 - Obtient-on des valeurs exactes ? Justifier.
- On pose $x = 10^{-15}$.
 - Calculer $\frac{1 + x - 1}{x}$ à la main puis à la calculatrice.
 - Comment peut-on interpréter ces résultats ?

7.4 Écriture scientifique

EXERCICE 9

Sans utiliser de calculatrice donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

- $A = 227,52$;
- $B = 712,54$;
- $C = 0,00127$;
- $D = 4879,21$;
- $E = 3 \times 10^3 \times 8 \times 10^{-7}$;
- $F = \frac{45 \times 10^{-2}}{15 \times 10^{-4}}$;
- $G = 0,72 \times 10^{-5}$;
- $H = \frac{12 \times 10^{-2}}{60 \times (10^{-3})^3}$;
- $I = (3 \times 10^{-2}) \times (5 \times 10^{-3})$;
- $J = (3 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-2})$;
- $K = (3 \times 10^{-2}) + (5 \times 10^{-3})$;
- $L = 3 \times (5 \times 10^{-2})$;
- $M = 3 \times (5 + 10^{-2})$;
- $N = 3 \times (5 \times 10^{-2})^2$.

EXERCICE 10

On donne les longueurs suivantes :

		En m (écriture scientifique)
Épaisseur d'une bande magnétique	20 μm	
Diamètre d'une macro molécule	20 $\text{\AA}$	
Diamètre d'un cheveu	$5 \times 10^{-3} \text{ cm}$	
Longueur d'onde : rayon X	0,2 $\text{\AA}$	
Longueur d'onde : rayon γ	200 fm	
Diamètre de 100 électrons	1 fm	

Compléter le tableau.

On rappelle que 1 $\mu\text{m} = 1$ micromètre = 10^{-6} m, 1 $\text{\AA} = 1$ angström = 10^{-10} m et 1 fm = 1 femtomètre = 10^{-15} m.

EXERCICE 11

Infiniment grand

On donne ci-dessous les distances moyennes en km entre le soleil et les planètes de système solaire.¹

Mars	2279×10^5
Jupiter	$0,778 \times 10^9$
Vénus	$10,5 \times 10^7$
Saturne	142×10^7
Terre	1500×10^5
Neptune	45×10^8
Mercure	$5,8 \times 10^7$
Pluton	$0,06 \times 10^{11}$
Uranus	$28,6 \times 10^8$

1. Classer les planètes, de la plus éloignée du soleil à la plus proche du soleil, après avoir complété le tableau suivant :

Planète	Distance au soleil
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km
	millions de km

2. (a) Combien de fois la planète située à la plus grande distance du soleil est-elle plus éloignée du soleil que la planète la plus proche du soleil ?
- (b) Pour visualiser les distances entre le soleil et les planètes du système solaire, on place, sur une feuille de papier, un point O représentant le soleil et, sur une demi-droite d'origine O , on place le point M représentant Mercure tel que $OM = 2,5$ mm. Placer les autres planètes du système solaire sur cette demi-droite.

EXERCICE 12

Infiniment petit

Voici les tailles de différents êtres vivants :

- cellule d'une plante : 6×10^{-2} mm ;
- virus : 4×10^{-6} cm ;
- bactérie : 10^{-6} m ;
- oeuf de grenouille : 10^{-2} dm ;
- grosse protéine : 4×10^{-9} m.

1. Exprimer toutes ces longueurs en mètre, puis classer ces organismes du plus grand au plus petit.
2. Un microscope optique permet d'observer des organismes d'une taille supérieure à 2×10^{-7} m. Parmi les organismes cités précédemment, quels sont ceux que l'on peut observer à l'aide d'un microscope optique ?
3. Parmi les sous-multiples du mètres, il y a le micron (μm) et le nanomètre (nm). Sachant que $1\mu\text{m} = 10^{-6}$ m et que $1\text{nm} = 10^{-9}$ m, exprimer, à l'aide d'un nombre inférieur à 1000 et de l'unité appropriée, la taille de chacun des organismes cités précédemment.
4. Quelle devrait être la longueur d'un axe gradué si l'on voulait représenter ces organismes en fonction de leur taille, en prenant comme échelle de l'axe 1 mm pour 10^{-9} m.

¹ Pluton n'est plus considérée comme une planète depuis août 2006, mais, pour cet exercice, si.