# Mathématiques en Terminale ES

David ROBERT

2012–2013

# Sommaire

# Chapitre 1

# Suites

## Sommaire



## 1.1 Activités

**ACTIVITÉ 1.1.**
On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

| Année | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Population | 227,3 | 285 | 366,8 | 482,2 | 638,7 | 819,5 | 1011,2 |

1. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
2. Un statisticien propose de modéliser la population africaine tous les dix ans par une suite géométrique de raison $q = 1,28$. Comment justifier sa démarche ?
3. Pour tout entier $n$, on note $p_n$ la population africaine estimée par ce modèle, en million, l'année $1950+10n$. Ainsi $p_0 = 227,3$.
   (a) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles. Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec $q = 1,29$ ?
   (b) Représenter la suite sur un graphique.
   Si ce modèle reste valable dans le futur, conjecturer vers quelle valeur tendra la population africaine.
   (c) Estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 2 milliards.
   (d) Que fait l'algorithme suivant ?

```
ENTREES
   seuil
INITIALISATION
   n PREND LA VALEUR 0
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   TANT QUE u<seuil FAIRE
     u PREND LA VALEUR u*1.28
     n PREND LA VALEUR n+1
   FIN TANT QUE
   annee PREND LA VALEUR 1950+10*n
SORTIES
   AFFICHER "La population aura depasse ce seuil dans la decennie precedant"
   AFFICHER annee
```

Le programmer (sur Algobox ou sur calculatrice) et l'utiliser pour déterminer quand la population dépassera 3 milliards.

**ACTIVITÉ 1.2.**
Une usine fabrique de la peinture spéciale pour carrosserie.
À la fin du premier jour, la production est de 1 000 L. Ensuite, elle diminue chaque jour de 2 %.

1. À l'aide d'une calculatrice, conjecturer vers quelle valeur va tendre la production journalière de peinture.
2. En vous inspirant de l'algorithme de l'activité 1.1, page précédente, écrire un algorithme permettant d'obtenir au bout de combien de jours la production sera inférieure à un seuil donné et l'utiliser pour déterminer au bout de combien de jours la production sera inférieure à 10 L.

**ACTIVITÉ 1.3.**
*On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.*
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier $n$ ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note $u_n$ le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la $n$-ième case.
   (a) Calculer $u_1$, $u_2$, ..., $u_{10}$.
   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
   (c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ?
   (d) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et calculer $u_{64}$.
2. On note $S$ le nombre total de grains sur l'échiquier. Ainsi $S = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{64}$.
   (a) Exprimer $2S$ puis $2S - S$.
   (b) En déduire $S$.
3. Sachant qu'un grain de blé pèse, en moyenne, $5 \times 10^{-2}$ gramme et qu'un mètre cube de blé pèse, en moyenne, une tonne, quelles pourraient être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?
   Le Roi avait-il raison de sourire ?

**ACTIVITÉ 1.4.**
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients.
Chaque année, sa clientèle est composée de 50 % des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit $u_n$ le nombre de clients l'année $n$.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer $u_1$,$u_2$, $u_3$ et $u_4$.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer vers quelle valeur semble tendre $u_n$ lorsque $n$ devient grand.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(v_n)$ ?
   (c) En déduire l'expression de $v_n$, puis celle de $u_n$, en fonction de $n$.
   (d) Étudier la limite de la suite $(u_n)$.
   Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?

## 1.2 Suites géométriques – Rappels

*Étant des rappels, les propriétés ne seront pas (re)démontrées et les exemples seront limités.*

**Définition 1.1.** On appelle *suite géométrique* toute suite $(u_n)$ telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

$q$ est appelé *la raison* de la suite géométrique.

*Remarques.* 1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être $u_0$ sont nuls.
Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout $n$, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

**Propriété 1.1.** *Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et raison $q$. Alors, pour tout entier naturel $n$ et tout entier naturel $p$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a : $u_n = q^{n-p}u_p$*
*Et en particulier, avec $p = 0$ :*

$$u_n = q^n u_0$$

*Remarque.* Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

**Propriété 1.2.** *La suite de terme général $u_n = q^n$ est :*
- *strictement croissante si $q > 1$*
- *strictement décroissante si $0 < q < 1$*
- *ni croissante ni décroissante si $q < 0$*

## 1.3 Limite d'une suite géométrique du type $q^n$ où $q > 0$

Étudier la limite d'une suite $(u_n)$ c'est chercher ce que deviennent les nombres $u_n$ lorsque $n$ devient grand (tend vers l'infini) ; plus précisément :
- Les nombres $u_n$ finissent-ils par se rapprocher d'un nombre fixe ?
- Les nombres $u_n$ finissent-ils par dépasser n'importe quel nombre aussi grand que l'on veut ?

En Terminale ES on ne s'intéressera qu'aux suites du type $u_n = q^n$ où $q > 0$ et on a :

**Propriété 1.3.** *Soit $(u_n)$ une suite géométrique du type $u_n = q^n$.*
- *Si $0 < q < 1$ alors $\lim(q^n) = 0$*
- *Si $q = 1$ alors $\lim(q^n) = 1$*
- *Si $q > 1$ alors $\lim(q^n) = +\infty$*

On l'admettra.

## 1.4 Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 1.4.** *Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

*Preuve.* La démonstration sera faite en classe. ◊

**Propriété 1.5.** *Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et $n$ un entier naturel. Alors :*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

*Preuve.* La démonstration sera faite en classe. ◊

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

*La somme $S$ de termes* consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

## 1.5 Exercices

**EXERCICE 1.1.**
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
**Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?**

Pour chaque année à partir de 1990 on note $u_n$ le nombre d'adhérents l'année $1990+n$.

1. Quelle est la valeur de $u_0$ ? de $u_1$ ?
2. Préciser la nature de la suite $(u_n)$ puis exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Répondre à la question.

**EXERCICE 1.2.**
*On dit qu'un capital produit :*
- *des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital ;*
- *des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.*

Alexandre dispose de 4 000 € qu'il souhaite placer à la banque. Celle-ci lui propose deux placements :
- un placement $A$ à intérêts simples à un taux de 5 % par an ;
- un placement $B$ à intérêts composés à un taux de 4 % par an.

**Question : Alexandre a entendu dire que les placements à intérêts composés étaient généralement plus intéressants que les placements à intérêts simples. Cette rumeur est-elle fondée ?**

On appelle $A_n$ le montant du capital obtenu après $n$ années avec le placement $A$ et $B_n$ le montant du capital obtenu après $n$ années avec le placement $B$.

1. (a) Déterminer $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$.
   (b) Montrer que $(A_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer $A_n$ en fonction de $n$.
2. (a) Déterminer $B_0$, $B_1$, $B_2$ et $B_3$.
   (b) Montrer que $(B_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer $B_n$ en fonction de $n$.
3. (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de $A_n$ et $B_n$ jusqu'à $n = 20$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

**EXERCICE 1.3.**
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :
- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

**Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?**

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

**EXERCICE 1.4.**
On se place dans la situation de l'activité 1.2, page 2.
En fait l'usine en question stocke sa production au fur et à mesure pour honorer une commande de peinture.
**Question : L'usine pourra-t-elle honorer une commande de 15 000 L et, si oui, en combien de jours ? Et de 60 000 L ?**

1. Que fait l'algorithme suivant ?

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1000
   s PREND LA VALEUR 1000
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u*0.98
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
```

```
SORTIES
   AFFICHER s
```

2. Modifier cet algorithme afin qu'il indique si un seuil peut être atteint et, si oui, en combien de jours puis utiliser l'algorithme modifié pour répondre à la question.
3. Par le calcul, déterminer la limite de la suite $(S_n)$ où $S_n$ est la quantité de peinture stockée au bout de $n$ jours (avec $n$ entier naturel).
   Que peut-on alors conseiller aux dirigeants de l'usine ?

**EXERCICE 1.5.**
Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1$^{\text{er}}$ janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
**Question : Comment va évoluer sur le long terme le nombre d'employés dans cette entreprise ?**

Pour tout entier $n$ on appelle $u_n$ le nombre d'employés le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2005+n)$ .

1. Déterminer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$
2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer $v_0$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$.
   (b) Montrer que $(v_n)$ est géométrique.
   (c) En déduire $v_n$ en fonction de $n$.
   (d) En déduire $u_n$ en fonction de $n$.
   (e) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2027
   (f) En déduire la limite de la suite $(u_n)$. Comment l'interpréter ?

**EXERCICE 1.6.**
Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1 000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 € le premier d'un mois et ensuite 50 € le 1er de chaque mois.
**Question : Quel sera le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection ?**

On pose $c_0 = 100$ et on note $c_n$ le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux $c_1$, $c_2$ et $c_3$ du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que $(c_n)$ vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où $a$ et $b$ sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique.
   (b) En déduire $u_n$ puis $c_n$ en fonction de $n$.
4. Répondre à la question.

**EXERCICE 1.7.**
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
**Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?**

On désigne par $C_n$ le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2003+n)$ , où $n$ est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel $n$, une relation entre $C_{n+1}$ et $C_n$.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
3. Répondre à la question.

# Devoir surveillé n° 1

## Suites

**EXERCICE 1.1** (10 points)**.**
Un bail est un contrat de location entre un locataire et un propriétaire.
Traditionnellement sa durée est de trois ans.

On propose à un locataire deux types de bail :

**Contrat** $A$ **:** Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 11,5 euros pendant la durée des trois ans.

**Contrat** $B$ **:** Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 1 % pendant la durée des trois ans.

**Partie A : Étude du contrat** $A$**.**
On appelle $A_n$ le montant du loyer donné par le contrat $A$ au mois de rang $n$ pour $n$ variant de 0 à 35.

1. Justifier que $(A_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer $A_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer le loyer du dernier mois avec le contrat $A$.
4. On donne l'algorithme suivant :

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1000
   s PREND LA VALEUR 1000
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u+11,5
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

   (a) Le programmer sur sa calculatrice et indiquer ce qu'il affiche pour $n = 15$.

   (b) Interpréter ce résultat.

   On admet, pour la suite, que cet algorithme renvoit la valeur 43 245 pour $n = 35$.

**Partie B : Étude du contrat** $B$**.**
On appelle $B_n$ le montant du loyer donné par le contrat $B$ au mois de rang $n$ pour $n$ variant de 0 à 35.

1. Justifier que $(B_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer $B_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer le loyer du dernier mois avec le contrat $B$.
4. Déterminer, par le calcul, la somme totale que devra payer le locataire sur la durée des trois ans s'il choisit le contrat $B$.

**Partie C**
Déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire.

**EXERCICE 1.2** (10 points)**.**
Au 1er janvier 2010, une ville avait une population de 300 000 habitants.
Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2010 :
- le nombre d'habitants de la ville diminue chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- 5 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville du fait des mouvements migratoires.

**Partie A : Étude théorique.**
Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année $(2010+n)$.
Ainsi $u_0 = 300000$.

1. (a) Calculer $u_1$ et $u_2$.
   (b) La suite $(u_n)$ est-elle arithmétique ? *Justifier.*
   (c) La suite $(u_n)$ est-elle géométrique ? *Justifier.*
2. Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,95u_n + 5000$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n - 100000$.
   (a) Calculer $v_0$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)$ est une sutie géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (d) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 200000 \times 0,95^n + 100000$.
   (e) Déterminer $\lim u_n$.

**Partie B.**
Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1er janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville passera-t-elle sous la barre des 150 000 habitants ? *Justifier.*
3. Comment interpréter le résultat obtenu à la question 3e de la **partie A** ?

# Chapitre 2

# Généralités sur les fonctions (rappels et compléments)

## Sommaire



## 2.1 Dérivation : rappels

### 2.1.1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Compléter le tableau ci-dessous.

| **Fonction $f$** | **définie sur** | **Fonction dérivée $f'$** | **définie sur** |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ (constante) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = mx + p$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ | $f'(x) =$ | |

### 2.1.2 Opérations algébriques et dérivation

Soient $u$ et $v$ définies et dérivables sur un même intervalle $I$. Compléter le tableau ci-dessous.

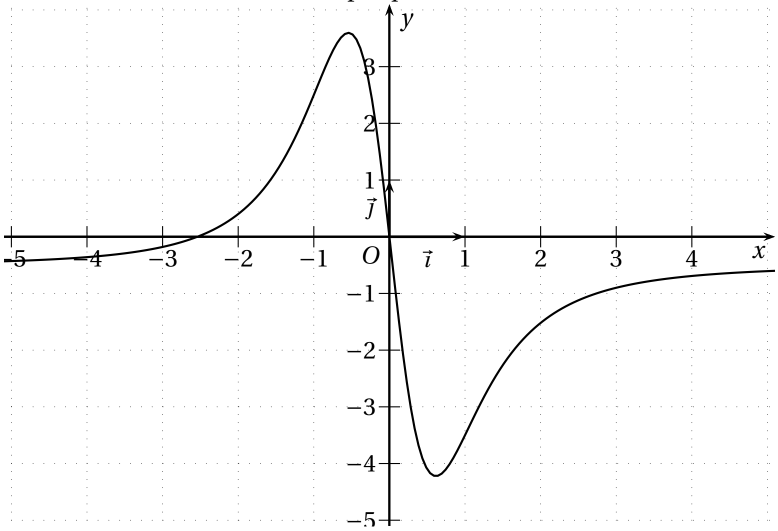
| **Fonction** | **Fonction dérivée** |
|---|---|
| $ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ | |
| $u + v$ | |
| $u \times v$ | |
| $\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | |
| $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | |

### 2.1.3 Exercices

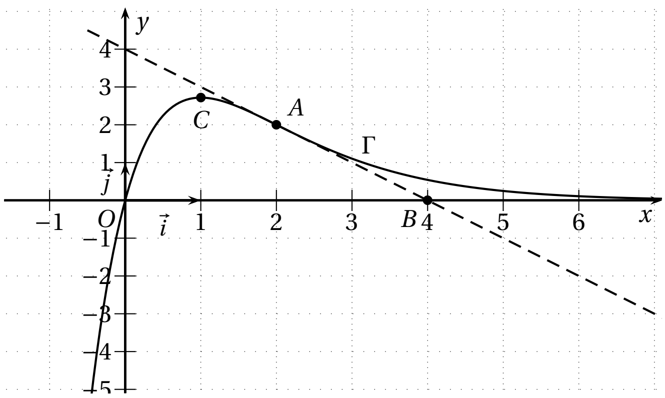
**EXERCICE 2.1.**
La courbe de la figure 2.1 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$.
Par lecture graphique :

1. Déterminer le signe de $u(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. Déterminer le signe de $u'(x)$ selon les valeurs de $x$.

FIGURE 2.1: Graphique de l'exercice 2.1




**EXERCICE 2.2.**
On a représenté ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe représentative $\Gamma$ d'une fonction $g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

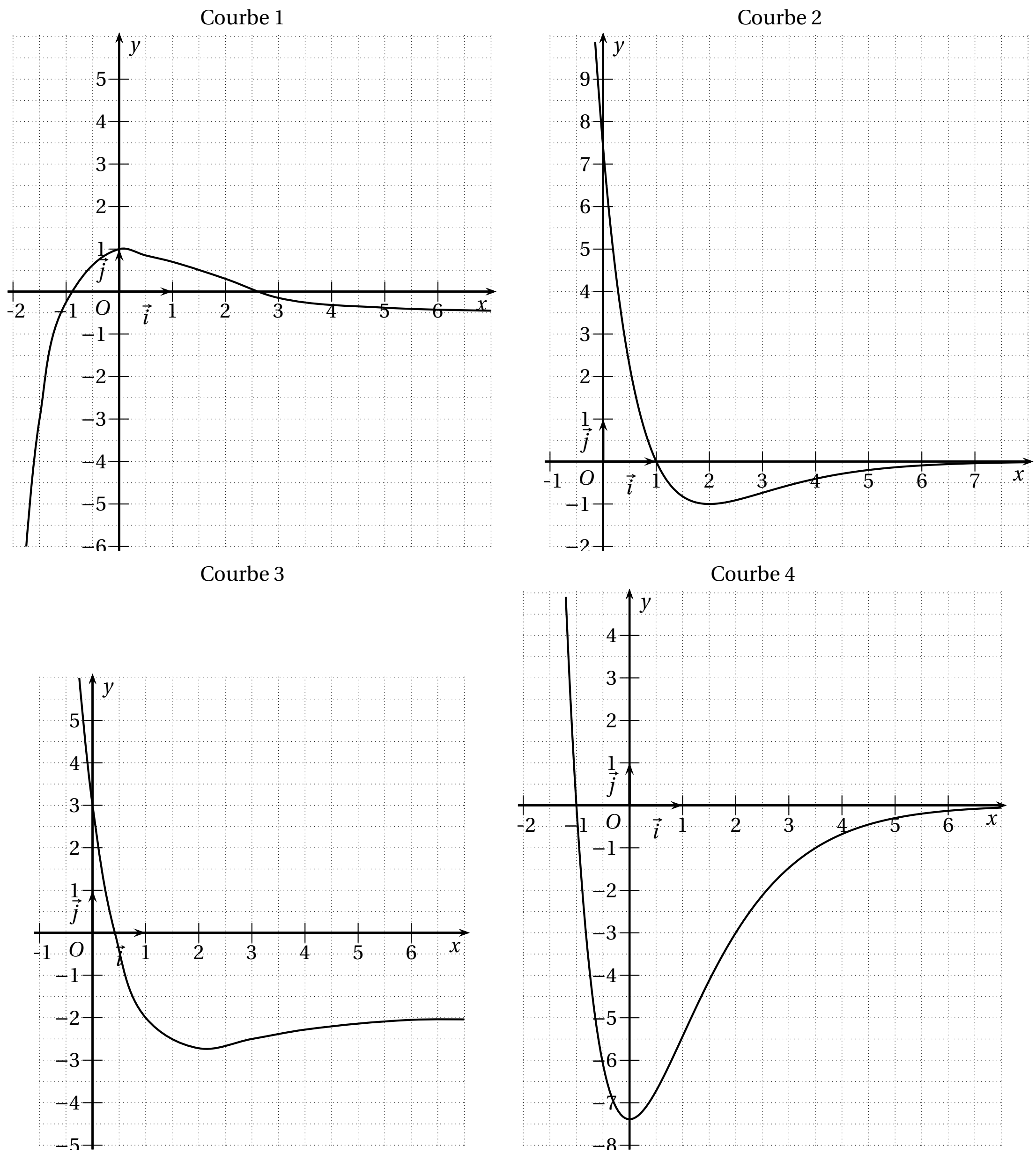



La courbe $\Gamma$ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$. La droite $(AB)$ est la tangente en $A$ à la courbe $\Gamma$. La tangente à $\Gamma$ au point $C$ d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, figure 2.2, représente la fonction dérivée $g'$ de $g$. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 2.2, représente une fonction $h$ telle que $h' = g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

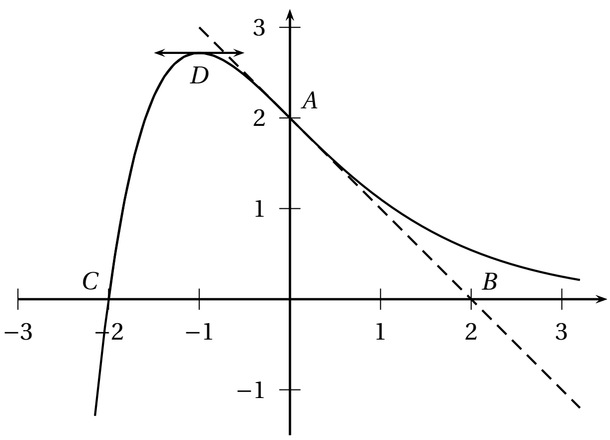
*Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.*

FIGURE 2.2: Courbes de l'exercice 2.2



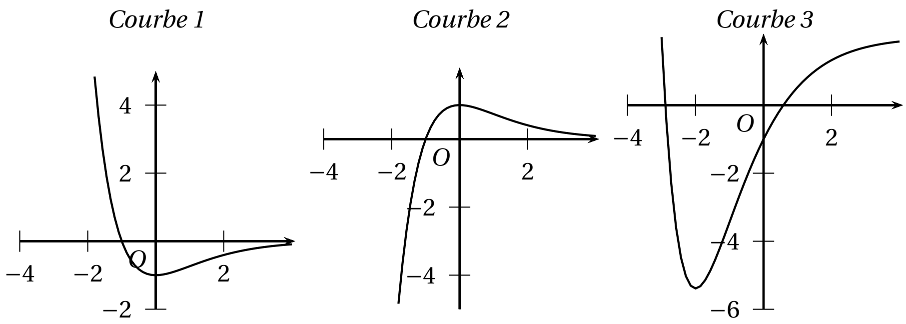

**EXERCICE 2.3.**

On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction $f$ définie sur ℝ.
La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite $(AB)$ est la tangente en $A$ à Γ. La tangente à Γ en son point $D$ d'abscisse $-1$ est parallèle à l'axe des abscisses.




1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$ ;
   - $f(x) \leqslant 2$ ;
   - $f(x) \geqslant 3$ ;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 2.3 page suivante, une représente la fonction dérivée $f'$ de $f$ et une autre représente une fonction $h$ telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer la courbe associée à la fonction $f'$ et celle qui est associée à la fonction $h$.
   *Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix*

FIGURE 2.3: Courbes de l'exercice 2.3




**EXERCICE 2.4.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de $f$.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur $-3$.

**EXERCICE 2.5.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de $f$ et dresser le tableau des variations de $f$.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) une équation de $T_0$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. (a) Dans un repère orthogonal placer les points et représenter les tangentes rencontrés dans les questions précédentes. (*unités graphiques 1 cm = 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm = 2 unités sur l'axe des ordonnées*)
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

**EXERCICE 2.6.**

$f$ est la fontion définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-11x+28}{x-3}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et on note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
   (a) Justifier que $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction $f$ (on indiquera les extremums locaux de $f$).
   (d) Soit $A$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4 et $T$ la tangente en $A$ à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la droite $T$.
2. Dans un repère :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de $f$ et $A$ ;
   (b) tracer $T$ et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$ ;
   (c) tracer $\mathscr{C}$.

## 2.2 Continuité

### 2.2.1 Activités

**ACTIVITÉ 2.1.**
Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$ :

- $f(x) = x^2$ ;
- $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ ;
- $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ .
- $l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ ;

Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.

**ACTIVITÉ 2.2.**
La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel $x$, associe l'entier relatif $n$ tel que $n \leqslant x < n+1$. On note $E$ cette fonction.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

| $x$ | $-1$ | $-0,75$ | $-0,5$ | $-0,25$ | $-0,01$ | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 0,99 | 1 | 1,25 | 1,5 | 1,75 | 1,99 | 2 | 2,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $E(x)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2. Représenter graphiquement $E$.
Que constate-t-on ?

### 2.2.2 Bilan et compléments

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou ; en d'autres termes si on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

**Propriété 2.1.** *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
*Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où leur dénominateur ne s'annule pas.*

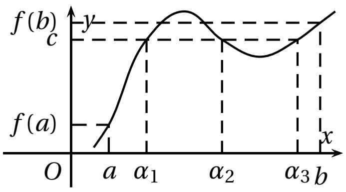
On l'admettra.

**Valeurs intermédiaires**

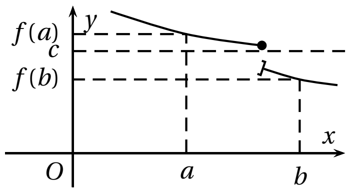
**Propriété 2.2** (des valeurs intermédiaires)**.** *Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel $c$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

On l'admettra.

**Exemples 2.1.**




$f$ est continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ a au moins une solution ; elle peut en avoir plusieurs.

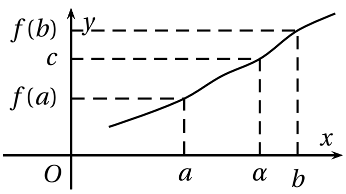



$f$ n'est pas continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

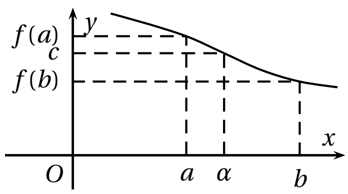
**Théorème 2.3** (des valeurs intermédiaires)**.** *Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel $c$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

On l'admettra.

**Exemples 2.2.**




$f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



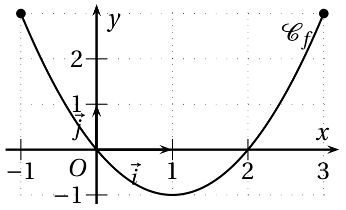

$f$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.

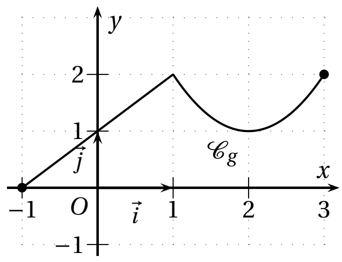
**Tableau de variation**

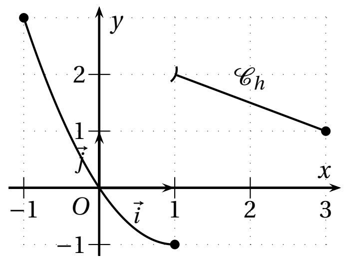
Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifient que sur l'intervalle considéré la fonction est soit *continue* ***et*** *strictement croissante*, soit *continue* ***et*** *strictement décroissante*. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur cet intervalle (voir l'exercice 2.14 page 16).

### 2.2.3 Exercices

**EXERCICE 2.7.**
Les fonctions $f$, $g$ et $h$ représentées ci-dessous par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1\,;3]$.








1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1\,;3]$ ?
2. Si la fonction n'est pas continue sur $[-1\,;3]$, donner les intervalles sur lesquels elle est continue.

**EXERCICE 2.8.**
$f$ est la fonction définie sur $[-2\,;5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2\,;1[ \\ x+p & \text{si } x \in [1\,;5] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de $f$ pour $p=2$, pour $p=1$ et pour $p=-2$.
2. $f$ est-elle continue sur $[-2\,;1[$ ? Sur $[1\,;5]$ ?
3. Comment choisir $p$ pour que $f$ soit continue sur $[-2\,;5]$ ? Tracer alors la courbe représentative de $f$.

**EXERCICE 2.9.**
$f$ est la fonction définie sur $[-2\,;3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+3 & \text{si } x \in [-2\,;2] \\ 2x+1 & \text{si } x \in ]2\,;3] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de $f$ pour $b=1$ et pour $b=-2$.
2. Comment choisir $b$ pour que $f$ soit continue sur $[-2\,;3]$ ? Tracer alors la courbe représentative de $f$.

**EXERCICE 2.10.**
$f$ est la fonction définie sur $[-3\,;2]$ par : $f(x) = \begin{cases} ax^2+x+2 & \text{si } x \in [-3\,;-1[ \\ x+1 & \text{si } x \in [-1\,;2] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de $f$ pour $a=1$, pour $a=0$ et pour $a=-2$.
2. Comment choisir $a$ pour que $f$ soit continue sur $[-3\,;2]$ ? Tracer alors la courbe représentative de $f$.

**EXERCICE 2.11** (Calculatrice – Algorithmique)**.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x+5$.

**Partie A.**

1. Étudier les variations de $f$.
2. Calculer $f(-2)$ et $f(-1)$.
3. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-2\,;-1]$

**Partie B. Tableau de valeur à la calculatrice.**

1. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-2$ | $-1{,}9$ | $-1{,}8$ | $-1{,}7$ | $-1{,}6$ | $-1{,}5$ | $-1{,}4$ | $-1{,}3$ | $-1{,}2$ | $-1{,}1$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | | |

2. En déduire un encadrement d'amplitude 0,1 de $\alpha$.
3. Modifier, sur votre calculatrice, le tableau de valeur afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,01 de $\alpha$.
4. Modifier, sur votre calculatrice, le tableau de valeur afin d'obtenir un encadrement d'amplitude 0,001 de $\alpha$.
   En déduire un arrondi de $\alpha$ à $10^{-2}$.

**Partie C. Un premier algorithme.**

1. Soient $a < b$ deux réels. Expliquer pourquoi $a < \alpha < b \Leftrightarrow f(a) \times f(b) < 0$.
2. Après avoir complété le premier algorithme, celui donné dans le tableau 2.1 de la présente page, indiquer ce qu'il fait.

TABLE 2.1: Premier algorithme de l'exercice 2.11

```
ENTREES
   fonction : f
   valeur de depart : a
   taille de l'encadrement : e
INITIALISATION
   b PREND LA VALEUR a+e
   p PREND LA VALEUR f(a)
   q PREND LA VALEUR f(b)
TRAITEMENT
   TANT QUE p*q>0 FAIRE
     a PREND LA VALEUR a+e
     b PREND LA VALEUR b+e
     p PREND LA VALEUR f(a)
     q PREND LA VALEUR f(b)
   FIN TANT QUE
SORTIES
   AFFICHER "alpha est compris entre"
   AFFICHER ...
   AFFICHER "et"
   AFFICHER ...
```

TABLE 2.2: Second algorithme de l'exercice 2.11

```
ENTREES
   fonction : f
   bornes de l'intervalle : a, b
   taille de l'encadrement : e
INITIALISATION
   -
TRAITEMENT
   TANT QUE b-a>e FAIRE
     m PREND LA VALEUR (a+b)/2
     p PREND LA VALEUR f(a)
     q PREND LA VALEUR f(m)
     SI p*q>0 ALORS a PREND LA VALEUR m
              SINON b PREND LA VALEUR m
     FIN SI
   FIN TANT QUE
SORTIES
   AFFICHER a, b
```

3. Le programmer (sur sa calculatrice ou sur Algobox) afin de retrouver les résultats de la partie B (*on pourra commencer par* $a = -10$ *et* $e = 1$ *pour voir l'algorithme trouver l'intervalle* $[-2\,;\,-1]$ *puis on relancera l'algorithme pour avoir plus de précision*).

**Partie D. Un second algorithme.**
Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.

1. On pose $m = \frac{a+b}{2}$.
   (a) Que représente le nombre $m$ pour l'intervalle $[a\,;\,b]$ ?
   (b) Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de même signe, à quel intervalle, plus petit que $[a\,;\,b]$ appartient $\alpha$ ?
   (c) Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes opposés, à quel intervalle, plus petit que $[a\,;\,b]$ appartient $\alpha$ ?
2. On donne un second algorithme dans le tableau 2.2 de la présente page.
   (a) Remplir les cases vides du tableau suivant en faisant tourner l'algorithme à la main avec la fonction $f(x) = x^3 + x + 5$ sur l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ pour un encadrement d'amplitude $10^{-2}$.

| Numéro de passage sur l'instruction TANT QUE | $a$ | $b$ | $b - a > e$ | $m$ | Signe de $p \times q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-2$ | $-1$ | oui | $-1{,}5$ | négatif |
| 2 | $-2$ | $-1{,}5$ | ... | ... | ... |
| 3 | | | | | |
| 4 | | | | | |
| 5 | | | | | |

   (b) Quelle condition doivent vérifier les nombres $a$ et $b$ qui ne permettront plus d'entrer dans la boucle TANT QUE ?
   (c) Expliquer pourquoi ces nombres constitueront un encadrement de $\alpha$ répondant à la question.
   (d) Chercher la définition du mot *dichotomie* et expliquer pourquoi cet algorithme est dit *par dichotomie*.

**EXERCICE 2.12.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

1. Étudier les variations de la fonction $g$.
2. (a) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
   (c) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
   (d) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.
3. Étudier les variations de $f$.

**EXERCICE 2.13.**

**Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.**

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

1. Étudier les variations de la fonction $g$.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ unique tel que $g(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.
   En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

**Partie B. Étude de la fonction $f$.**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout réel $x$, $f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{\left(2x^2+2\right)^2}$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction $f$.
3. La droite $\Delta$ est d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$.
   Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$.
4. Donner les équations des tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectviement aux points d'abscisses 1 et $-1$.
5. Représenter dans un repère (unités graphiques : 1 unité = 1 cm sur les deux axes) les droites $\Delta$, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ puis $\mathscr{C}_f$.

**EXERCICE 2.14** (Tableau de variations)**.**

*Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte*

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5; +\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

| $x$ | $-5$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | $-3$ | | | | $4$ | | |
| | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | $-5$ | ↗ | | ↘ | $-4,5$ |

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$.

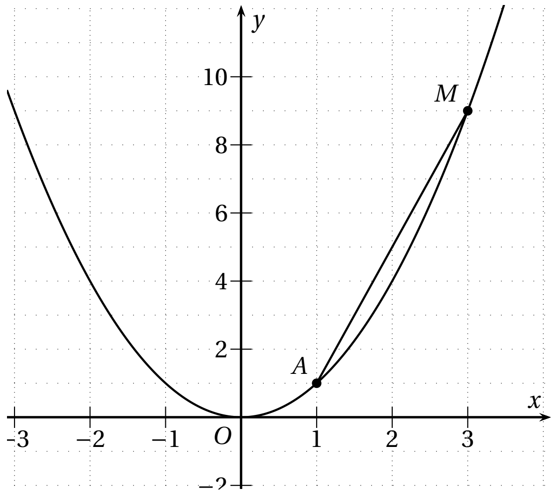
1. Sur l'intervalle $]-5; +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y = 4$
   - $y = 4(x-2)$
   - $x = 4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées (1 ; 2) est $y = 3x - 1$.
   On a :
   - $f(2) = 1$
   - $f'(1) = -1$
   - $f'(1) = 3$.
4. Sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

## 2.3 Convexité

### 2.3.1 Activités

**ACTIVITÉ 2.3** (Cas général)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (donnée sur la figure ci-contre).
On note $A$ et $M$ les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et 3.
On veut démontrer que le segment $[AM]$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

1. Donner les coordonnées des points $A$ et $M$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite $(AM)$.
3. Montrer que « $(AM)$ est au-dessus de $\mathscr{C}$ » ⇔ « $4x-3 \geqslant f(x)$ » ⇔ « $f(x)-(4x-3) \leqslant 0$ ».
4. Déterminer le signe de $f(x)-(4x-3)$ selon les valeurs de $x$.
5. Conclure




**DÉFINITION.** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *convexe* sur $I$.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *concave* sur $I$.

**ACTIVITÉ 2.4** (Cas d'une fonction dérivable)**.**
On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Le travail ci-dessous est à effectuer sur Geogebra.

1. (a) Dans la barre de saisie, entrer la fonction $f$.
   (b) Par lecture graphique déterminer sur quel intervalle la fonction est convexe et sur quel intervale elle est concave.
2. Créer un point sur la courbe de $f$.
3. Créer une tangente en $A$ à la courbe de $f$ (quatrième bouton).
4. Déplacer le point $A$ sur la courbe de $f$, là où $f$ est convexe.
   (a) Que constate-t-on quant aux positions relatives de la tangente et de la courbe ?
   (b) Quelle est la variation du coefficient directeur de la tangente (affiché dans la fenêtre algèbre) lorsque l'abscisse de $A$ augmente ?
   Que peut-on en déduire pour la dérivée de $f$ ?
5. Déplacer le point $A$ sur la courbe de $f$, là où $f$ est concave.
   (a) Que constate-t-on quant aux positions relatives de la tangente et de la courbe ?
   (b) Quelle est la variation du coefficient directeur de la tangente (affiché dans la fenêtre algèbre) lorsque l'abscisse de $A$ augmente ?
   Que peut-on en déduire pour la dérivée de $f$ ?
6. À l'aide des observations faites aux questions 4 et 5, compléter les propriétés suivantes :

   **PROPRIÉTÉ.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
   - *« $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $\mathscr{C}$ est ........................................................ de toutes ses tangentes ».*
   - *« $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $\mathscr{C}$ est ........................................................ de toutes ses tangentes ».*

   **PROPRIÉTÉ.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
   - *« $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $f'$ est ............................................................................ ».*
   - *« $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $f'$ est ............................................................................ ».*
7. Que peut-on dire de la position de la tangente par rapport à la courbe là où la convexité de $f$ change ?

### 2.3.2 Bilan et compléments

Conformément au programme, sauf mention d'une preuve, les propriétés seront admises.

**Convexité d'une fonction $f$ quelconque**

**Définition 2.1.** Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *convexe* sur $I$.
- Si pour tous points distincts $A$ et $B$ de la courbe $\mathscr{C}$, le segment $[AB]$ est situé au-dessous de $\mathscr{C}$ alors on dit que la fonction $f$ est *concave* sur $I$.

**Convexité d'une fonction $f$ dérivable**

**Propriété 2.4** (Convexité et tangentes)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $\mathscr{C}$ est au-dessus de toutes ses tangentes ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $\mathscr{C}$ est au-dessous de toutes ses tangentes ».*

**Propriété 2.5** (Convexité et dérivée)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable, de dérivée $f'$, sur un intervalle $I$ et dont la courbe représentative est $\mathscr{C}$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $f'$ est croissante ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $f'$ est décroissante ».*

**Convexité d'une fonction $f$ deux fois dérivable**

**Définition 2.2** (Dérivée seconde)**.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et telle que sa dérivée $f'$ est elle aussi dérivable, alors la dérivée de $f'$ est appellée *dérivée seconde de $f$* et notée $f''$.
On dira alors que $f$ est *deux fois dérivable*.

**Propriété 2.6** (Convexité et dérivée seconde)**.** *Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$. Alors :*
- *« $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $f''$ est positive ».*
- *« $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $f''$ est négative ».*

*Preuve.* On sait que « $f$ convexe sur $I$ » ⇔ « $f'$ est croissante » or « $f'$ est croissante » ⇔ « $f''$ est positive ».
De même on sait que « $f$ concave sur $I$ » ⇔ « $f'$ est décroissante » or « $f'$ est décroissante » ⇔ « $f''$ est négative ». ◇

**Point d'inflexion**

**Définition 2.3** (Point d'inflexion)**.** Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. On appelle *point d'inflexion* tout point $M$ de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe en $M$ traverse la courbe.

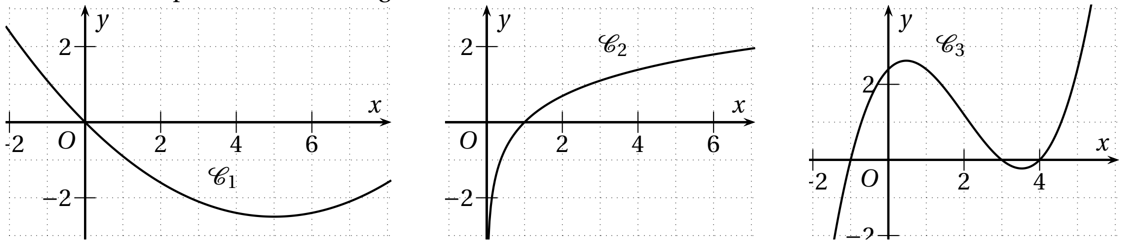
**Propriété 2.7** (Convexité et point d'inflexion)**.** *Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion.*
*Alors la convexité de $f$ change en $x_M$.*

**Propriété 2.8** (Point d'inflexion et dérivée seconde)**.** *Soit $f$ une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Alors :*
*« $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion » ⇔ « $f''$ s'annule et change de signe en $x_M$ ».*

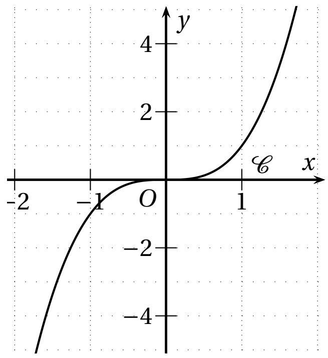
*Preuve.* « $M(x_M\,;\,y_M)$ un point d'inflexion » ⇔ « la convexité de $f$ change » ⇔ « la dérivée $f'$ change de sens de variation » ⇔ « $f''$ s'annule **et** change de signe en $x_M$ ». ◇

### 2.3.3 Exercices

**EXERCICE 2.15.**
Dans les cas suivants, par lecture graphique, étudier la convexité et l'existence de point(s) d'inflexion des fonctions dont les courbes sont représentées sur la figure ci-dessous.

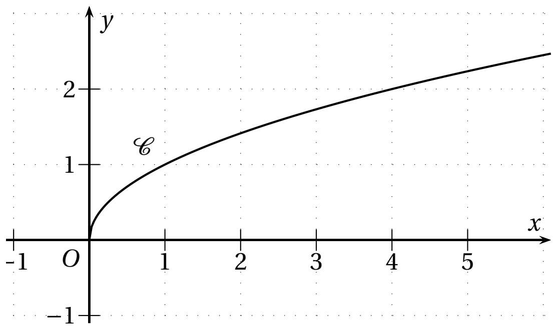



**EXERCICE 2.16** (Fonction cube)**.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).



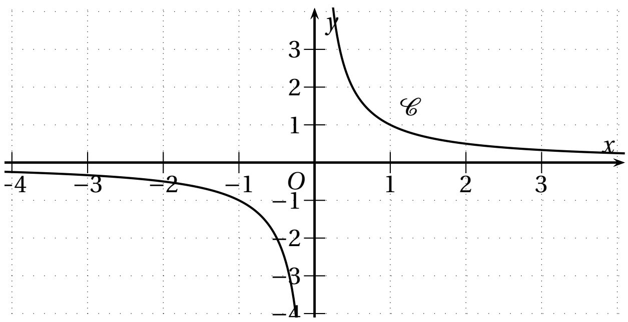

1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.

**EXERCICE 2.17** (Fonction racine)**.**
Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et dérivable sur $]0\,; +\infty[$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).




1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.

**EXERCICE 2.18** (Fonction inverse)**.**
Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée ci-contre*).

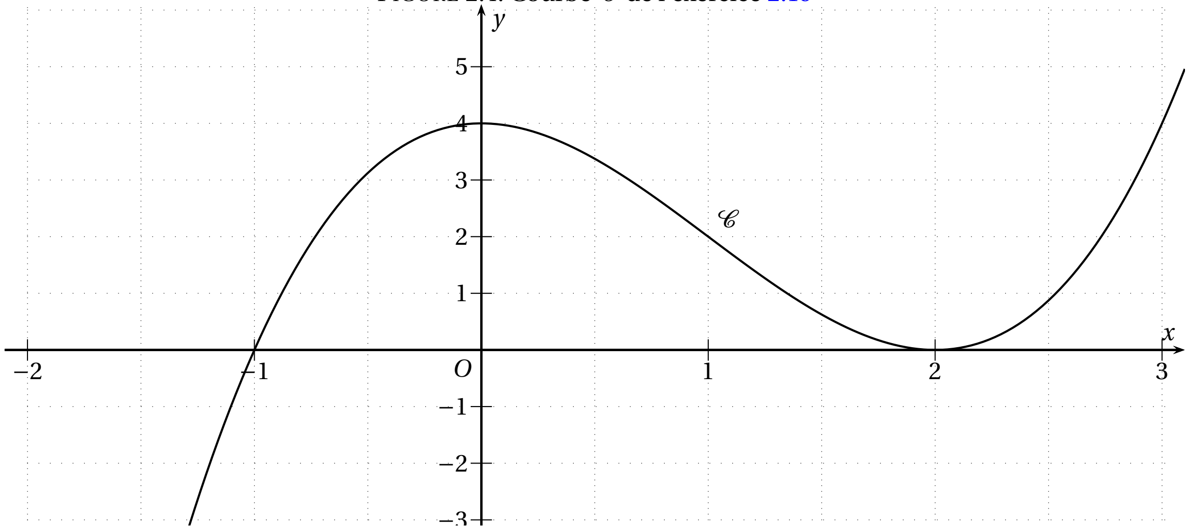



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$. L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture.
2. (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Déterminer $f''(x)$ et étudier son signe.
   (c) Étudier alors la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.

**EXERCICE 2.19.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative (*donnée sur la figure 2.4 page suivante*).

1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de $f$ et l'existence de point(s) d'inflexion.
2. Vérifier vos conjectures par le calcul.
3. Donner l'équation des tangentes au(x) point(s) d'inflexion et les tracer sur la figure.

FIGURE 2.4: Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 2.19




**EXERCICE 2.20.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction (*donnée sur la figure 2.5 page ci-contre*).

1. Par lecture graphique, étudier la convexité de la fonction $f$ selon les valeurs de $x$.
2. En déduire l'existence de trois points d'inflexion.
3. Calculer $f'(x)$, la dérivée de $f$ et vérifier que

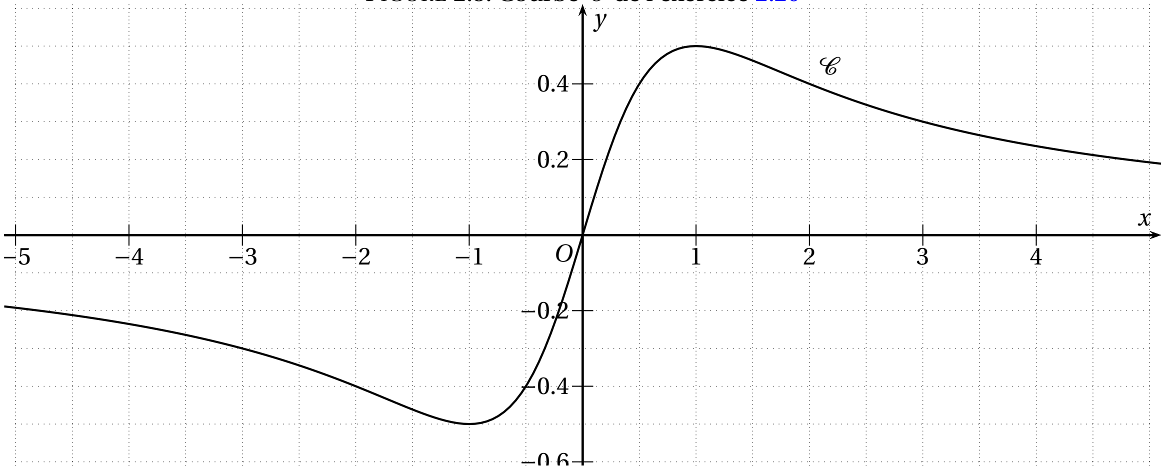
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4. Donner une équation de la tangente $T_0$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. On note $d(x) = x - f(x)$.
   (a) Vérifier que $d(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
   (b) En déduire le signe de $d(x)$ suivant les valeurs de $x$.
   (c) En déduire les positions relatives de la tangente $T_0$ et de la courbe $\mathscr{C}$.
   (d) Que peut-on en déduire pour $O$ (l'origine du repère) ?
6. Un logiciel de calcul formel affiche les données suivantes :

```
(%i4) diff((1-x^2)/(x^2+1)^2,x);
                                                 2
                          2 x        4 x (1 - x )
(%o4)                  - --------- - ------------
                            2     2       2     3
                          (x  + 1)      (x  + 1)
(%i5) factor(%o4);
                                     2
                              2 x (x  - 3)
(%o5)                         ------------
                                  2     3
                                (x  + 1)
```

   (a) Interpréter cet affichage.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet bien trois points d'inflexion dont on précisera les abscisses.

FIGURE 2.5: Courbe $\mathscr{C}$ de l'exercice 2.20




## 2.4 Problèmes plus ou moins économiques

**PROBLÈME 2.1.**
Le tableau suivant donne les 5 premières tranches du barème de l'impôt sur les grandes fortunes (ISF) pour l'année 2011, en fonction du montant du patrimoine taxable de 2010.

| Tranche du revenu | $x$ : montant du patrimoine taxable, en milliers d'euros | Taux d'imposition 2011 |
|---|---|---|
| Tranche 1 | $x \leqslant 800$ | 0 % |
| Tranche 2 | $800 < x \leqslant 1310$ | 0,55 % |
| Tranche 3 | $1310 < x \leqslant 2570$ | 0,75 % |
| Tranche 4 | $2570 < x \leqslant 4040$ | 1,00 % |
| Tranche 5 | $4040 < x \leqslant 7710$ | 1,30 % |

Exemple : Si $x = 1400$ alors :
- les 800 premiers milliers d'euros, situés dans la première tranche, sont taxés à 0 % ;
- les milliers d'euros $(1310 - 800)$ situés dans la deuxième tranche sont taxés à 0,55 % ;
- les milliers d'euros $(1400 - 1310)$ situés dans la troisième tranche sont taxés à 0,75 %.

Ainsi le montant $I$ de l'impôt est donné par $I = 800 \times \frac{0}{100} + (1310 - 800) \times \frac{0{,}55}{100} + (1400 - 1310) \times \frac{0{,}75}{100} = 3{,}480$.
On a donc : si le patrimoine est de 1,4 millions d'euros, alors le montant de l'ISF est de 3 480 €.

1. Soit $x$ le montant du patrimoine en milliers d'euros. Exprimer, pour chaque tranche d'imposition, le montant $f(x)$, en milliers d'euros, de l'impôt à payer en 2011.
2. Représenter $f$ dans un repère orthogonal d'unité 1 cm pour 1 000 milliers d'euros sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées.
3. Que remarque-t-on à chaque changement de tranche ?
4. La fonction $f$ est-elle continue ?

**PROBLÈME 2.2.**
Une entreprise fabrique des sacs de luxe en cuir. Chaque jour, elle produit un nombre $x$ de sacs, tel que $0 \leqslant x \leqslant 70$.
Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de $x$ sacs est donné par la fonction $f$ définie sur $[0 ; 70]$ par :

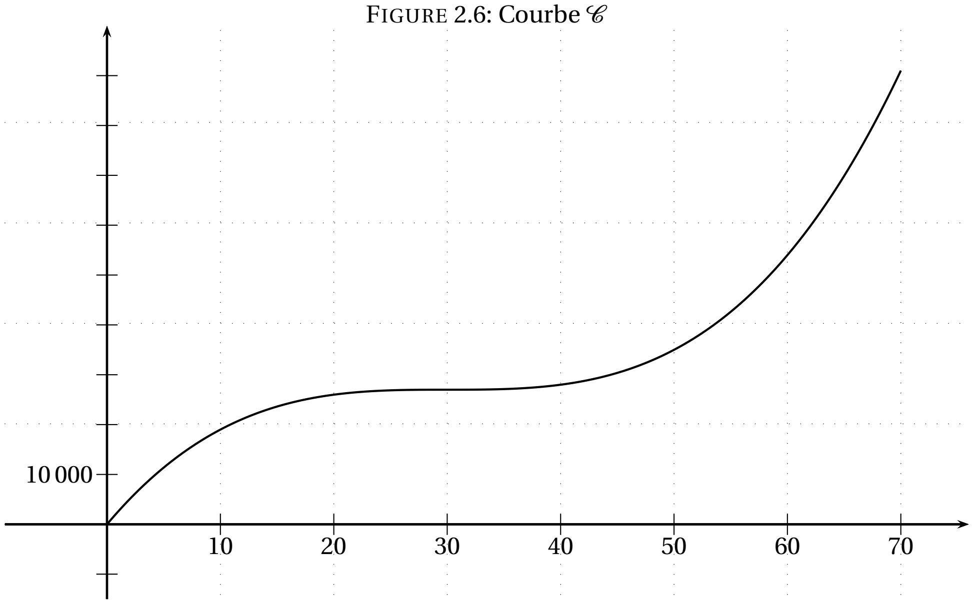
$$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ (*donnée sur la figure 2.6 page suivante*).

**Partie A. Étude de la fonction $f$.**

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f$.
2. Étudier la convexité de $f$ et montrer qu'elle admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées $(x_I ; y_I)$.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe en $I$ et représenter cette tangente dans le repère.
4. On appelle *coût marginal* le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût par rapport à la quantité produite.
   Montrer que le coût marginal $C_m$ est minimum en $x_I$.

FIGURE 2.6: Courbe $\mathscr{C}$



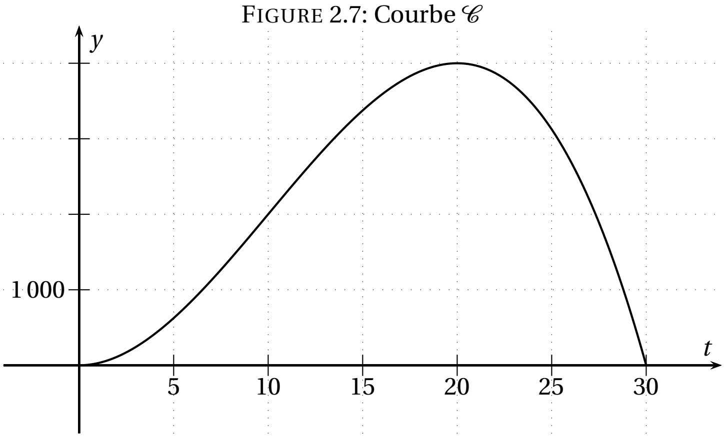

**Partie B. Étude du bénéfice.**
On suppose que tout la production est vendue au prix de 900 euros l'unités. On note $g(x)$ la recette journalière.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$.
2. Tracer sur la figure 2.6 de la présente page la courbe $\Gamma$ représentant la fonction $g$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de sacs que doit fabriquer l'entreprise pour réaliser un bénéfice positif.
4. On appelle $h$ la fonction donnant le bénéfice de l'entreprise.
   (a) Déterminer une expression de $h(x)$.
   (b) Étudier les variations de $h$ et dresser son tableau de variations en indiquant les extremums.
   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ puis la résoudre.
   (d) Déterminer le signe de $h(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (e) Conclure.

**PROBLÈME 2.3.**
Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

**Partie A. Lectures graphiques.**
La courbe $\mathscr{C}$, donnée sur la figure 2.7 de la présente page, représente le nombre de personnes malades en fonction de temps $t$, exprimé en jour depuis le début de la maladie.

FIGURE 2.7: Courbe $\mathscr{C}$




1. Donner les jours où il y a eu 2 000 malades.
2. Donner le jour où le nombre de malades est maximal ainsi que ce maximum.
3. Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

**Partie B. Étude théorique.**
Le nombre de personnes malades en fonction du temps $t$, exprimé en jour, peut-être modélisé par la fonction $f$, définie sur l'intervalle $[0;30]$, par

$$f(t) = -t^3 + 30t^2$$

La vitesse de propagation de la maladie au jour $t$ est assimilée au nombre dérivé $f'(t)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f$.
2. Déterminer le nombre de solutions sur $[0;30]$ de l'équation $f(t) = 2\,000$.
3. Un logiciel de calcul formel affiche ceci :

```
(%i1) factor(-x^3+30*x^2-2000);
                                          2
(%o1)                  - (x - 10) (x   - 20 x - 200)
```

   (a) Interpréter cet affichage.
   (b) En déduire les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(t) = 2\,000$ pour $t \in [0;30]$

4. (a) Calculer la dérivée seconde $f''(t)$.
   (b) Étudier le sens de variation de la dérivée $f'$.
   En déduire la convexité de la fonction $f$ et en donner une interprétation.
   (c) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. En donner une signification concrète.
   (d) Calculer la vitesse de propagation de la maladie le dixième jour.

**PROBLÈME 2.4.**
En Économie, on appelle :

**Coûts fixes :** les coûts indépendants du niveau d'activité ou des quantités produites dont l'entreprise doit s'acquitter pour son bon fonctionnement (loyer, coûts administratifs, etc.)

**Coût marginal :** le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût total par rapport à la quantité produite.

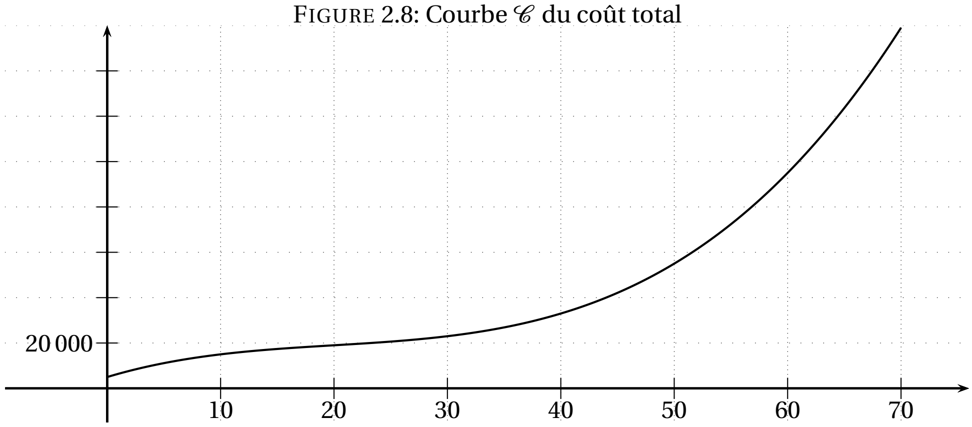
Une entreprise fabrique des objets et estime le coût total, en euros, de la production de $x$ objets en fonction de $x$ par :

$$C_T(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 5000 \text{ pour } x \in [0;70]$$

**Partie A. Étude du coût total.**

1. Déterminer le montant en euros des coûts fixes.
2. Déterminer l'expression du coût marginal $C_m$ en fonction de $x$.
3. Déterminer les variations du coût total sur $[0;70]$.
4. On donne sur la figure 2.8 de la présente page la courbe $\mathscr{C}$ représentant $C_T$.
   Quelle semble être la convexité de $C_T$ ?

FIGURE 2.8: Courbe $\mathscr{C}$ du coût total




**Partie B. Étude du coût marginal.**

1. Calculer la dérivée de $C_m$ en fonction de $x$.
2. Déterminer le sens de variation de $C_m$ sur l'intervalle $[0;70]$.

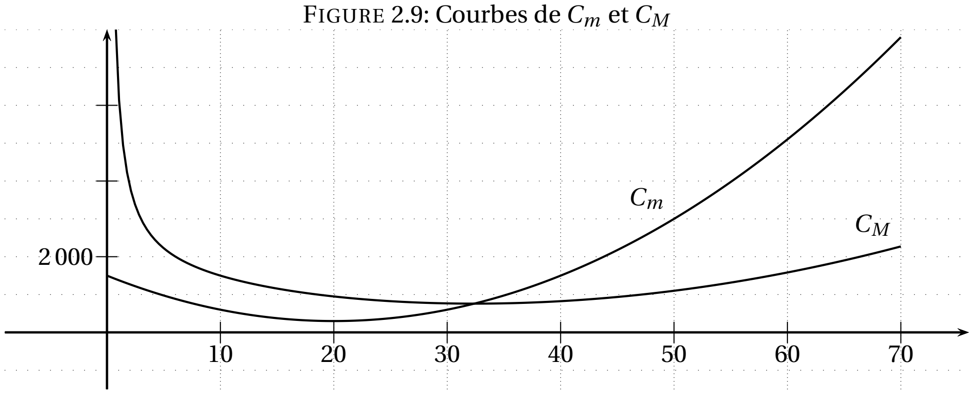
3. Justifier l'existence d'un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.
   Préciser l'abscisse de ce point.
4. (a) À partir de quelle quantité produite, chaque objet supplémentaire produit est-il plus coûteux que l'objet précédent ?
   (b) On appelle *rendement marginal* le rendement prévu pour la production d'un objet supplémentaire.
   Justifier l'affirmation suivante : « Pour une production de plus de 20 objets les rendements marginaux dans cette entreprise sont décroissants ».

**Partie C. Étude du coût moyen.**
Le coût moyen d'un objet lorsque $x$ objets sont produits est donné par

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} \text{ pour } x > 0$$

1. Quel est le coût moyen d'un objet pour 20 objets produits ?
2. Donner l'expression de $C_M(x)$.
3. (a) On note $A$ le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x$.
   Expliquer pourquoi $C_M(x)$ est le coefficient directeur de la droite $(OA)$ (où $O$ est l'origine du repère).
   (b) En déduire, par lecture graphique sur la courbe $\mathscr{C}$ qu'il existe un $x$ pour lequel $C_M(x)$ est minimal et donner la valeur de $x$ avec la précision permise par le graphique.
4. Étude d'une fonction auxiliaire.
   Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;70]$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 - 5000$.
   (a) Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation en y indiquant les valeurs extrêmes.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [20\,;70]$.
   (c) Donner un encadrement d'amplitude 1 de $\alpha$.
   (d) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
5. Recherche algébrique du minimum de $C_M(x)$.
   (a) Montrer que $C'_M(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ pour $x \in ]0\,;70]$.
   (b) En déduire le signe de $C'_M(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (c) Dresser le tableau des variations de $C_M$.
   (d) En déduire un encadrement d'amplitude 1 de la valeur de $x$ pour laquelle $C_M(x)$ est minimal.
6. On a représenté les courbes de $C_m$ et de $C_M$ dans le repère de la figure 2.9 de la présente page.
   (a) Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de $x$ tel que $C_m(x) = C_M(x)$.
   (b) Résoudre algébriquement cette équation.

FIGURE 2.9: Courbes de $C_m$ et $C_M$




7. On dit qu'une production se fait *à rendements d'échelle croissants* quand le coût moyen de production diminue, au fur et à mesure que la quantité produite augmente ; chaque unité produite entraîne alors un coût moins cher que l'unité précédente.
   Pour quelles productions d'objets peut-on dire alors que cette entreprise produit à rendements d'échelle croissants ?

# Devoir maison n°1

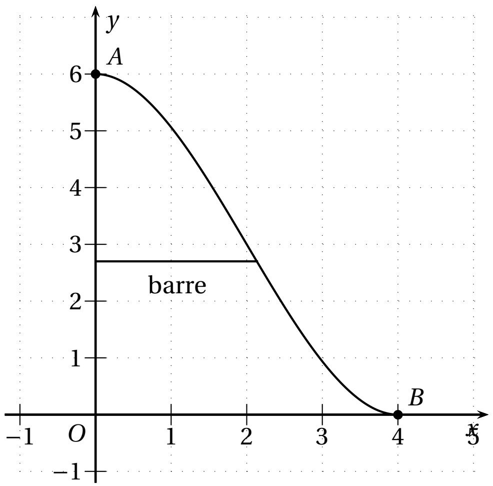
## Dérivation – Convexité

Une mairie commande une glissière pour un (grand) toboggan à une entreprise dont l'allure est schématisée sur la figure ci-dessous (les dimensions sont en mètre).

Les contraintes sont les suivantes :

- Pour des raisons de sécurité la pente de la glissière au sommet $(A)$ et au sol $(B)$ doit être horizontale.
- Pour des raisons techniques, l'entreprise ne peut fabriquer que des glissières dont la courbe est d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (b) Montrer que la première contrainte revient à $f'(x) = kx(x-4)$ où $k$ est un réel qu'on déterminera.
   (c) En déduire $b$ en fonction de $a$ et la valeur de $c$.
2. Sachant que la glissière passe par $A(0\,;6)$ et $B(4\,;0)$, en déduire l'équation de la courbe.
3. (a) Étudier la convexité de $f$ et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion.
   (b) Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale au point d'inflexion de la glissière.
   Déterminer à quelle hauteur cette barre devra être placée et quelle sera sa longueur.




# Devoir maison n°1

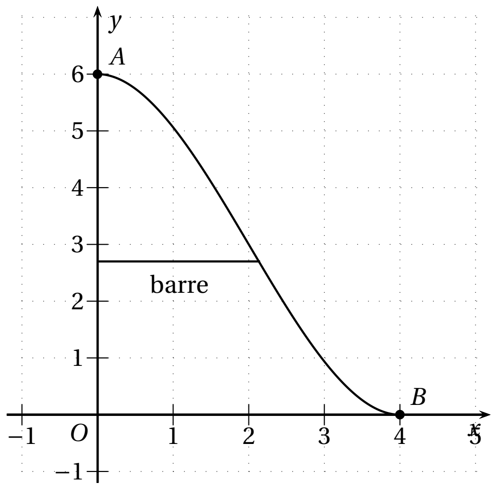
## Dérivation – Convexité

Une mairie commande une glissière pour un (grand) toboggan à une entreprise dont l'allure est schématisée sur la figure ci-dessous (les dimensions sont en mètre).

Les contraintes sont les suivantes :

- Pour des raisons de sécurité la pente de la glissière au sommet $(A)$ et au sol $(B)$ doit être horizontale.
- Pour des raisons techniques, l'entreprise ne peut fabriquer que des glissières dont la courbe est d'équation $y = f(x)$ où $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

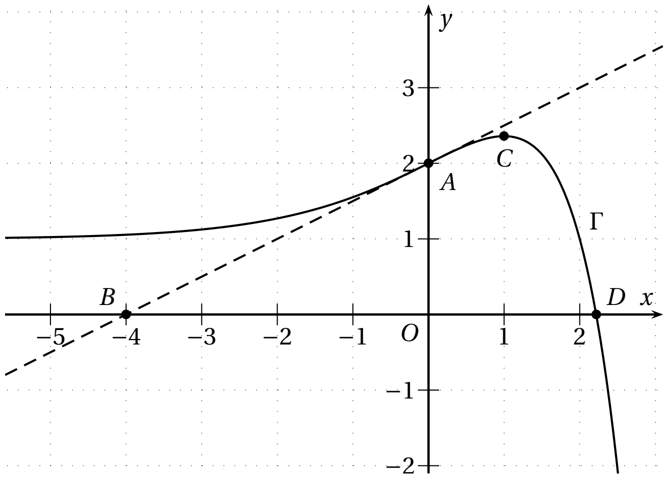
1. (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (b) Montrer que la première contrainte revient à $f'(x) = kx(x-4)$ où $k$ est un réel qu'on déterminera.
   (c) En déduire $b$ en fonction de $a$ et la valeur de $c$.
2. Sachant que la glissière passe par $A(0\,;6)$ et $B(4\,;0)$, en déduire l'équation de la courbe.
3. (a) Étudier la convexité de $f$ et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion.
   (b) Pour consolider le toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale au point d'inflexion de la glissière.
   Déterminer à quelle hauteur cette barre devra être placée et quelle sera sa longueur.



# Devoir surveillé nº 2

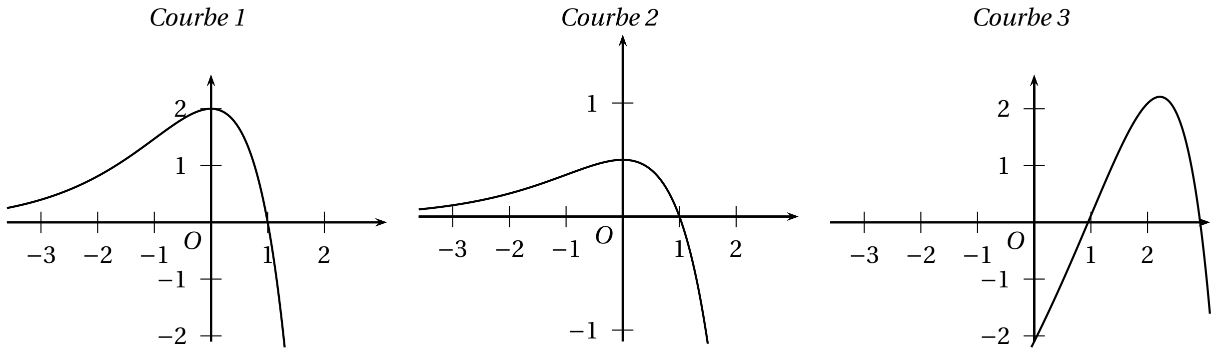
## Généralités sur les fonctions

**EXERCICE 2.1** (3,5 points)**.**
On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $A(0;2)$ et $D(2{,}22;0)$ et la droite $(AB)$, où $B(-4;0)$, est la tangente en $A$ à Γ. La tangente à Γ en son point $C$ d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.




1. Sans justifier, déterminer les valeurs de $f(0)$, de $f'(0)$ et de $f'(1)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques de la figure 2.1 de la présente page, l'une représente la fonction dérivée $f'$ de $f$. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.
3. Parmi les trois représentations graphiques de la figure 2.1 de la présente page, l'une représente une fonction $h$ telle que $h' = f$. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.

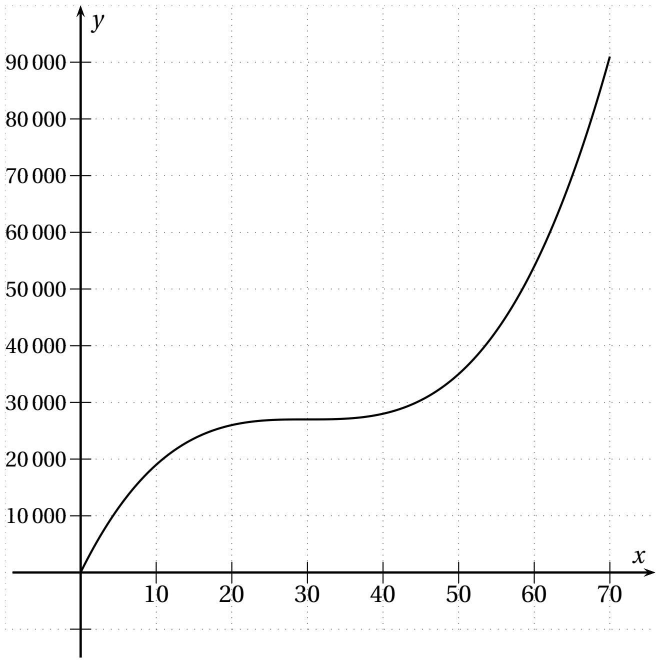
FIGURE 2.1: Courbes de l'exercice 2.1




**EXERCICE 2.2** (4,5 points)**.**
Une entreprise fabrique des sacs de luxe en cuir. Chaque jour, elle produit un nombre $x$ de sacs, tel que $0 \leqslant x \leqslant 70$.
Le coût, exprimé en euros, de la production journalière de $x$ sacs est donné par la fonction $C$ définie sur $[0;70]$ par :

$$C(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$$

Sa courbe représentative est donnée sur la figure ci-contre.




1. En justifiant par des arguments graphiques, conjecturer la convexité de $C$.
2. Étudier, par le calcul, la convexité de $C$ et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées $(x_I\,;\,y_I)$.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe en $I$ et représenter cette tangente dans le repère.
4. On appelle *coût marginal*, noté $C_m$, le coût supplémentaire induit par la dernière unité produite et on admet que le coût marginal est sensiblement égal à la dérivée du coût par rapport à la quantité produite. Expliquer pourquoi le coût marginal est minimum en $x_I$.

**EXERCICE 2.3** (12 points)**.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations (on indiquera les valeurs des extremums locaux).
2. Montrer que la courbe admet deux tangentes, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ parallèles à l'axe des abscisses.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$.
   (b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
   (c) En déduire les coordonnées du point $A$, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées de $B$, intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
5. (a) Par le calcul, étudier la convexité de $f$.
   (b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées $(x_I; y_I)$.
   (c) Déterminer une équation de $\mathscr{D}$, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en I.
6. Dans le repère de la figure 2.2 de la présente page :
   (a) placer les points correspondants aux extremums locaux;
   (b) placer les points $A$, $B$ et $I$;
   (c) tracer les tangentes $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ et $\mathscr{D}$;
   (d) tracer $\mathscr{C}$.

FIGURE 2.2: Repère de l'exercice 2.3

# Chapitre 3

# Probabilités conditionnelles

## Sommaire

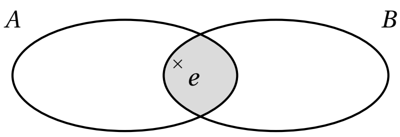


## 3.1 Rappels

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde et de Première, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

### 3.1.1 Vocabulaire des ensembles

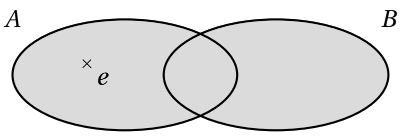
**Définition 3.1** (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui sont communs à $A$ et $B$. On la note $A \cap B$.




Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

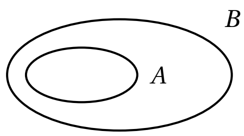
*Remarque.* Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles $A$ et $B$ sont disjoints.

**Définition 3.2** (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles $A$ et $B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans $A$ ou dans $B$. On la note $A \cup B$.




Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

**Définition 3.3** (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble $A$ est *inclus* dans un ensemble $B$ si tous les éléments de $A$ sont des éléments de $B$. On note alors $A \subset B$.

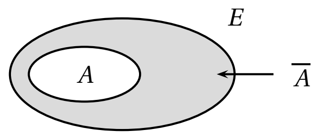



On dit alors que $A$ est une *partie* de $B$ ou que $A$ est un *sous-ensemble* de $B$.

*Remarque.* $\varnothing$ et $E$ sont toujours des parties de $E$ (partie vide et partie pleine).

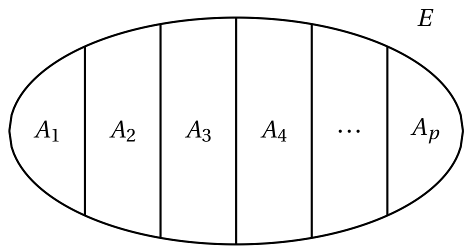
On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de $E$.

**Définition 3.4** (Complémentaire)**.** Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. Le *complémentaire* de $A$ dans $E$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$. On le note $\overline{A}$.




*Remarque.* $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

**Définition 3.5.** Des parties $A_1$, $A_2$, ..., $A_p$ d'un ensemble $E$ constituent une *partition* de $E$ si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est $E$.
Ainsi :
- Pour tous $i$ et $j$ de $\{1\,;\ldots\,;p\}$ : $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ ;
- $\coprod\limits_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.




**Définition 3.6** (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini $E$ est appelé *cardinal de* $E$. Ce nombre est noté Card$(E)$. On convient que Card$(\varnothing)= 0$.

*Remarque.* La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

### 3.1.2 Expériences aléatoires

**Issues, univers**

**Définition 3.7.** L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble $\Omega$.

À notre niveau, $\Omega$ sera toujours un ensemble fini.

**Évènements**

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme $S$ obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots\,;11\,;12\}$.
Le tableau 3.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

### 3.1.3 Probabilités

**Loi de probabilité sur un univers $\Omega$**

**Définition 3.8.** Soit $\Omega = \{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots\,;\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité $P$ sur $\Omega$, c'est associer, à chaque événement élémentaire $w_i$, des nombres $p_i \in [0\,;1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum\limits_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ;
- la probabilité d'un événement $A$, notée $p(A)$, est la somme des probabilités $p_i$ des événements élémentaires $\omega_i$ qui constituent $A$.

*Remarque.* On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

**Propriété 3.1.** *Soit $A$ et $B$ deux événements de $\Omega$, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

*Remarque.* Comme, par définition, la probabilité de l'événement certain est 1 alors la probabilité de l'événement impossible, qui est son contraire, est 0.

TABLE 3.1: Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

| Vocabulaire | Signification | Illustration |
|---|---|---|
| Événement élémentaire (noté $\omega$) | L'une des issues de la situation étudiée (un élément de $\Omega$) | Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$ |
| Événement (notation quelconque) | Ensemble de plusieurs issues | Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$<br>Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$<br>Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$<br>Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ |
| Événement impossible (noté $\varnothing$) | C'est un événement qui ne peut pas se produire | « Obtenir 13 » est un événement impossible. |
| Événement certain (noté $\Omega$) | C'est un événement qui se produira obligatoirement | « Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain. |
| Événement « A et B » (noté $A \cap B$) | Événement constitué des issues communes aux 2 événements | $A \cap B = \{6; 12\}$ |
| Événement « A ou B » (noté $A \cup B$) | Événement constitué de toutes les issues des deux événements | $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$ |
| Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$) | Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun | $C \cap D = \varnothing$ donc $C$ et $D$ sont incompatibles. Par contre, $A$ et $B$ ne le sont pas. |
| Événements contraires (l'événement contraire de $A$ se note $\overline{A}$) | Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues ($\Omega$) | Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors :<br>• $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints)<br>• $A \cup \overline{A} = \Omega$ |

**Une situation fondamentale : l'équiprobabilité**

**Définition 3.9.** Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement $A$ est la suivante :

**Propriété 3.2.** *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers $\Omega$, pour tout événement élémentaire $\omega$ et tout événement $A$ on a :*

- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

**Exemple.** On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau 3.2 page suivante résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue.
Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

| $\omega_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

TABLE 3.2: Somme de deux dés

| dé 1 \ dé 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

**Loi des grands nombres**

**Définition 3.10.** Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité $\omega$ donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres*; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

**Théorème 3.3** (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

*Remarques.* • Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.

• Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

## 3.2 Probabilités conditionnelles

### 3.2.1 La situation

On illustrera toute cette section par la situation suivante :
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de 2 004–2 005 :

| | 1 ES | 1 S | 1 L | Total |
|---|---|---|---|---|
| Femmes | 76 | 92 | 50 | 218 |
| Hommes | 43 | 76 | 13 | 132 |
| Total | 119 | 168 | 63 | 350 |

Les fiches de tous ces élèves sont rangées dans un carton et on choisit une fiche au hasard parmi les 350.
On appellera $E$, $S$, $L$, $F$ et $H$ les événements respectifs « la fiche est celle d'un élève de 1 ES », « la fiche est celle d'un élève de 1 S », « la fiche est celle d'un élève de 1 L », « la fiche est celle d'une femme » et « la fiche est celle d'un homme ».

La probabilité de choisir la fiche d'une femme de 1ES est : $p(E \cap F) = \frac{76}{350}$. La probabilité de choisir une femme est $p(F) = \frac{218}{350}$.

La probabilité de l'événement « la fiche est celle d'un élève inscrit en section ES, **sachant qu**'il est une femme » est dite probabilité conditionnelle de l'événement E sachant F et est notée $p_F(E)$.
Et on a : $p_F(E) = \frac{76}{218} = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$.

### 3.2.2 Définition

**Définition 3.11** (Probabilité conditionnelle)**.** Soient $\Omega$ un univers, $p$ une probabilité sur cet univers et $A$ et $B$ deux parties de cet univers, avec $A \neq \varnothing$.
La probabilité conditionnelle de l'événement $B$ sachant que l'événement $A$ est réalisé, notée $p_A(B)$, est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Dans le tableau 3.3 de la présente page on a calculé les probabilités conditionnelles des différentes sections connaissant le sexe.

TABLE 3.3: Distribution des probabilités conditionnelles connaissant le sexe

| | 1 ES | 1 L | 1 S | Total |
|---|---|---|---|---|
| Femmes | $\frac{76}{218}$ | $\frac{50}{218}$ | $\frac{92}{218}$ | $\frac{218}{218} = 1$ |
| Hommes | $\frac{43}{132}$ | $\frac{13}{132}$ | $\frac{76}{132}$ | 1 |
| Ensemble | $\frac{119}{350}$ | $\frac{63}{350}$ | $\frac{168}{350}$ | 1 |

**Propriété 3.4** (Formule des probabilités composées)**.** *Soient* $\Omega$ *un univers, $p$ une probabilité sur cet univers et $A$ et $B$ deux parties non vides de cet univers. Alors :*

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

*Preuve.* $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ d'une part. $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ d'autre part. ♢

Avec notre exemple on a :
- $p(E \cap F) = p_F(E) \times p(F) = \frac{76}{218} \times \frac{218}{350} = \frac{76}{350}$ ;
- $p(E \cap F) = p_E(F) \times p(E) = \frac{76}{119} \times \frac{119}{350} = \frac{76}{350}$.

### 3.2.3 Formule des probabilités totales

**Propriété 3.5** (Formule des probabilités totales)**.** *Soient* $\Omega$ *un univers, $p$ une probabilité sur cet univers et $B$ une partie non vide de cet univers et $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ formant une partition de* $\Omega$ *(voir la définition 3.5 page 30). Alors :*

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_m \cap B)$$

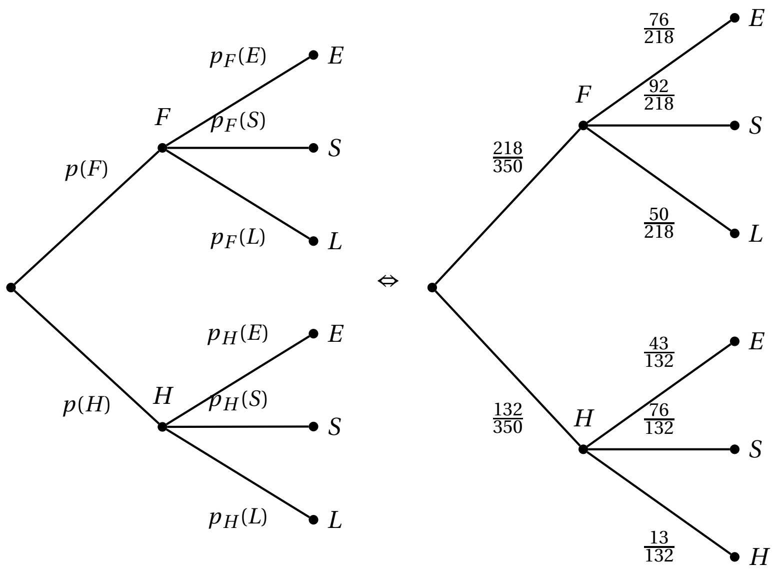
On l'admettra.
Avec notre exemple :
- $E$, $S$, et $L$ forment une partition de l'univers car $E \cup S \cup L = \Omega$ (à eux trois ils regroupent toutes les possibilités) et $E \cap S = \varnothing$, $E \cap L = \varnothing$ et $S \cap L = \varnothing$ (ils sont disjoints).
  Alors $p(F) = p(E \cap F) + p(S \cap F) + p(L \cap F) = \frac{76}{350} + \frac{92}{350} + \frac{50}{350} = \frac{218}{350}$.
- $F$ et $H$ forment eux aussi une partition de l'univers. Alors $p(E) = p(F \cap E) + p(H \cap E) = \frac{76}{350} + \frac{43}{350} = \frac{119}{350}$

### 3.2.4 Arbre pondéré

En terminale ES l'utilisation de ces formules est souvent facilitée par un ou plusieurs arbres pondérés où :
- la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

Sur la figure 3.1 page suivante sont représentés les deux arbres correspondant à la situation de notre exemple.

FIGURE 3.1: Arbre 1 de la situation de départ




$p(F\cap E) = p(F)\times p_F(E) = \frac{218}{350}\times\frac{76}{218} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap S) = p(F)\times p_F(S) = \frac{218}{350}\times\frac{92}{218} = \frac{95}{350}$

$p(F\cap L) = p(F)\times p_F(L) = \frac{218}{350}\times\frac{50}{218} = \frac{50}{350}$

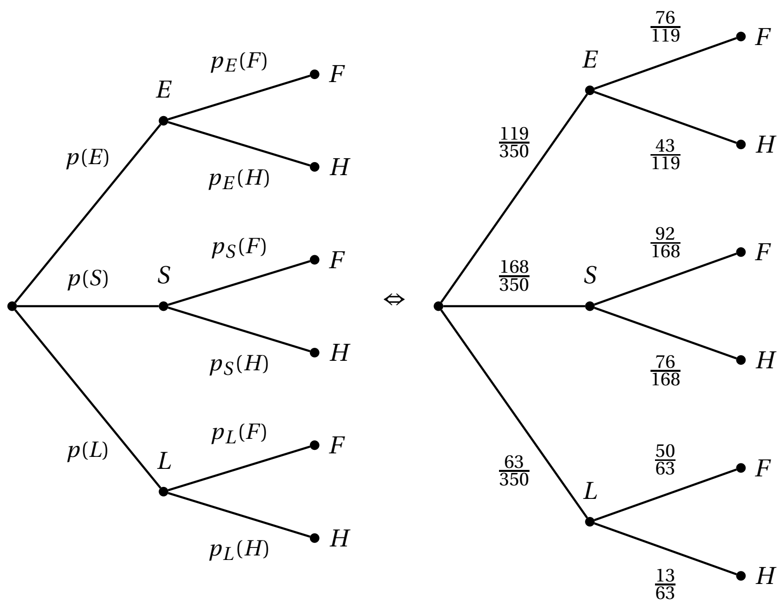
$p(H\cap E) = p(H)\times p_H(E) = \frac{132}{350}\times\frac{43}{132} = \frac{43}{350}$

$p(H\cap S) = p(H)\times p_H(S) = \frac{132}{350}\times\frac{76}{132} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap L) = p(H)\times p_H(L) = \frac{132}{350}\times\frac{13}{132} = \frac{13}{350}$

Enfin : $p(E) = p(F\cap E)+p(H\cap E) = \frac{76}{350}+\frac{43}{350} = \frac{119}{350}$ $\quad p(S) = p(F\cap S)+p(H\cap S) = \frac{92}{350}+\frac{76}{350} = \frac{168}{350}$
$p(L) = p(F\cap L)+p(H\cap L) = \frac{50}{350}+\frac{13}{350} = \frac{63}{350}$.

FIGURE 3.2: Arbre 2 de la situation de départ




$p(F\cap E) = p(E)\times p_E(F) = \frac{119}{350}\times\frac{76}{119} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap E) = p(E)\times p_E(H) = \frac{119}{350}\times\frac{43}{119} = \frac{43}{350}$

$p(F\cap S) = p(S)\times p_S(F) = \frac{168}{350}\times\frac{92}{168} = \frac{92}{350}$

$p(H\cap S) = p(S)\times p_S(H) = \frac{168}{350}\times\frac{76}{168} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap L) = p(L)\times p_L(F) = \frac{63}{350}\times\frac{50}{63} = \frac{50}{350}$

$p(H\cap L) = p(L)\times p_L(H) = \frac{63}{350}\times\frac{13}{63} = \frac{13}{350}$

Enfin :
$p(F) = p(F\cap E)+p(F\cap S)+p(F\cap L) = \frac{76}{350}+\frac{50}{350}+\frac{92}{350} = \frac{218}{350}$ $\quad p(H) = p(H\cap E)+p(H\cap S)+p(H\cap L) = \frac{43}{350}+\frac{76}{350}+\frac{13}{350} = \frac{132}{350}$

## 3.3 Exercices

### 3.3.1 Révisions

**Exercice 3.1.**
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

- $A$ : « obtenir un as » ;
- $P$ : « obtenir un pique ».

1. Déterminer la probabilité de $A$ et de $P$.
2. Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$ puis déterminer la probabilité de ces événements.

**Exercice 3.2.**
Deux lignes téléphoniques $A$ et $B$ arrivent à un standard.

On note :

- $E_1$ : « $A$ est occupé » ;
- $E_2$ : « $B$ est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$ ;
- $p(E_2) = 0,6$ ;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- $F$ : « la ligne $A$ est libre » ;
- $G$ : « une ligne au moins est occupée » ;
- $H$ : « une ligne au moins est libre ».

**Exercice 3.3.**
On lance $n$ dés ($n \geqslant 1$). On note $A$ l'événement « obtenir au moins un 6 ».

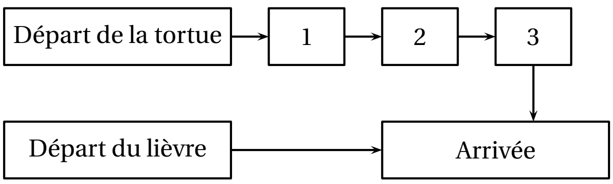
1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de $n$ la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau donné dans le tableau 3.4 de la présente page.
5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$ ?
6. Le lièvre et la tortue font la course. Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné *(voir figure 3.3 de la présente page)*.

   Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

Table 3.4: Tableau de l'exercice 3.3

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(A)$ | | | | | | | | |

Figure 3.3: Figure de l'exercice 3.3




**Exercice 3.4.**
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- $A$ : « ils auront trois filles » ;
- $B$ : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- $C$ : « ils auront au plus une fille » ;
- $D$ : « aucun des trois enfants ne sera du même sexe ».

### 3.3.2 Probabilités conditionnelles

**Classiques**

**EXERCICE 3.5.**
Une maladie $M$ affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 12 % des bovins ont la maladie $M$ ;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
   (a) pour un animal d'être malade si il réagit au test ;
   (b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

**EXERCICE 3.6** (D'après La Réunion septembre 2 006)**.**
On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60 % des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.
On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un événement est assimilée à la fréquence correspondante.
On note A l'événement « la personne choisie est abonnée au fournisseur A », B l'événement « la personne choisie est abonnée au fournisseur B » et H l'événement « la personne choisie accède à Internet par le haut débit ».

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'événement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,20$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,54$.
4. Calculer $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

**EXERCICE 3.7** (D'après Nouvelle Calédonie mars 2 007)**.**
Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut $\mathrm{D_A}$ et le défaut $\mathrm{D_B}$, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut $\mathrm{D_A}$, 37 % ont le défaut $\mathrm{D_B}$, et 10 % ont les deux défauts. On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. **Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.**
   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_A}$, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_B}$. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_A}$ sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_B}$ sont réparables. On choisit une pièce au hasard. On note A l'événement « La pièce a le défaut $\mathrm{D_A}$ », B l'événement « La pièce a le défaut $\mathrm{D_B}$ » et R l'événement « La pièce est réparable ».
   (a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie a le défaut $\mathrm{D_A}$ et est réparable ».
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie est réparable ».
   (d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut $\mathrm{D_A}$ (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

**EXERCICE 3.8.**
Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.
Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les événements F « la grille est de niveau facile », M « la grille est de niveau moyen », D « la grille est de niveau difficile », R « Pierre réussit la grille » et $\overline{\mathrm{R}}$ son événement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
   (b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
   (c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
   Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

**EXERCICE 3.9** (D'après Polynésie juin 2 007)**.**
Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.
150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :
- la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20 % des adultes
- 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10 % des enfants.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

| | Magie | Théâtre | Photo numérique | Total |
|---|---|---|---|---|
| Adultes | | | | |
| Enfants | | | | |
| Total | | | | 150 |

   On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :
   - A l'événement « la personne appelée est un adulte » ;
   - M l'événement « la personne appelée a choisi la magie » ;
   - T l'événement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
   - N l'événement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».
2. (a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?
   (b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?
   (c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre
3. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est $0,32$.
4. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

**EXERCICE 3.10** (Centres étrangers 2 007)**.**
On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.
S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.
S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
   Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* $10^{-3}$ *près.*

**Moins classiques**

**EXERCICE 3.11.**
Une maladie $M$ affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

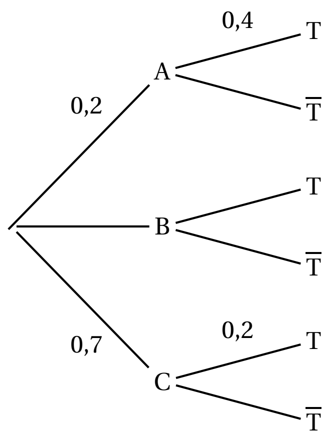
**EXERCICE 3.12.**
Une maladie $M$ affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades ;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif ;
- 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

**EXERCICE 3.13** (Trouvé sur le blog Econoclaste)**.**
Une maladie touche une personne sur mille dans la population. Il existe un test pour cette maladie, qui est valide à 99 % ; c'est-à -dire que lorsque vous êtes malade, le test est positif dans 99 % des cas, et si vous n'êtes pas malade, le test est négatif dans 99 % des cas. Il y a 1 % de « faux positifs » et 1 % de « faux négatifs ».
Une personne fait ce test, et le test est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

**EXERCICE 3.14** (D'après La Réunion juin 2 007)**.**
Soient A, B, C et T quatre événements associés à une épreuve aléatoire. On note $\overline{\text{T}}$ l'événement contraire de l'événement T. On donne l'arbre de probabilités ci-contre.




1. Donner la probabilité $p_{\text{A}}(\text{T})$ de l'événement « T sachant que A est réalisé ».
2. Calculer :
   (a) la probabilité $p(\text{B})$ de l'événement B ;
   (b) la probabilité $p_{\text{A}}\left(\overline{\text{T}}\right)$ de l'événement « non T sachant que A est réalisé » ;
   (c) la probabilité $p(\text{A}\cap\text{T})$ de l'événement « A et T ».
3. On sait que la probabilité $p(\text{T})$ de l'événement T est : $p(\text{T}) = 0,3$.
   (a) Calculer la probabilité $p_{\text{T}}(\text{A})$.
   (b) Calculer la probabilité $p_{\text{B}}(\text{T})$.

**EXERCICE 3.15.**
Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique.
Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.
On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables.
On note :
- L : l'événement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'événement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'événement « le chocolat choisi est blanc » ;
- A : l'événement « le chocolat choisi est garni de praliné » ;
- $\overline{\text{A}}$ : l'événement « le chocolat choisi est garni de caramel ».

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné.
   Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à $0,7$.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
   (a) Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
   (b) En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.

**EXERCICE 3.16** (Asie juin 2 007)**.**

**Partie A**

Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.

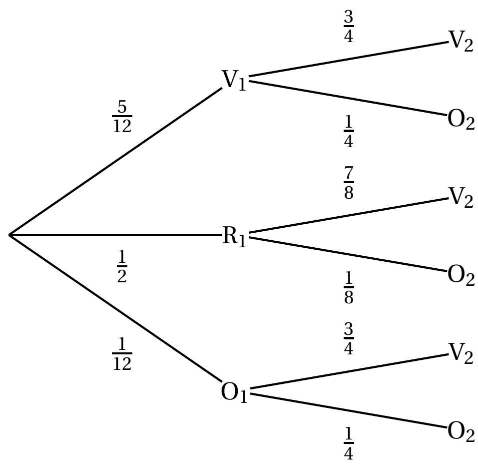
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$ à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.

On note $R_1$ l'événement « le premier feu rencontré est au rouge », $V_1$ l'événement « le premier feu rencontré est au vert » et $O_1$ l'événement « le premier feu rencontré est à l'orange » et on définit de même $R_2$, $V_2$, $O_2$ pour le deuxième feu rencontré.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

**Partie B**

On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide. L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.




1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

# Devoir surveillé n° 3

## Généralités sur les fonctions – Probabilités conditionnelles

**EXERCICE 3.1** (8 points)**.**
On a recensé ci-dessous la superficie de l'espace urbain en France, en millier de km$^2$, depuis 1954 (source INSEE).

| Années | 1954 | 1968 | 1975 | 1982 | 1990 | 1999 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Superficie urbaine | 41,1 | 68,9 | 76,3 | 83,4 | 89,6 | 100 | 118,8 |

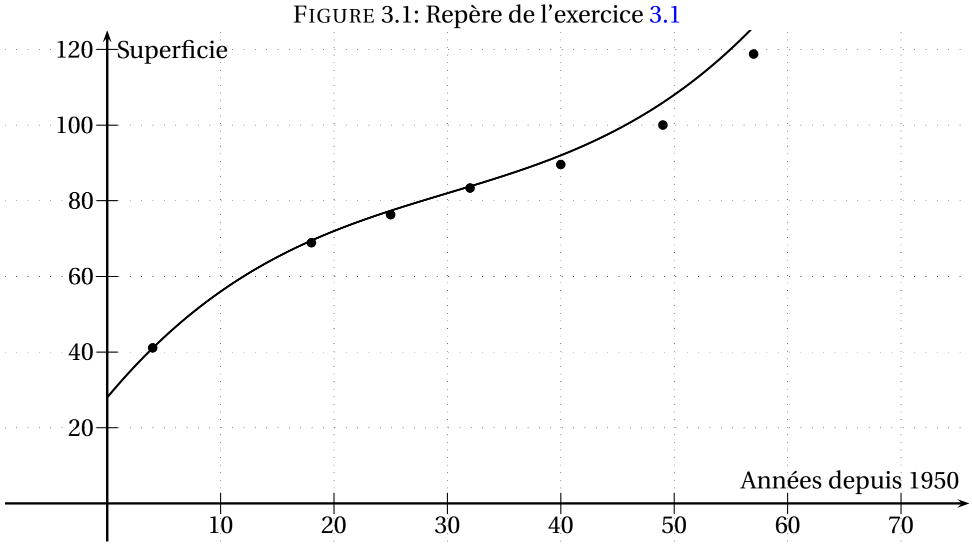
Une modélisation consiste à estimer la superficie urbaine $S(x)$, en millier de km$^2$, par :

$$S(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 3,6x + 28$$

où $x$ est le nombre d'années écoulées depuis 1950.

Dans le repère de la figure 3.1 de la présente page on a représenté le nuage de points correspondant aux données de l'INSEE et la courbe correspondant au modèle.

FIGURE 3.1: Repère de l'exercice 3.1




On suppose que ce modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire pour $x \in [0;70]$.
Le **rythme de croissance instantané** de la superficie est assimilé à la dérivée de $S$.

1. (a) Calculer la valeur estimée de la superficie urbaine en 1990, à l'aide de ce modèle.
   (b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport à la valeur effective de la superficie urbaine en 1990.
   (c) Estimer la superficie urbaine en 2015.
2. (a) Calculer $S'(x)$, la dérivée de $S$, puis $S''(x)$, la dérivée seconde de $S$.
   (b) Justifier que la fonction $S$ est croissante sur $[0;70]$. Interpréter le résultat.
3. Au cours de quelle année le rythme de croissance est-il le plus faible ? Que représente cette année pour la fonction $S$ ? Retrouver graphiquement le résultat.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On a pu lire le commentaire suivant à propos du recensement de la superficie urbaine :
   « Le rythme de croissance de l'espace urbain entre les recensements de 1999 et 2007 a été plus important que lors des décennies précédentes, et se rapproche de ce que l'on avait connu dans les années 1950-1960. »
   Expliquer ce commentaire.

**Exercice 3.2** (5 points).

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur A et 35 % dans le secteur B.

Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.

Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur B, ce taux est de 30 %.

On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur A ».
- B : « le questionnaire est celui d'un employé du secteur B ».
- S : « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

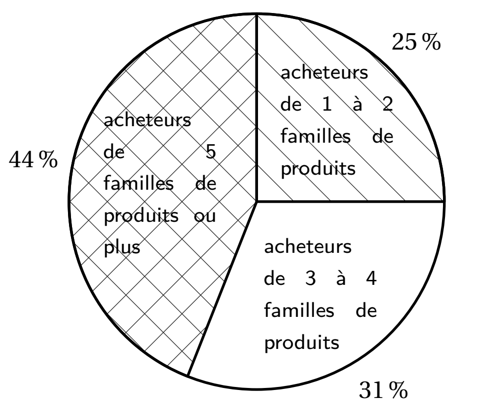
1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur B et qui est stressé.
3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

   L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée.

   L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifier la réponse.
4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur A ? (le résultat sera arrondi à $10^{-2}$)

**Exercice 3.3** (7 points).

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2010 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Sur le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, informatique, loisirs, ...) achetés à distance au cours des 12 derniers mois. L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :




Parmi les acheteurs de 1 à 2 familles de produits, 45 % sont retraités.

Parmi les acheteurs de 3 à 4 familles de produits, 25 % sont retraités.

Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré. On note :

- A l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 1 à 2 familles de produits. »
- B l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
- C l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
- R l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. (a) Calculer la probabilité $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})$.

   (b) Déterminer la probabilité de l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits. »

   (c) On sait de plus que 21,7 % des acheteurs interrogés sont des retraités. Vérifier que $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{R}) = 0{,}027$.
3. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8 %.

   Quelle décision prendra-t-il ?

# Chapitre 4

# Fonction exponentielle

## Sommaire



## 4.1 Activité

**ACTIVITÉ 4.1** (Une nouvelle fonction)**.**
Max a placé le 1er janvier 2000 un capital de 100 € à intérêts composés à un taux annuel de 20 % [1]. Il peut à tout moment retirer le capital augmenté des intérêts produits.
On appelle $C_n$ le capital disponible le 1er janvier de l'année $2000 + n$. Ainsi $C_0 = 100$.

1. (a) Déterminer $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$. De quelle nature est la suite $(C_n)$ ? On précisera ses caractéristiques.

   (b) Représenter la suite dans le repère de la figure 4.1 page suivante.
   *On rappelle que la représentation graphique d'une suite $(u_n)$ est le nuage constitué des points $(n\,;\, u_n)$.*
   Les points sont-ils alignés ?

2. Le 30 juin 2003, un imprévu oblige Max à retirer l'intégralité de son capital. La banque lui reverse alors sur son compte 189,29 €. Max est surpris car ce montant ne lui semble correspondre à rien. Après renseignement, il apprend que la banque a transformé son taux annuel de 20 % en un taux mensuel équivalent. Max n'a pas bien compris mais n'a pas osé insister et il vous demande d'essayer de déterminer ce taux.

   (a) Soit $t$ un taux mensuel quelconque.

      i. Que devient un capital $C$ placé à ce taux mensuel au bout d'un an ?

      ii. En déduire que le taux mensuel $t$ appliqué par la banque est solution de l'équation :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2$$

      iii. Déterminer, en tatonnant à la calculatrice, une valeur approchée de $t$ à $10^{-3}$ près et vérifier que ce taux donne bien la somme versée par la banque.

1. Les taux d'intérêts sont en général plutôt de l'ordre de 3 à 4 %, la situation de l'activité est donc purement fictive.

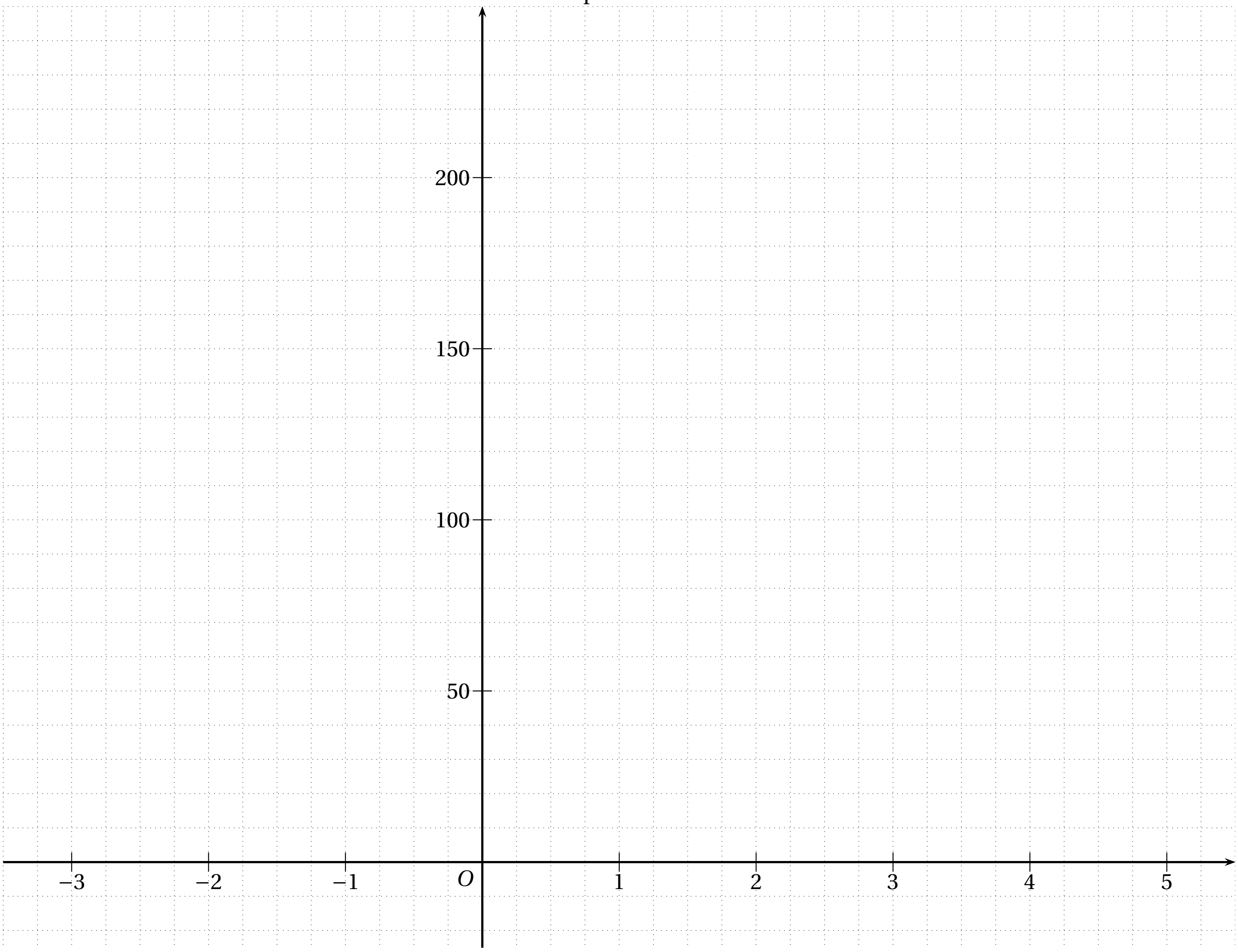
(b) Étienne, un ami de Max, après avoir pris connaissance de votre travail, vous demande s'il n'y a pas plus simple. « En effet, regarde : au bout de trois ans, le capital de Max est $100 \times 1,2^3$, au bout de quatre ans, il est de $100 \times 1,2^4$ et bien au bout de trois ans et demi, il doit être de $100 \times 1,2^{3,5}$. Non ? »
Julie est intriguée par la proposition d'Étienne : « Je ne comprend pas ce que veut dire "1,2 exposant 3,5" ».
« Moi non plus, répond Étienne, mais essayons de voir ce que cela donne à la calculatrice ».

i. Regarder, à la calculatrice, si le calcul proposé par Étienne donne la somme versée par la banque.

ii. Représenter la courbe de la fonction $f(x) = 1,2^x$ dans le repère de la figure 4.1 pour $x$ positif.
Que constate-t-on ?

iii. Compléter le tracé pour $x$ négatif.
Comment interpréter cette partie de la courbe ?

FIGURE 4.1: Repère de l'activité




**ACTIVITÉ 4.2** (Recherche d'une valeur particulière)**.**
On considère la fonction $f_q$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_q(x) = q^x$ où $q$ est un réel strictement positif. On nomme $\mathscr{C}_q$ sa représentation graphique dans un repère et $T_q$ sa tangente au point d'abscisse 0.

1. À l'aide de sa calculatrice, représenter les courbes $\mathscr{C}_q$ pour les valeurs de $q$ suivantes :
   - $q = 2$
   - $q = 3$
   - $q = 5$
   - $q = 1$
   - $q = 0,9$
   - $q = 0,5$
2. Ces courbes semblent concourantes en un même point. Donner ses coordonnées.
3. Faire apparaître dans le tableau de valeur de votre calculatrice les nombres dérivés des fonctions et indiquer, lorsque le réel $q$ croit, comment varie le coefficient directeur de la tangente $T_q$.
4. En tatonnant à la calculatrice, modifier la valeur de $q$ pour obtenir une valeur approchée au dixième puis au centième de la valeur pour laquelle le coefficient directeur de $T$ est 1.

## 4.2 Fonctions exponentielles de base $q$ $(q > 0)$

### 4.2.1 Définition

**Définition 4.1.** Soit $q$ un réel strictement positif.
On appelle *fonction exponentielle de base $q$*, la fonction $f_q$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_q(x) = q^x$$

### 4.2.2 Propriétés algébriques

On admettra la propriété suivante :

**Propriété 4.1.** *La fonction exponentielle de base $q$ transforme les sommes en produits :*

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers, s'étendent aux exposants réels non entiers. On a alors :

**Propriété 4.2.** *Pour tous réels $q$ et $p$ strictements positifs et pour tous réels $x$ et $y$, on a :*
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$
- $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$
- $\left(q^x\right)^y = q^{xy}$
- $q^x p^x = (qp)^x$

*Preuve.* • $q^{-x} \times q^x = q^{-x+x} = q^0 = 1$ donc $q^{-x}$ est l'inverse de $q^x$ donc $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.
- $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = q^x \times \frac{1}{q^y} = \frac{q^x}{q^y}$
- On admettra les deux derniers points.

◇

### 4.2.3 Cas particulier : racines $n$-ièmes d'un réel $q$ $(q > 0)$

**Propriété 4.3.** *Soit $q$ un réel strictement positif et $n$ un entier naturel non nul. Alors le nombre $a = q^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre positif tel que $a^n = q$. On l'appelle la racine $n$-ième de $q$ (on le note parfois $\sqrt[n]{q}$).*

*Preuve.* En effet $a^n = \left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q^{\frac{1}{n}\times n} = q^1 = q$.
On admettra que ce nombre est unique. ◇

*Remarque.* Dans le cas de la racine "deuxième", on retrouve la racine carrée et on peut omettre le 2 dans la notation $\sqrt[2]{q}$.

**Exemple 4.1.** Dans l'activité au point 2(a)ii, où $t \geqslant 0$, on peut résoudre l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1,2 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} &= 1,2^{\frac{1}{12}}\\ \Leftrightarrow \frac{t}{100} &= 1,2^{\frac{1}{12}} - 1\\ \Leftrightarrow t &= 100\left(1,2^{\frac{1}{12}} - 1\right) \approx 1,531\end{aligned}$$

### 4.2.4 Étude des fonctions $x \longmapsto q^x (q > 0)$

**Propriété 4.4.** *Pour $q > 0$ la fonction $x \longmapsto q^x$ est :*
- *définie sur $\mathbb{R}$*
- *strictement positive*
- *convexe sur $\mathbb{R}$ si $q \neq 1$*
- *et, selon les valeurs de $q$ on a les propriétés résumées dans le tableau 4.1 page suivante.*

On l'admettra.

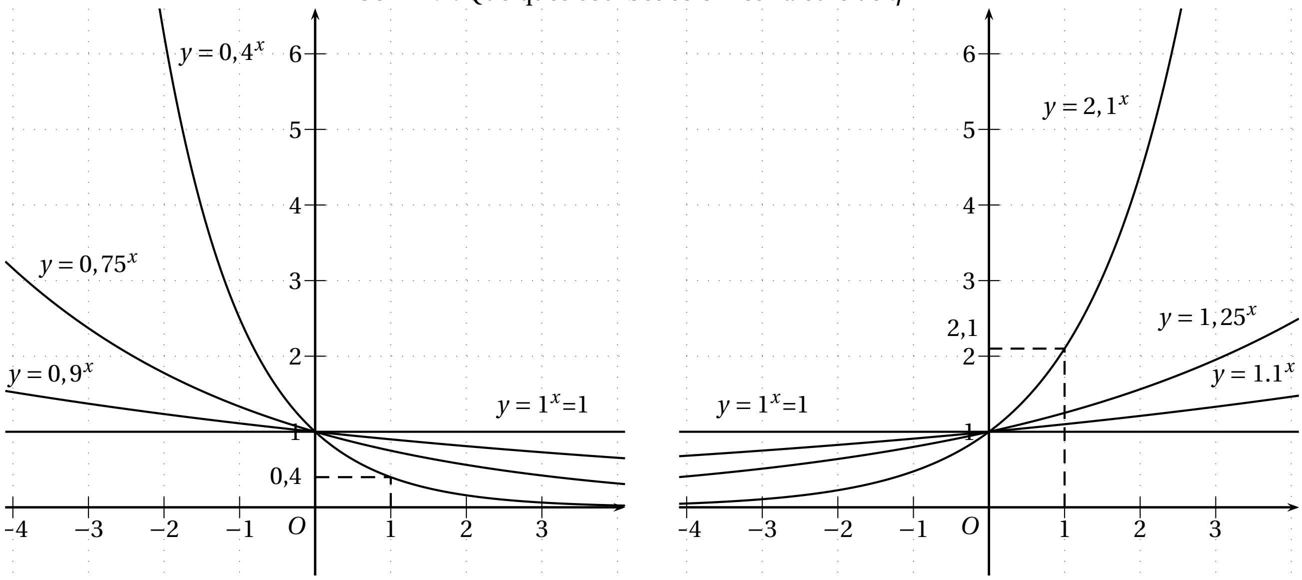
#### Courbes représentatives

Trois types de courbes, donc, selon si $0 < q < 1$, si $q = 1$ ou si $q > 1$. Plusieurs exemples sont donnés sur la figure page suivante.
On remarquera que, pour tout réel $q$ $(q > 0)$ :
- $q^0 = 1$ et donc toutes les courbes passent par le point $(0; 1)$ ;
- $q^1 = q$ et donc toutes les courbes passent par le point $(1; q)$.

TABLE 4.1: Propriétés de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de $q$

| **Lorsque** $0 < q < 1$ | **Lorsque** $q > 1$ |
|---|---|
| La fonction exponentielle de base $q$ est strictement décroissante | La fonction exponentielle de base $q$ est strictement croissante |
| $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ |
| $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$ |

FIGURE 4.2: Quelques courbes selon les valeurs de $q$




## 4.3 Fonction exponentielle de base e

**Propriété 4.5.** *Il existe une unique valeur de q telle que la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1.*
*Cette valeur particulière est notée e et on a $e \approx 2{,}718$.*

**Définition 4.2.** La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle *la fonction exponentielle* et est parfois notée $x \mapsto \exp(x)$.

Comme toutes les fonctions exponentielles de base $q > 1$, on a :

**Propriété 4.6.** *La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est :*

- *définie sur* $\mathbb{R}$
- *strictement positive*
- *convexe sur* $\mathbb{R}$
- *strictement croissante sur* $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Les propriétés algébriques sont aussi vérifiées :

**Propriété 4.7.** *Pour tous réels x et y on a :*

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^y = e^{x \times y}$

Enfin, on admettra que :

**Propriété 4.8.** *Pour tout réel x* $\exp'(x) = e^x$.

## 4.4 Fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

**Propriété 4.9.** *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$*

**Propriété 4.10.** *Les fonctions u et $e^u$ ont les mêmes variations.*

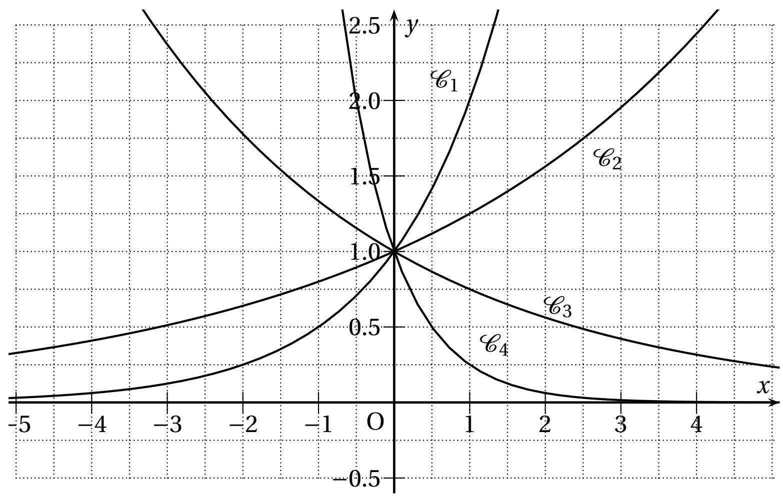
# 4.5 Exercices

## 4.5.1 Technique

**EXERCICE 4.1.**
Simplifer chacune des expressions suivantes :

- $A = 1,25^{\frac{1}{3}} \times 1,25^{\frac{5}{3}}$
- $B = \frac{1,21^{1,43} \times 1,21^{3,17}}{1,21^{4,1}}$
- $C = \left(0,87^{1,2}\right)^5 \times 0,87^{-4}$
- $D = (1-0,81^x)^2 - 0,9^{4x}$

**EXERCICE 4.2.**
Dans le repère de la figure ci-dessous quatre fonctions exponentielles sont représentées. Identifier la base $q$ de la fonction exponentielle associée à chacun de ces courbes.




**EXERCICE 4.3.**
Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres suivants :

- $A = \exp(-2)$
- $B = \exp(0,8) \times \exp(1) \times \exp(1,2)$
- $C = \frac{\exp(1,23}{\exp(0,23)}$

**EXERCICE 4.4.**
Simplifier chacune des expressions :

- $A = \frac{e^{1,5}}{e}$
- $B = \left(e^{0,5}\right)^4 \times e^{-1}$
- $C = (e^x \times e^{-x})^2$
- $D = \left(\frac{e^{1+0,25x}}{e^{1-0,25x}}\right)^2$

**EXERCICE 4.5.**
Simplifer les expressions suivantes :

1. $\frac{e^{2x}}{e^x}$
2. $(e^x+1)\,(e^x-1)$
3. $\left(e^{x+1}\right)\left(e^{x-1}\right)$
4. $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$

## 4.5.2 Études de fonctions comportant $e^x$

**EXERCICE 4.6.**
Dériver chacune des fonctions suivantes :

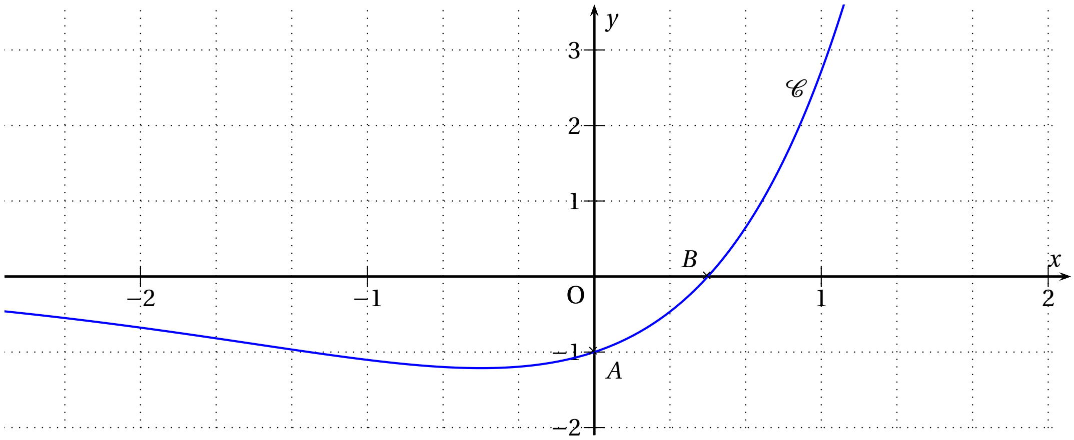
- $f(x) = 3 - 2e^x$
- $g(x) = 1 + x + e^x$
- $h(x) = (1+x)e^x$
- $k(x) = \frac{1+x}{e^x}$
- $l(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$

**EXERCICE 4.7.**
Étudier les variations de $g$, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

**EXERCICE 4.8.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$d'unité 1 cm.

1. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de $f$.
2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
3. On donne $f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x-1)^3}$.
   Étudier la convexité de $f$ et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion $I$ dont on déterminera les coordonnées $(x_I\,;y_I)$.
4. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en $I$. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

**EXERCICE 4.9.**
On considére la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$ ; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure ci-dessous.




1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. (a) Montrer que $f'$, la dérivée de $f$, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ puis en déduire le tableau des variations de $f$ (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A$ et la tracer sur le graphique.
3. Étudier la convexité de $f$ et déterminer si $\mathscr{C}$ admet des points d'inflexions.

### 4.5.3 Études de fonctions comportant $e^u$

**EXERCICE 4.10.**
Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = e^{-0,5x}$
- $g(x) = x + e^{-x}$
- $h(x) = 3e^{1-2x}$
- $k(x) = \frac{1}{2}e^{-0,5x^2}$

**EXERCICE 4.11.**
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{(x^2)}$
3. $f(x) = (e^x)^2$
4. $f(x) = e^{-x}$
5. $f(x) = 3e^{2x} - 5e^x$
6. $f(x) = xe^{-x}$
7. $f(x) = (2x+1)e^{2x}$
8. $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$
9. $f(x) = \frac{2}{8+e^{-x}}$

**EXERCICE 4.12** (D'après France métropolitaine, Réunion – Septembre 2 009)**.**
On considère la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right)e^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'ensemble des nombres réels.
2. Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
3. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
   Tracer la droite $T$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0 ; 8]$ dans le plan.

**EXERCICE 4.13** (D'après Polynésie – Septembre 2 007).
*Les parties* A *et* B *sont indépendantes.*

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où $a$ et $b$ sont deux réels.
On désigne par $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $[0; +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0; 1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer $a$ et $b$.

**Partie B**

Pour la suite, on admet que la fonction $f$ est définie sur $[0\ ; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de $f$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[0; 4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.
3. Étudier la convexité de $f$ et l'existence de point d'inflexion pour sa courbe.

**Partie C**

Une entreprise produit $q$ milliers de pièces par jour, $q$ étant un réel de $[0; 4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de $q$ et est donné par l'expression : $f(q) = (q+1)e^{-q}$.
À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

**EXERCICE 4.14** (Métropole – La Réunion – Septembre 2 007).
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur la figure 6.8 page 91, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $R$. On note $f'$ sa fonction dérivée. Les points $A(3; e)$ et $B(4; 2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en $A$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente $(T)$ à la courbe en $B$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

**Partie I : Lectures graphiques**

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel $x$ de l'intervalle $[3; 10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$ ?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

**Partie II : Étude de la fonction**

La fonction $f$ représentée sur la figure 6.8, est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-2)e^{(-x+4)}$.

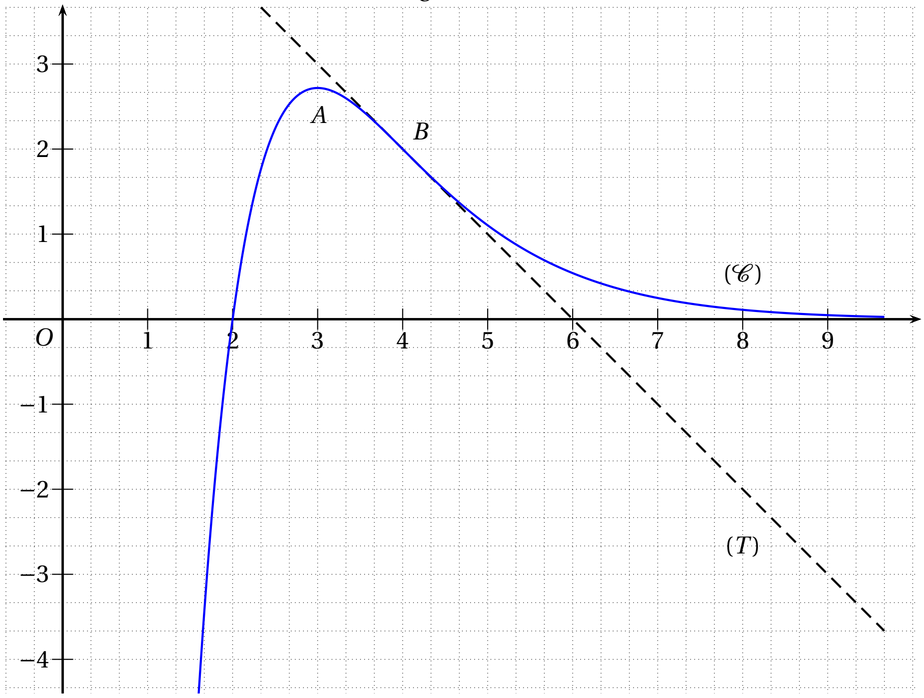
1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
2. (a) Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)e^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**Partie III : Étude d'un bénéfice**

Une entreprise vend $x$ centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend $x$ centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8; 4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

FIGURE 4.3: Figure de l'exercice 6.16




### 4.5.4 Problèmes

**PROBLÈME 4.1.**
Démontrer que pour tout réel $x$ on a les égalités suivantes :

1. $\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$
2. $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$

**PROBLÈME 4.2.**
Un banquier propose à son client un placement au taux annuel de 3,5 % sur 10 ans. Quel taux le client doit-il négocier avec son banquier pour obtenir au moins la même somme $S$ en 7 ans et demi ?

**PROBLÈME 4.3.**
Une personne se demande en combien de temps son capital $C_0$ doublera en le laissant placé aux taux annuels de $t$ %.
À l'aide d'un algorithme de seuil, déterminer le nombre d'années qu'il faut pour que le capital $C_0$ double dans chacun des cas suivants :

- $t=1$
- $t=2$
- $t=3$
- $t=5$
- $t=6$

**PROBLÈME 4.4.**
Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998. On désigne par $x$ le rang de l'année et par $y$ le pourcentage de logiciels piratés.

| année | 1 990 | 1 991 | 1 992 | 1 993 | 1 994 | 1 995 | 1 996 | 1 997 | 1 998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rang $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| pourcentage $y_i$ | 85 | 78 | 73 | 66 | 57 | 51 | 47 | 44 | 43 |

1. Représenter l'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 0,5 cm représente un an sur l'axe des abscisses ;
   - 0,5 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Cette évolution est modélisée par la fonction $f$, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=85,115(0,905)^x$, où $x$ désigne le rang de l'année, et $y$ le pourcentage de logiciels piratés.
   (a) Quel est le sens de variation de $f$ ?
   (b) Représenter $\mathscr{C}$, la courbe représentative de $f$, dans le même repère que celui utilisé au 1.
   (c) Peut-on dire que le pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998 a une décroissance exponentielle ? Pourquoi ?
   (d) Donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en France en 2 004. Vérifier graphiquement.

**PROBLÈME 4.5** (Amérique du nord – 2 005)**.**
Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à $10^{-2}$.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   (b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

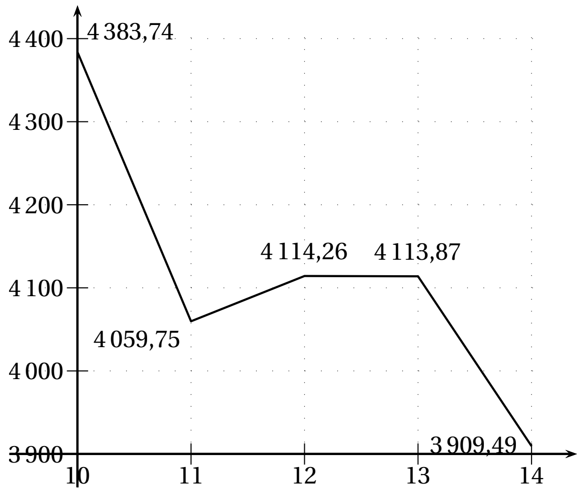
**PROBLÈME 4.6.**

Le CAC 40 est un indice de valeurs françaises, concernant les 40 plus importantes valeurs cotées à la bourse de Paris (Michelin, France Télécom, Alcatel, etc.). Le Dow Jones est un équivalent à New York du CAC 40.

Voici un extrait du *Journal des Finances* du 15 au 21 septembre 2 001 :

**Cotations : Violente rechute** *par* ROLAND LASKINE

Après le choc du 11 septembre qui a fait plonger, mardi, toutes les places boursières mondiales, les investisseurs se sont ressaisis, refusant de céder au marasme ambiant. Vendredi, la crainte d'une reprise des cotations en forte baisse à New York dès le début de la semaine prochaine a tétanisé les marchés. Ceux-ci sont de nouveau violemment repartis à la baisse en Europe. Les actions qui ont subi les plus fortes attaques ne sont pas les technologiques, mais des valeurs plus traditionnelles appartenant au secteur des assurances, des transports, du luxe et des loisirs. Dès lundi, tous les yuex seront braqués sur les trente valeurs de l'indice Dow Jones, qui constitue le désormais baromètre de la tendance sur tous les marchés mondiaux.




1. $C_i$ représente l'indice CAC 40 le $(10+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. Que valent $C_0$, $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ ?
2. $t_i$ est le pourcentage de variation du CAC 40 du $(10+i)$ septembre 2 001 au $(11+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Calculer $t_0$, $t_1$, $t_2$, $t_3$.
3. On appelle pourcentage journalier moyen de variation du cours du CAC 40, le pourcentage $t_j$ % tel que, si le cours du CAC 40 avait varié chaque jour de ce taux constant $t_j$ %, son cours serait encore $C_4$ le 14 septembre 2 001.
   (a) Vérifier que $C_0\left(1+\frac{t_j}{100}\right)^4 = C_4$.
   (b) Calculer l'arrondi au dixième de $t_j$. En donner une interprétation économique.

**PROBLÈME 4.7** (Remboursement d'emprunt)**.**

Une somme $C$, empruntée au taux annuel $t$, est remboursée en $n$ annuités $A$ égales.
La formule qui relie $C$, $t$, $n$ et $A$ est :

$$C = A \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Monsieur X a emprunté la somme de 26 243 € au taux annuel de 7 %. Il peut effectuer ses remboursements :

- par annuités de 10 000 € ;
- par annuités de 8 000 €.

Déterminer, dans chacun des deux cas, quel serait :

1. la durée de remboursement du prêt ;
2. la somme totale versée par Monsieur X pour rembourser son emprunt.

# Devoir surveillé n° 4

## Fonction exponentielle – Probabilités conditionnelles

**EXERCICE 4.1** (5 points)**.**
Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Pierre va courir aujourd'hui.
On considère les événements suivants :
$A$ : « Pierre choisit le parcours A »
$B$ : « Pierre choisit le parcours B »
$C$ : « Pierre choisit le parcours C »
$E$ : « Pierre fait une séance d'endurance »
$V$ : « Pierre fait une séance de vitesse »

On sait que :
- Pierre choisit le parcours A dans 30 % des cas et le parcours B dans 20 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
3. On sait que Pierre fait une séance d'endurance dans 70 % des cas. Montrer que : $p(E \cap C) = 0,42$.
4. On sait que Pierre a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

**EXERCICE 4.2** (3 points)**.**
*Les questions sont indépendantes. Les réponses seront arrondies au centième.*

1. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 5 % pendant 10 ans. À quel taux annuel faudrait-il le placer pour qu'il rapporte la même somme en 7 ans ?
2. Le cours d'une action a baissé de 20 % sur 4 mois. Déterminer la baisse mensuelle moyenne.

**EXERCICE 4.3** (9 points)**.**
Une entreprise fabrique chaque mois $x$ tonnes d'un certain produit, avec $x$ appartenant à l'intervalle $]0;6]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de $x$ tonnes est donné par $C(x)$, où $C$ est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0,01\mathrm{e}^x + 2}{x}.$$

1. À l'aide de la calculatrice :
   (a) conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0;6]$ ;
   (b) estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;
   (c) dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4 000 euros. On précisera la méthode utilisée.
2. On désigne par $C'$ la fonction dérivée de la fonction $C$. Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;6]$ :
$$C'(x) = \frac{0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2}{x^2}.$$
3. On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0;6]$ par :
$$f(x) = 0,01x\mathrm{e}^x - 0,01\mathrm{e}^x - 2.$$
   On désigne par $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   (a) Vérifier que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;6]$
$$f'(x) = 0,01x\mathrm{e}^x.$$
   (b) Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;6]$.
   (c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[4;5]$.
   Donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel $\alpha$.
   (d) Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;6]$.
4. À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de $\alpha$ tonnes du produit.

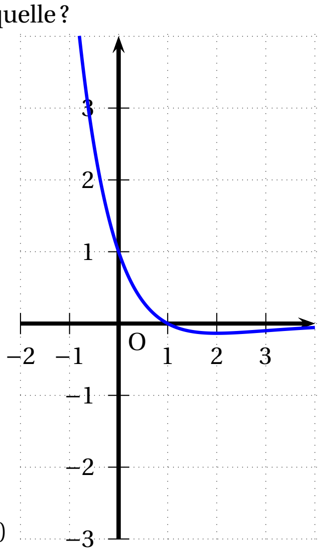
**EXERCICE 4.4** (3 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

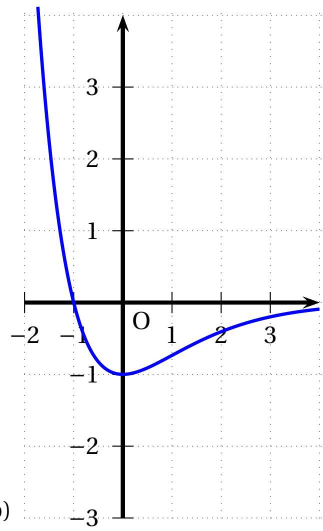
*Barème : Une réponse exacte rapporte* 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

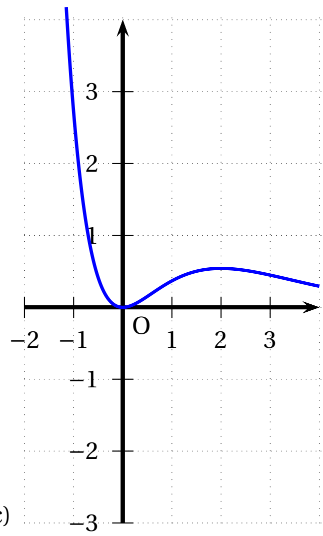
On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Pour tout réel $x$ on a :
   (a) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ (c) $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$
2. La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est
   (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$ (c) $0,303$
3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction $g$ telle que $g' = f$.
   Laquelle ?

(a) 


(b) 


(c) 

# Chapitre 5

# Logarithme népérien

## Sommaire

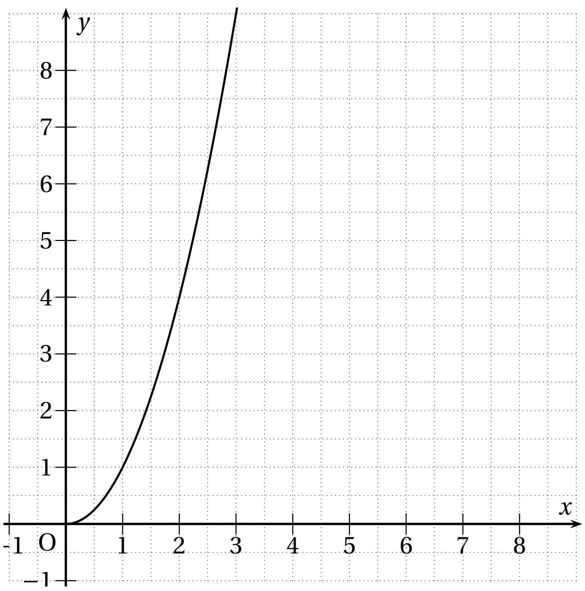


## 5.1 Activités

**ACTIVITÉ 5.1.**

1. (a) Pour quelles valeurs de $k$ l'équation $\mathrm{e}^y = k$ admet-elle une solution ?
   (b) Rappeler pourquoi l'équation $\mathrm{e}^y = k$, où $k$ est un réel strictement positif, admet une unique solution.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée, à $10^{-2}$ des solutions des équations $\mathrm{e}^y = 2$ et de $\mathrm{e}^y = 3$.

**ACTIVITÉ 5.2** (Fonction réciproque de la fonction carré)**.**
On donne sur la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.



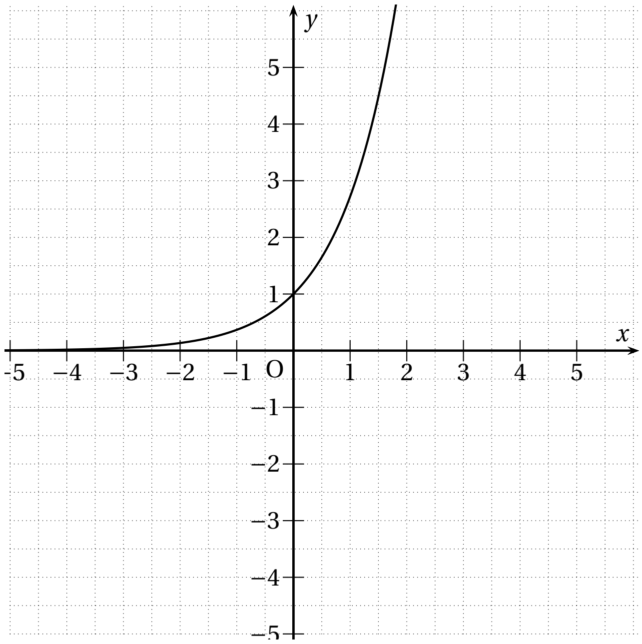

1. Contruire sur la même figure la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
2. Construire sur la même figure la courbe $\mathscr{C}'$, symétrique de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
3. Conjecturer quelle est la fonction usuelle dont $\mathscr{C}'$ est la courbe.
4. On admettra que si le point $(x ; y)$ appartient à $\mathscr{C}$ alors son symétrique par rapport à $\mathscr{D}$ est le point $(y ; x)$. Prouver alors la conjecture du point précédent.

**Définition.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
S'il existe une fonction $g$ telle que, pour tout $x \in I$, on a $g\big(f(x)\big) = x$, alors $g$ est appellée *fonction réciproque* de $f$.
Elle est parfois notée $f^{-1}$.

**Exemple.** • Sur $[0\,;+\infty[$, la fonction réciproque de la fonction racine est la fonction carrée car, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
• Sur $\mathbb{R}$, la fonction réciproque de la fonction carrée est la fonction racine car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$.

On admettra que les courbes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

**ACTIVITÉ 5.3** (Fonction réciproque de la fonction exponentielle)**.**
On donne sur la figure ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

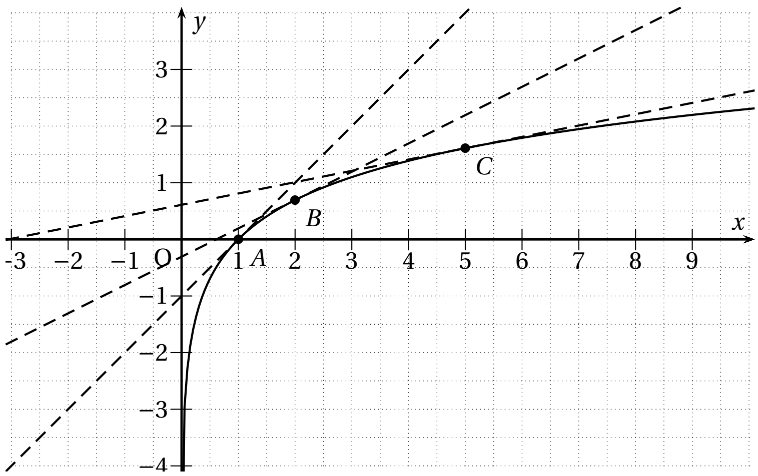



1. Contruire sur la même figure la courbe de la fonction $g$, réciproque de la fonction exponentielle.
2. Déterminer graphiquement :
   - l'ensemble de définition de $g$ ;
   - les valeurs de $g(1)$ et de $g(\mathrm{e})$ ;
   - les variations de $g$.
3. Déterminer graphiquement $g(2)$ et $g(3)$ et comparer les résultats obtenus à ceux de l'activité 5.1.

**Propriété.** *La fonction exponentielle admet, sur* $\mathbb{R}$*, une fonction réciproque, appellée fonction* logarithme népérien, *notée* ln*, et on a donc, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$.
*La fonction logarithme népérien admet, sur* $]0\,;+\infty[$*, la fonction exponentielle comme fonction réciproque, et on a donc, pour tout* $x \in ]0\,;+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.

**ACTIVITÉ 5.4** (Fonction dérivée de la fonction logarithme népérien)**.**
Pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ la fonction $f$ est définie par $f : x \mapsto \ln(x)$.
Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative de la fonction $f$ et les tangentes aux points $A$, $B$ et $C$ d'abscisses respectives 1, 2 et 5.

1. À l'aide du graphique, déterminer les valeurs approchées de $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(5)$.
2. Sur la calculatrice, afficher les valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$ dans un tableau de valeur pour $x$ variant de 1 à 10.
3. À l'aide des points précédents, conjecturer la valeur de $f'(x)$ en fonction de $x$.
4. En déduire les variations de la fonction logarithme népérien.
5. En déduire l'expression de $f''(x)$ et la convexité de la fonction logartihme népérien.



**ACTIVITÉ 5.5** (Une propriété du logarithme népérien). 1. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs approchées à $10^{-2}$, des nombres suivants :

- $A = \ln(5) + ln(7)$
- $B = \ln(3) + \ln(11)$
- $C = \ln(13) + \ln(6)$
- $D = \ln(33)$
- $E = \ln(78)$
- $F = \ln(35)$

Que constate-t-on ?

2. (a) D'après la propriété précédente, que vaut la quantité $e^{\ln(a\times b)}$ ?
   (b) D'après les propriétés algébriques de l'exponentielle et la propriété précédente, que vaut la quantité $e^{\ln(a)+\ln(b)}$ ?
   (c) Que peut-on en conclure ?
3. Les tables de logarithme de NÉPER premettaient, à une époque où il n'y avait pas de calculatrice, d'effectuer rapidement des multiplications grâce à la relation $\ln(a)+\ln(b) = \ln(a\times b)$ pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs. En se servant uniquement de l'extrait de table de logarithmes ci-contre et de la relation précente, donner une valeur approchée de $15,3\times 7$.

| $x$ | 6,9 | 7 | 7,1 | ... | 15,1 | 15,2 | 15,3 | ... | 107,1 | 107,2 | 107,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | 1,931 | 1,946 | 1,960 | ... | 2,715 | 2,721 | 2,728 | ... | 4,674 | 4,675 | 4,676 |

## 5.2 Un peu d'histoire

La fin du XVI$^{\text{è}}$ est l'époque des grands voyages maitimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (COPERNIC, KEPLER, etc.).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondances les nombres de telle manière qu'à la *multiplication* de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'*addition* de deux nombres de la colonne de droite.
La première table de ce type est publiée par l'écossais JOHN NEPER en 1614, après quarante ans de travail et qui crée leur nom, composé des mots grec ancien *lógos* (« rapport ») et *arithmos* (« nombre »).
Le livre dans lequel figurait ces tables servait ainsi à déterminer et à noter sa position jour après jour, mais aussi la météo, l'état du navire, le moral de l'équipage...
Ce journal de bord s'appelait un *log-book*.
On a conservé ce terme et lorsque son support a changé, que le journal s'est écrit non plus sur un livre mais sur internet, il s'est dénommé *web-log* qui, par contraction, a donné le mot *blog* !

## 5.3 Logarithme népérien : définition et premières propriétés

### 5.3.1 Définition

On a vu au chapitre 4 que, pour tout $x>0$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution $y$ appartenant à $\mathbb{R}$. Ce réel $y$, l'antécédent de $x$ par la fonction exponentielle, sera noté $\ln(x)$.

**Définition 5.1.** Pour tout réel $x>0$, on appelle *logarithme népérien* de $x$, et on note $\ln(x)$, l'unique réel dont l'exponentiel est $x$.
On a ainsi :
$$y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = e^{\ln(x)} = x$$

*Remarques.* • On peut écrire $\ln a$ à la place de $\ln(a)$ quand il n'y a aucun risque de confusion.
• On a : $\ln(1) = 0$. En effet : par définition, $\ln(1)$ est l'unique réel dont l'exponentiel est 1, or $e^0 = 1$ d'où $\ln(1) = 0$.
• On a : $\ln(e) = 1$. En effet : par définition, $\ln(e)$ est l'unique réel dont l'exponentiel est e, or $e^1 = e$ d'où $\ln(e) = 1$.

**Propriété 5.1.** *Pour tout nombre $x$, on a* $\ln(e^x) = x$.

*Preuve.* Par définition, $\ln(e^x)$ est l'unique réel dont l'exponentiel est $e^x$, or l'unique réel dont l'exponentiel est $e^x$ est $x$ d'où $\ln(e^x) = x$. ◊

On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont réciproques.

### 5.3.2 Propriétés algébriques du logarithme népérien

**Théorème 5.2.** *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :* $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

*Preuve.* Ce théorème a été démontré à la question 2 de l'activité 5.5. ♢

**Propriété 5.3.** *Pour tous réels a et b strictements positifs et tout entier relatif n, on a :*
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Les preuves seront faites en classe.

## 5.4 Fonction logarithme népérien

### 5.4.1 Définition

**Définition.** On appelle fonction *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \ln : & ]0\,;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

La fonction *logarithme népérien* est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
On admettra que cette fonction est continue et dérivable.

### 5.4.2 Dérivée

**Propriété 5.4.** *La fonction logarithme népérien est dérivable et, pour tout* $x > 0$*, on a*

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

On l'admettra.

**Propriété 5.5.** *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$ *et on a :*

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ | ‖ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\ln(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

*Preuve.* La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse, or quand $x \in ]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de $\ln(x)$ est donc strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ce qui implique que la fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. ♢

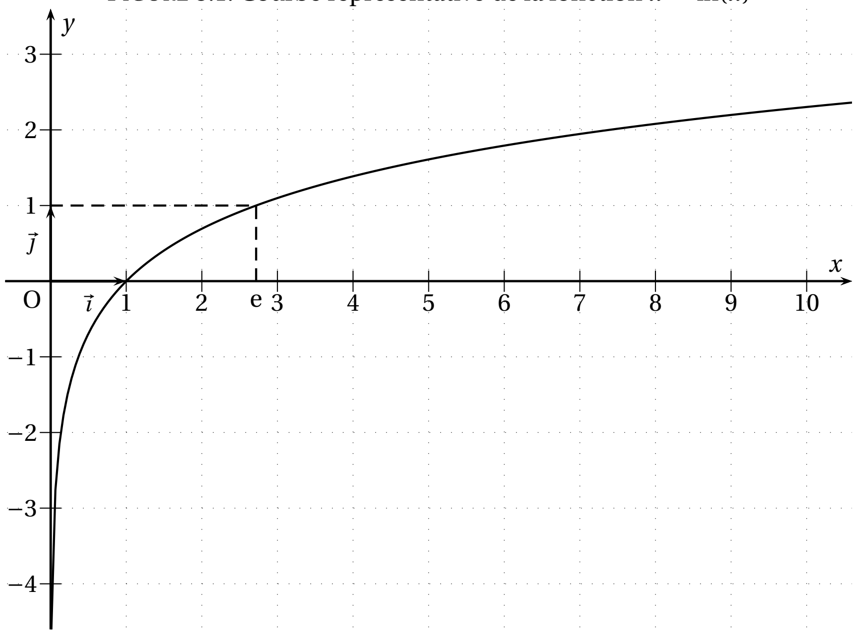
**Propriété 5.6.** *La fonction logarithme népérien est concave sur* $]0\,;+\infty[$.

Cette propriété a été démontrée dans l'activité 5.4

### 5.4.3 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme est donnée par la figure 5.1 page suivante.

FIGURE 5.1: Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$




## 5.5 Exercices et problèmes

### 5.5.1 Propriétés algébriques

**EXERCICE 5.1.**
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6) - \ln(2)$
2. $\ln(2) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln(3) - \ln(9)$
4. $\ln(2) + \ln(4) - \ln(8)$
5. $\frac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) - \ln(\sqrt{3}-1)$

**EXERCICE 5.2.**
Donner, en fonction de ln(2) et de ln(5) les valeurs de :

1. $\ln(10)$
2. $\ln(25)$
3. $\ln(16)$
4. $\ln(400)$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
8. $\ln(0,4)$
9. $\ln\left(\sqrt{5}\right)$
10. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
11. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
12. $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

**EXERCICE 5.3.**
$a$ et $b$ étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3 \times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$
6. $\frac{\ln(a)}{\ln(ab^2)}$
7. $\frac{\ln(ab^4)}{\ln(b)}$

### 5.5.2 Résolutions

**EXERCICE 5.4.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^x = 2$
2. $e^x = \frac{1}{2}$
3. $e^x = -\frac{1}{2}$
4. $e^x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $e^x \geqslant 3$
6. $e^{x-4} \leqslant 1$
7. $e^{x+3} = e^{2x-1}$
8. $e^{2x-5} > e^x$
9. $e^{2x-1} < e$
10. $e^{(x-4)(2x-1)} = 1$
11. $e^{4x+5}e^{2x-6} = 1$
12. $e^{4x+5}e^{2x-6} = 4$
13. $e^{2-x} = \frac{1}{e^{x^2+x-1}}$
14. $\frac{e^{2x-1}}{e^{-x+4}} = 3$
15. $e^{3x-1} = 4e^{x+1}$

**EXERCICE 5.5.**
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour $x$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\ln(x) > 1$
2. $\ln(x) = 2$
3. $\ln(x) < -1$
4. $3 - \ln(x) \leqslant 0$
5. $\ln(x) = -3$
6. $2\ln(x+1) = 0$
7. $\ln(2x+1) = 1$
8. $\ln\left(x^2\right) = -1$
9. $\ln[x(x+1)] = 0$
10. $\ln(x) + \ln(x+1) = 0$
11. $x\ln(x) = 0$
12. $2\ln(x) - 1 \leqslant 0$
13. $2x\ln(x) + x = 0$
14. $(x-1)(1+\ln(x)) \geqslant 0$
15. $x\ln(x+2) = 0$

**EXERCICE 5.6.**
Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement : $f(x) = 3^x$ et $g(x) = 0,5^{x+3}$.

1. Afficher les courbes représentatives de ces deux fonctions sur la calculatrice.
2. Conjecturer l'existence de points d'intersection.
3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

**EXERCICE 5.7.**
Une personne se demande en combien de temps son capital $C_0$ doublera en le laissant placé aux taux annuels de $t$ %. Calculer le temps qu'il faut, en années et mois, pour que le capital $C_0$ double dans chacun des cas suivants :

- $t = 1$
- $t = 2$
- $t = 3$
- $t = 5$
- $t = 6$

### 5.5.3 Études de fonctions comportant $\ln(x)$

**EXERCICE 5.8.**
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,; +\infty[$ par : $f(x) = 5\frac{\ln(x)}{x} + 3$.

1. Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$, puis étudier son signe.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction $f$. On y indiquera la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$.

**EXERCICE 5.9** (D'après Asie Juin 2 007)**.**

**Partie A**

Pour tout $x \in ]0\,; +\infty[$, on pose $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$.

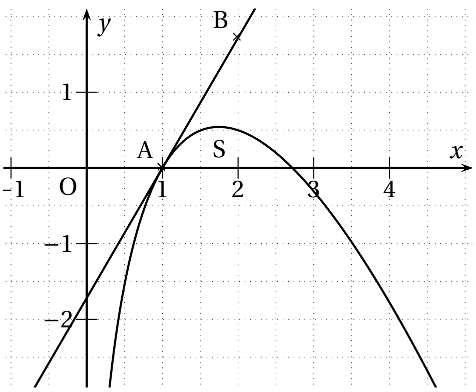
1. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $x \in ]0\,; +\infty[$.
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{-2x^2+10x-8}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (c) En déduire le tableau des variations de $f$.
2. On note $f''$ la dérivée seconde de $f$ sur $x \in ]0\,; +\infty[$.
   (a) Calculer $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de $f$ selon les valeurs de $x$.
   (c) En déduire les éventuels points d'inflexion de la courbe de $f$.

**Partie B**

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction $f$ définie sur $[1\,; 6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de $x$ centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. Montrer que la croissance du bénéfice va s'accélérer jusqu'à une certaine quantité de pièce à déterminer, puis que cette croissante ne va ensuite que ralentir.

**EXERCICE 5.10** (D'après Liban 2 007)**.**
On considère la fonction $f$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormal.



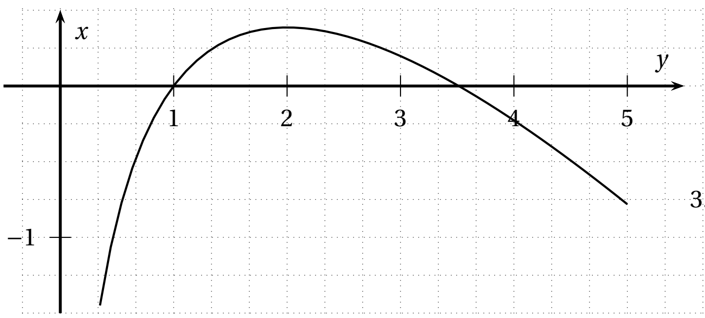

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A (1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$ où B est le point de coordonnées $(2\,; \mathrm{e}-1)$. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

Pour tout réel $x$ de $]0\,; +\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln(x)$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.
3. Justifier que $a$ et $b$ sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{lll} a\mathrm{e}+b & = & 0 \\ a+b & = & \mathrm{e}-1 \end{array}\right.$
   Déterminer $a$ et $b$.

**EXERCICE 5.11** (D'après Centres étrangers 2 006)**.**
On désigne par $f$ la fonction définie sur $]0\,;5]$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln(x)$.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure ci-dessous est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal.




1. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de $f$. Dresser le tableau des variations de $f$.
2. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;4]$ une solution unique $\alpha$ puis donner une valeur approchée à $10^{-2}$ près par défaut de $\alpha$.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$.
3. On appelle $g$ la fonction définie sur $]0\,;5]$ par : $g(x) = x\left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 2\ln(x) - 1\right)$.
   (a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ sur $]0\,;5]$.
   (b) En déduire les variations de $g$.

**EXERCICE 5.12.**
Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln(x)$.

1. (a) Calculer la dérivée de $f$ et montrer que l'on a : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$
   (b) Résoudre l'inéquation : $1 - 2\ln(x) > 0$
2. Recopier et compléter le tableau ci-contre en indiquant :
   (a) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ :
   (b) la valeur exacte de $f\left(\sqrt{e}\right)$
3. À l'aide de ce tableau de variations :
   (a) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à $10^{-2}$ près de chaque solution indiquée.

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | | | | |
| $f(x)$ | $\|\|$ $-2$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $-\infty$ |

**EXERCICE 5.13** (D'après Polynésie – Septembre 2 007)**.**
Pour chacune des quatre propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto e + \frac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto ex + \ln(5)$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(e^x - 1)(e^x + 4) = 0$ est : $S = \{0\}$.
3. Si $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n \leqslant 0{,}7$ alors $n \geqslant \frac{\ln 0{,}7}{\ln 0{,}99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2 + 4x + 3\right) = \ln(5x + 9)$ est $S = \{-2\,;\,3\}$.

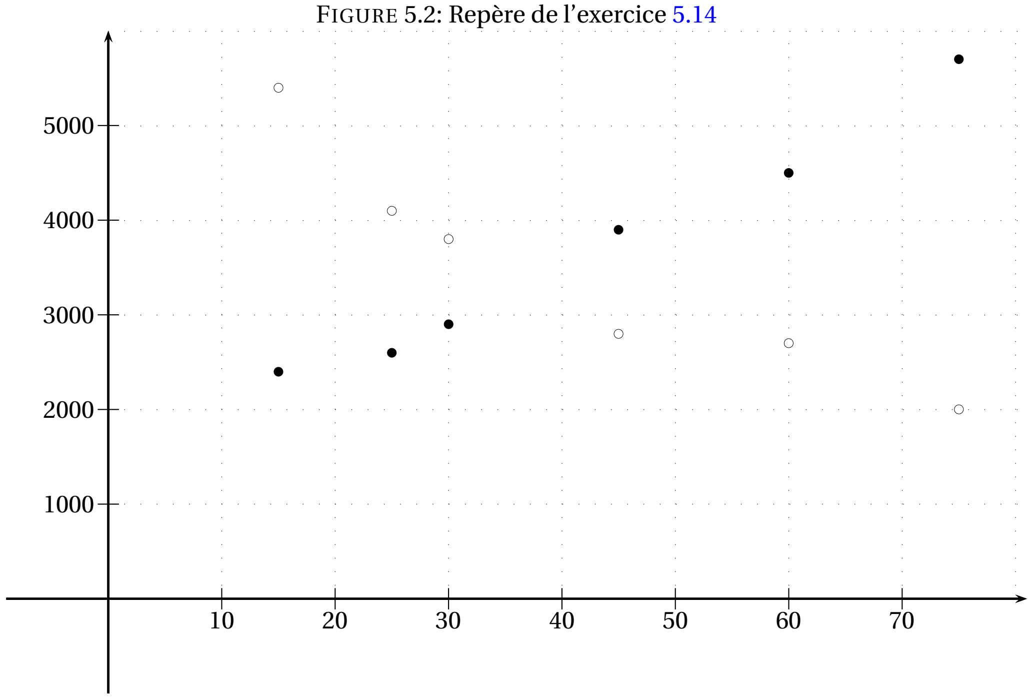
### 5.5.4 Modélisations

**EXERCICE 5.14.**
Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On désigne par $x$ le prix d'un livre, par $p$ le nombre de livres disponibles et par $q$ le nombre de livres demandés. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

| $x$ | 15 | 25 | 30 | 45 | 60 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2 400 | 2 600 | 2 900 | 3 900 | 4 500 | 5 700 |
| $q$ | 5 400 | 4 100 | 3 800 | 2 800 | 2 700 | 2 000 |

On a tracé sur la figure 5.2 page suivante les nuages de points $(x_i\,;\,p_i)$ et $(x_i\,;\,q_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

FIGURE 5.2: Repère de l'exercice 5.14




1. On modélise l'évolution de $p$ par la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{0{,}015x+7{,}538}$.
   (a) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au millième) :

| $x$ | 15 | 25 | 30 | 45 | 60 | 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2 400 | 2 600 | 2 900 | 3 900 | 4 500 | 5 700 |
| $f(x)$ | | | | | | |

   (b) Déterminer l'erreur commise par la modélisation pour $x = 75$.
   (c) En utilisant cette expression, donner une estimation du nombre de livre disponibles pour un prix unitaire de 34 € (*résultat arrondi à la dizaine*).
2. On modélise l'évolution de $q$ par la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{-0{,}02x+8{,}73}$.
   En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 3 130 livres (*résultat arrondi à l'unité*).
3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté $x_0$.
   (a) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.
   (b) Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?

**EXERCICE 5.15** (D'après Centres étrangers – Juin 2 009)**.**
Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite $y_i$ en tonnes durant l'année désignée par son rang $x_i$ :

| Année | 1963 | 1968 | 1973 | 1978 | 1983 | 1988 | 1993 | 1998 | 2003 | 2008 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang $x_i$ de l'année | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quantité extraite $y_i$ en tonnes | 18,1 | 15,7 | 13,3 | 11 | 9,3 | 7,8 | 7,1 | 6,1 | 5,2 | 4,3 |

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$de la figure 5.3 page suivante. Les unités graphiques de ce repère sont 1 unité = 1 cm en abscisse et 4 unités = 1,5 cm en ordonnée.
Dans cet exercice, on désigne par la variable $y$ la quantité extraite en tonnes et par la variable $x$ le rang de l'année.

**Première partie**
En première approximation, on envisage de modéliser $y$ en tant que fonction affine de $x$ et on admet que la droite la plus proche du nuage de points a pour équation $y = -1{,}5x + 16{,}5$.

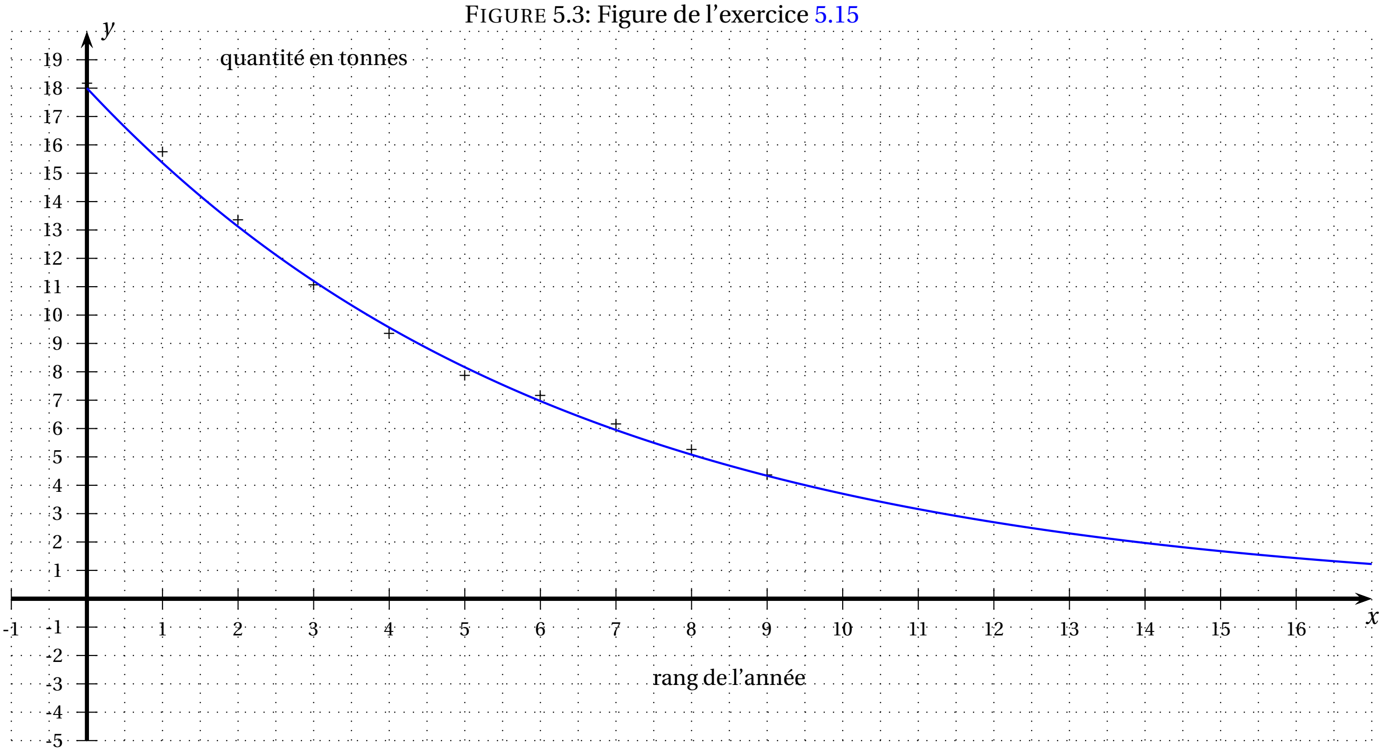
1. Tracer la droite dans le repère de la figure 5.3 page ci-contre.
2. En considérant cette modélisation, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

**Deuxième partie**

On admet que la courbe tracée sur la figure 5.3 de la présente page représente une modélisation par une fonction exponentielle de $y$ en fonction de $x$ et que son équation est de la forme $y = ke^{px}$ où $k$ est un entier naturel et $p$ un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que la modélisation laisse prévoir pendant l'année 2013.
2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel $k$ et le réel $p$ dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

FIGURE 5.3: Figure de l'exercice 5.15




**EXERCICE 5.16** (D'après Polynésie – Juin 2009)**.**

Le tableau suivant donne l'évolution du marché des capteurs solaires installés en France métropolitaine entre 2000 et 2007.

| Année | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 8$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Surface de capteurs solaires installés en milliers de m$^2$ : $y_i$, $1 \leqslant i \leqslant 8$ | 6 | 18 | 23 | 39 | 52 | 121 | 220 | 253 |

Source : ENERPLAN (*Association professionnelle de l'énergie solaire*)

L'objectif gouvernemental est d'atteindre un marché d'un million de m$^2$ en 2010.

1. (a) Calculer le pourcentage d'augmentation de la surface des capteurs solaires installés entre les années 2006 et 2007.
   (b) Si ce pourcentage reste le même d'année en année jusqu'en 2010. l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?
2. Sur une feuille de papier milimétré, représenter le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ ; $1 \leqslant i \leqslant 8$, dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour une année en abscisse et en ordonnée 1 cm pour 20 milliers de m$^2$ de capteurs solaires installés).
3. La forme du nuage suggère de faire une modélisation exponentielle de la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$.
   (a) Déterminer $a$ et $b$, arrondis au centième, pour que la courbe de $f$ passe par les points (2 ; 23) et (3 ; 39).
   (b) Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha\mathrm{e}^{\beta x}$, $\alpha$ étant arrondi à l'unité et $\beta$ au centième.
   (c) On suppose que l'évolution se poursuit de cette façon jusqu'en 2010.
   À l'aide de cette modélisation exponentielle, estimer en m$^2$ la surface de capteurs solaires installés en 2010.
   Si l'évolution se poursuit selon ce modèle, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

### 5.5.5 Repère semi-logarithmique

**EXERCICE 5.17.**
On considère deux fonctions $f$ et $g$ croissantes données par les tableaux de valeurs :

| $x$ | 0 | 2,7 | 4 | 5,4 | 7,4 | 9,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 3 | 5 | 9 | 20 | 40 |

| $x$ | 0 | 2,2 | 2,8 | 3,1 | 4,5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 1 | 5 | 8 | 10 | 20 | 50 |

1. Représenter les fonctions $f$ et $g$ dans le repère de la figure 5.4 page ci-contre.
2. Le repère de la figure 5.5 page suivante est appelé repère semi-logarithmique.
   La graduation sur l'axe $(Oy)$ n'est pas « régulière ». Elle est réalisée proportionnellement au logarithme népérien. Par exemple un point d'ordonnée $y=1$ est placé à la hauteur $z=\ln 1=0$ unités graphiques, un point d'ordonnée $y=10$ est placé à la hauteur $z=\ln 10\approx 2,3$ unités graphiques (et ici 1 unité graphique = 2 cm).
   *Remarque.* Dans le cadre de cet exercice, pour une meilleure lecture des hauteurs en unités graphiques, un axe a été ajouté à droite.
   Pour l'utilisation d'un tel repère on pourra s'aider du tableau suivant :

| Point | A | B | … |
|---|---|---|---|
| $x$ | | | … |
| $y$ | | | … |
| $z=\ln y$ | | | … |

   Où $z$ est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique.
   (a) Placer dans ce repère les points suivants :
      - $A(2;1,5)$
      - $B(5;15)$
      - $C(5;19)$
      - $D(12;175)$

   (b) Déterminer les coordonnées des points $E$, $F$, $G$ et $H$.
   *Indication : on mesurera z avec une règle avant de déterminer y par le calcul.*
   (c) Représenter les courbes de $f$ et de $g$ dans ce repère. Que remarque-t-on pour la courbe de $f$ ?
   (d) Représenter dans les deux repères les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, respectivement, $h(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $l(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$. Que remarque-t-on ?
   (e) Une fonction $k$ est représentée dans le repère semi-logarithmique une droite passant par les points $(0;1)$ et $(14;1000)$.
      i. Tracer cette droite.
      ii. À l'aide d'une règle compléter la ligne $z$ du tableau ci-dessous et compléter par la ligne $y$ par le calcul.

| $x$ | 0 | 1 | 3 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | | | |
| $y=\ldots\ldots$ | | | | | |

      iii. Représenter alors $k$ dans le premier repère.
   (f) Démontrer que lorsqu'une fonction positive est représenté dans un repère semi-logarithmique par une droite passant par l'origine, cette fonction est de la forme $f(x)=\mathrm{e}^{kx}$.
   *Indication : On posera $z=mx$, où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique et on déterminera alors une expression de y en fonction de x.*
   En utilisant l'égalité $f(4)=5$ donner l'expression de $f(x)$.
   Déterminer l'expression de $k(x)$.
   (g) Démontrer que lorsqu'une fonction positive représentée dans un repère semi-logarithmique par une droite d'équation $z=mx+p$ où $z$ est la hauteur en unités graphiques, cette fonction est de la forme $f(x)=K\mathrm{e}^{kx}$.
   Exprimer alors $K$ et $k$ en fonction de $m$ et $p$.

FIGURE 5.4: Premier repère de l'exercice 5.17

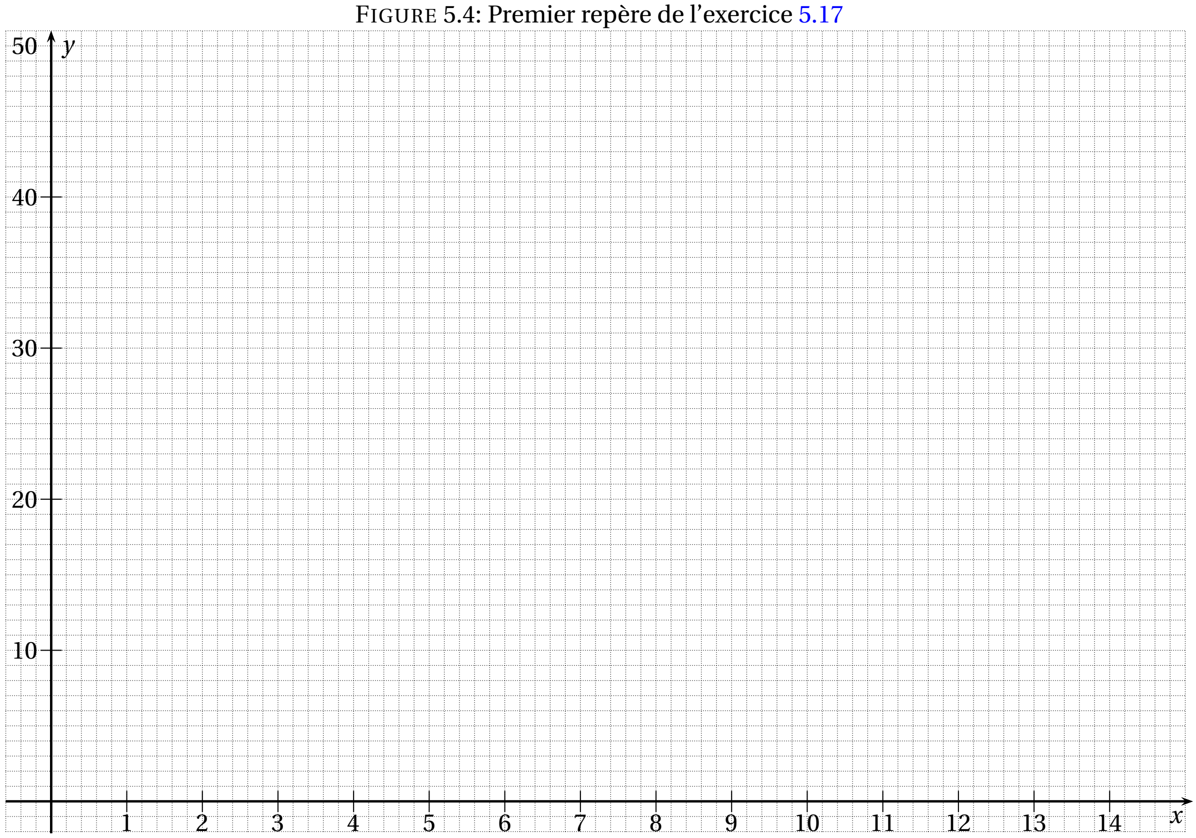
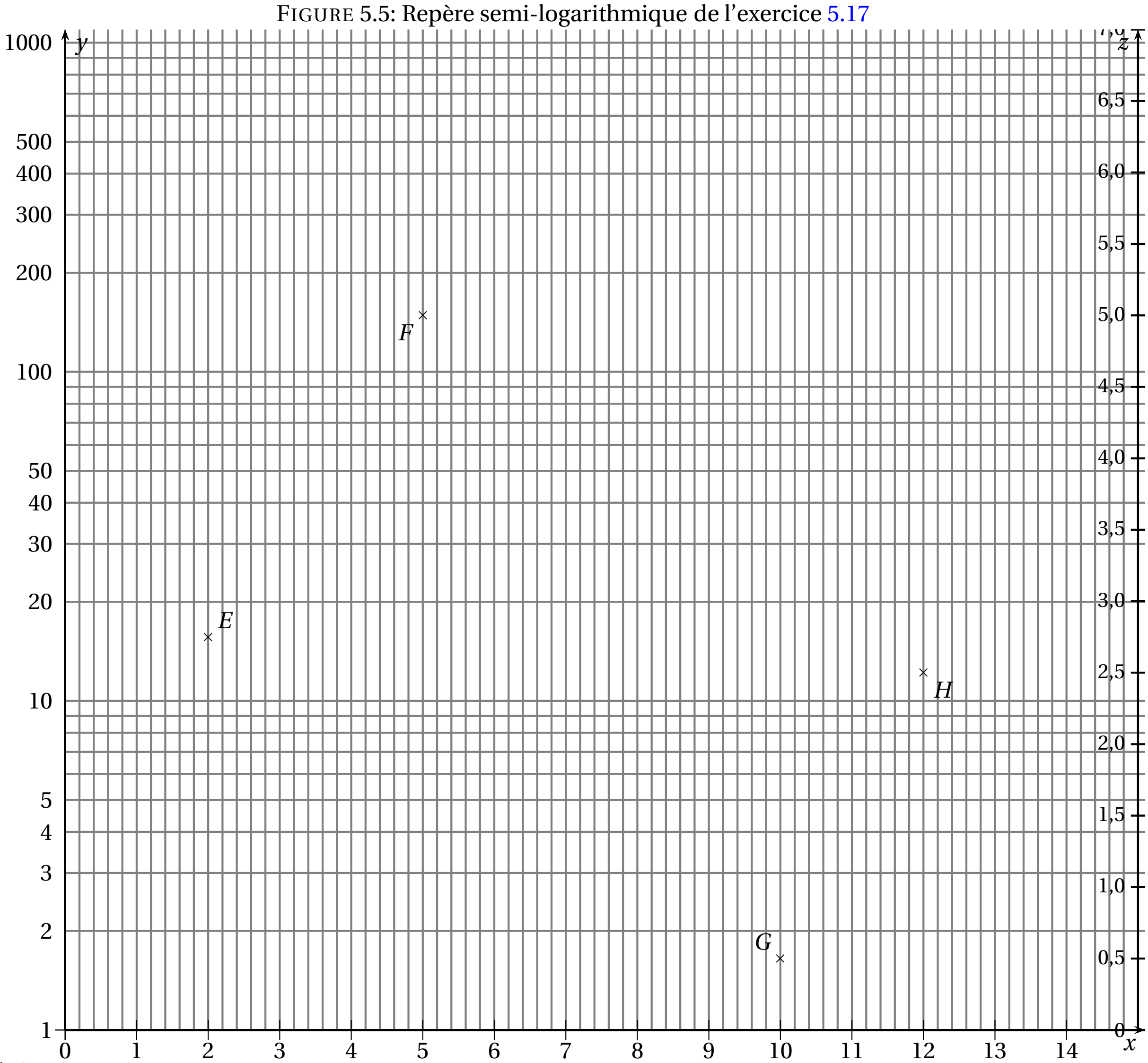



FIGURE 5.5: Repère semi-logarithmique de l'exercice 5.17



## Devoir surveillé n° 5

Logarithme népérien – Propriétés algébriques

**EXERCICE 5.1** (1,5 points)**.**
Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
2. $B = \ln(3) + \ln(9) - \ln(27)$
3. $C = 2\ln\left(\sqrt{5}\right) + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

**EXERCICE 5.2** (2,5 points)**.**
Donner, en fonction de ln(2), ln(3) ou ln(5), les valeurs de :

1. $A = \frac{1}{2}\ln(4)$
2. $B = \ln(30)$
3. $C = \ln(300)$
4. $D = \ln\left(\frac{1}{400}\right)$
5. $E = \ln(5) - \ln(25)$

**EXERCICE 5.3** (1,5 points)**.**
$a$ et $b$ étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$, les valeurs de :

1. $A = \ln\left(a^4 \times b^2\right)$
2. $B = \ln\left(\frac{a^2}{b^3}\right)$
3. $C = \ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$

**EXERCICE 5.4** (2,5 points)**.**
Déterminer l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(x) - 1 \leqslant 0$
2. $2\ln(2x+1) = 1$
3. $2\ln(x) + 1 \geqslant 0$
4. $2e^x - 1 = 0$
5. $2 - e^{x+1} \geqslant 0$

**EXERCICE 5.5** (2 points)**.**
Déterminer :

1. En combien d'années un capital placé à 5 % triplera sa valeur. *On donnera le résultat arrondi au centième.*
2. Le taux auquel devrait être placé ce capital pour qu'il triple en 15 ans. *On donnera le résultat arrondi au centième.*

## Devoir surveillé n° 5

Logarithme népérien – Propriétés algébriques

**EXERCICE 5.1** (1,5 points)**.**
Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
2. $B = \ln(3) + \ln(9) - \ln(27)$
3. $C = 2\ln\left(\sqrt{5}\right) + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

**EXERCICE 5.2** (2,5 points)**.**
Donner, en fonction de ln(2), ln(3) ou ln(5), les valeurs de :

1. $A = \frac{1}{2}\ln(4)$
2. $B = \ln(30)$
3. $C = \ln(300)$
4. $D = \ln\left(\frac{1}{400}\right)$
5. $E = \ln(5) - \ln(25)$

**EXERCICE 5.3** (1,5 points)**.**
$a$ et $b$ étant deux réels strictement positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$, les valeurs de :

1. $A = \ln\left(a^4 \times b^2\right)$
2. $B = \ln\left(\frac{a^2}{b^3}\right)$
3. $C = \ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$

**EXERCICE 5.4** (2,5 points)**.**
Déterminer l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(x) - 1 \leqslant 0$
2. $2\ln(2x+1) = 1$
3. $2\ln(x) + 1 \geqslant 0$
4. $2e^x - 1 = 0$
5. $2 - e^{x+1} \geqslant 0$

**EXERCICE 5.5** (2 points)**.**
Déterminer :

1. En combien d'années un capital placé à 5 % triplera sa valeur. *On donnera le résultat arrondi au centième.*
2. Le taux auquel devrait être placé ce capital pour qu'il triple en 15 ans. *On donnera le résultat arrondi au centième.*

# Devoir maison n°2

## Élasticité

*À rendre pour le vendredi 22 février*

Après une étude de marché, on a modélisé l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit en fonction de son prix unitaire $x$, pour $x \in [1;8]$ : $f(x) = 10 \times 1,9^x$ et $g(x) = 600 \times 0,5^x$, le prix unitaire étant exprimé en euros, et $f(x)$ et $g(x)$ donnant le nombre d'objets offerts ou demandés en milliers.

1. Déterminer le prix d'équilibre du produit.
2. (a) Étudier le sens de variation de $f$, puis de $g$ sur $[1;8]$.
   (b) Tracer les représentations graphiques de $f$ et de $g$ dans un même repère orthogonal.
   (c) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 1.
3. On considère la fonction $E_f$ définie sur I par :

   $$E_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$

   Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « élasticité de l'offre par rapport au prix $x$ » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix $x$ donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.

   (a) i. En remarquant que $1,9 = \mathrm{e}^{\ln(1,9)}$, montrer qu'on peut écrire $f(x) = K\mathrm{e}^{px}$.
   *On donnera les valeurs exactes de $K$ et $p$.*
   ii. En déduire $f'(x)$.
   (b) Déterminer l'élasticité-prix instantané de l'offre en fonction du prix $x$.
   (c) Calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 €.
   (d) En donner une interprétation en terme de variation.
4. En vous inspirant des questions précédentes, déterminer l'élasticité-prix de la demande en fonction du prix $x$, calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 € et en donner une interprétation.


# Devoir maison n°2

## Élasticité

*À rendre pour le vendredi 22 février*

Après une étude de marché, on a modélisé l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit en fonction de son prix unitaire $x$, pour $x \in [1;8]$ : $f(x) = 10 \times 1,9^x$ et $g(x) = 600 \times 0,5^x$, le prix unitaire étant exprimé en euros, et $f(x)$ et $g(x)$ donnant le nombre d'objets offerts ou demandés en milliers.

1. Déterminer le prix d'équilibre du produit.
2. (a) Étudier le sens de variation de $f$, puis de $g$ sur $[1;8]$.
   (b) Tracer les représentations graphiques de $f$ et de $g$ dans un même repère orthogonal.
   (c) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 1.
3. On considère la fonction $E_f$ définie sur I par :

   $$E_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$

   Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « élasticité de l'offre par rapport au prix $x$ » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix $x$ donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.

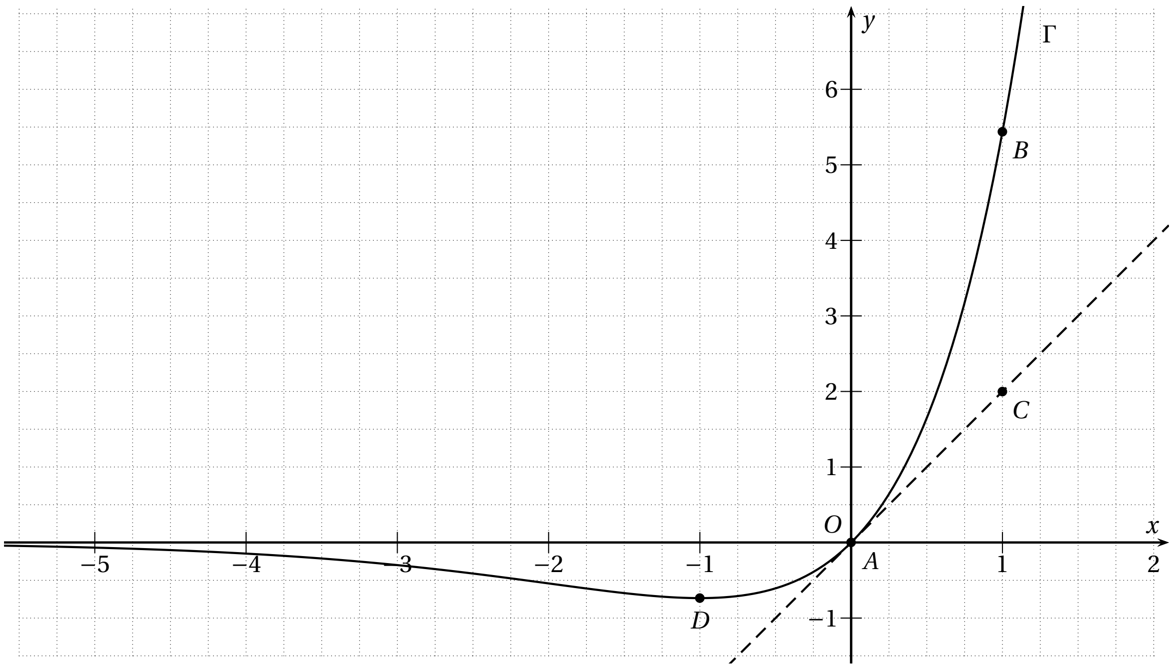
   (a) i. En remarquant que $1,9 = \mathrm{e}^{\ln(1,9)}$, montrer qu'on peut écrire $f(x) = K\mathrm{e}^{px}$.
   *On donnera les valeurs exactes de $K$ et $p$.*
   ii. En déduire $f'(x)$.
   (b) Déterminer l'élasticité-prix instantané de l'offre en fonction du prix $x$.
   (c) Calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 €.
   (d) En donner une interprétation en terme de variation.
4. En vous inspirant des questions précédentes, déterminer l'élasticité-prix de la demande en fonction du prix $x$, calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 € et en donner une interprétation.

# Devoir surveillé n° 6

## Baccalauréat blanc

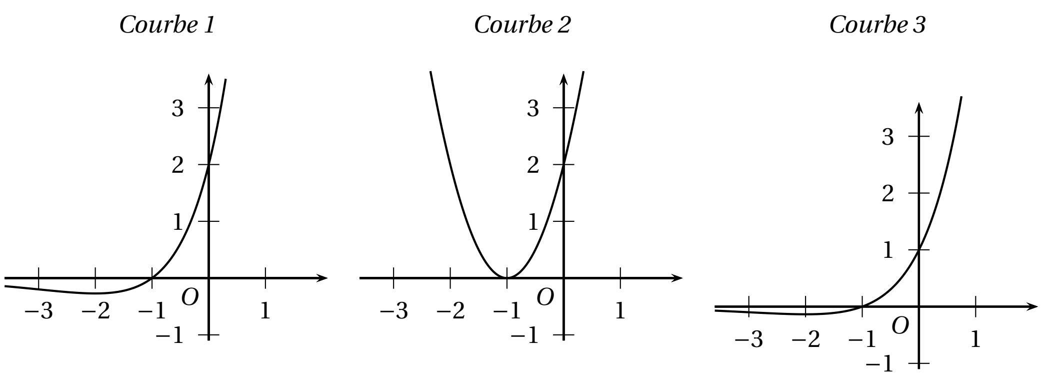
**EXERCICE 6.1.**
***Commun à tous les candidats***

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthogonal, d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $A(0;0)$ et $B(1;2\mathrm{e})$ et la droite $(AC)$, où $C(1;2)$, est la tangente en $A$ à Γ. La tangente à Γ en son point $D$ d'abscisse $-1$ est parallèle à l'axe des abscisses.




**Partie A**

1. (a) Sans justifier, déterminer les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$.
   (b) En justifiant, déterminer les valeurs de de $f'(0)$ et de $f'(-1)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques de la figure ci-dessous, l'une représente la fonction dérivée $f'$ de $f$. Déterminer laquelle en justifiant sa réponse.




**Partie B**

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

*Barème : Une réponse exacte rapporte* 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

La fonction $f$ précédente est, en fait, la fonction définie pour tout réel $x$ par :

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{x}.$$

1. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$. Pour tout réel $x$ on a :
   **a.** $f'(x) = 2\mathrm{e}^x$ **b.** $f'(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x$ **c.** $f'(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^x$
2. L'équation de la tangente à $\Gamma$ au point d'abscisse 0 est :
   **a.** $y = x$ **b.** $y = 2x$ **c.** $y = -x$
3. La valeur exacte de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ est
   **a.** $\sqrt{\mathrm{e}}$ **b.** $-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ **c.** $-0,606$

**EXERCICE 6.2.**
***Pour les candidats de la série L et pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.
La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.
On note $F$ l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\overline{F}$ l'événement contraire de $F$.

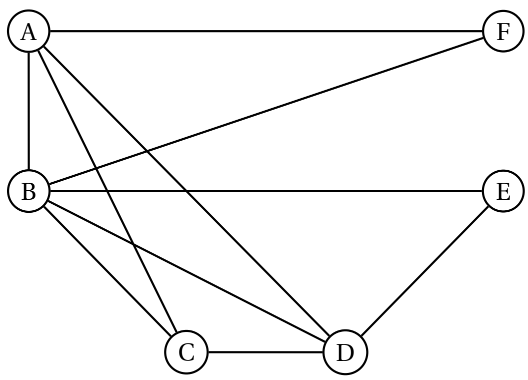
1. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison.
   Quand un appareil est en parfait état, il est toujours accepté à l'issue du test. Quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.
   On note $T$ l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».
   (a) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de $T \cap F$ est $\frac{9}{10}$.
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement « l'appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement et il est accepté à l'issue du test ».
   (d) Montrer que la probabilité de $T$ est $\frac{10}{11}$.
   (e) L'appareil vient d'être accepté. Calculer la probabilité qu'il est en parfait état.
3. On choisit trois appareils au hasard. On admettra que la production est suffisamment importante pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Calculer la probabilité qu'au moins un des trois appareils ne soit pas accepté à l'issue de son test.

**EXERCICE 6.2.**
***Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité***

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.

Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :
- A. Eau
- B. Économie d'énergies
- C. Plantations et cultures locales
- D. Développement durable
- E. Biotechnologies
- F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.
Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).




*Question préliminaire :*
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

**Partie A**

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
2. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   (a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
   (b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

*Dans les deux cas, 3a et 3b, justifiez votre réponse.*

**Partie B**
*Vous répondrez **au choix** à l'**une** des deux questions suivantes en détaillant soigneusement votre réponse.*

**Question 1 :** Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.
Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).
Déterminer le nombre minimum de couleurs pour illustrer chaque zone.

**Question 2 :** Combien y a-t-il de trajets permettant d'aller de la zone A à la zone E en répondant exactement à trois questionnaires ? *On indiquera précisément comment ce nombre a été trouvé et on donnera les trajets.*

---

**EXERCICE 6.3.**
***Commun à tous les candidats***

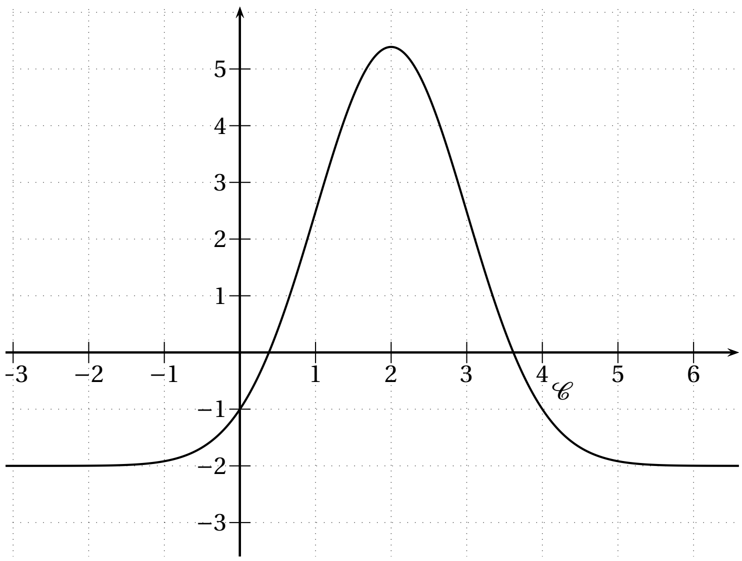
Un site de jeux vidéo en ligne possédait, en 2010, 500 000 abonnés dans le monde.
Un administrateur remarque que, chaque année, 20 000 nouvelles personnes s'abonnent tandis que 10 % ne se réabonnent pas.
On note, pour tout nombre entier naturel $n$, $u_n$ le nombre d'abonnés en milliers en $2010+n$. Ainsi $u_0 = 500$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.
3. On note, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 200$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 0,9v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)$ ?
   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) Montrer que $u_n = 200 + 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel $n$.
4. *Dans les questions qui suivent, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ et interpréter le résultat obtenu en terme de nombre d'abonnés.
   (b) Étudier la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter le résultat obtenu en terme de nombre d'abonnés.

---

**EXERCICE 6.4.**
***Commun à tous les candidats***

**Partie A.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + e^{2x-0,5x^2}$.
On donne sa courbe $\mathscr{C}$ sur la figure ci-dessous.




1. Résoudre l'équation $f(x) = -1$.
2. (a) Montrer que $f'(x) = (2-x)e^{2x-0,5x^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ et dresser le tableau de variations de $f$.
3. (a) Calculer $f''(x)$.
   (b) Étudier la convexité de $f$.

4. (a) Démontrer que, sur l'intervalle $[0; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$.
   (b) Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,01.

   On admettra que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution $\beta$ appartenant à l'intervalle $[3,61; 3,62]$.

**Partie B.**
Une usine produit chaque mois entre 0 et 600 kilogrammes de poudre de perlimpinpin et vend toute sa production.
Le bénéfice, en milliers d'euros, est donné par la fonction $f(x) = -2+\mathrm{e}^{2x-0,5x^2}$ où $x \in [0; 6]$ est la production en centaines de kilogrammes.

1. Déterminer pour quelle production l'usine a un déficit de 1 000 euros.
2. Déterminer quelle doit être la production, au kilogramme près, pour que l'usine soit bénéficiaire.
3. Déterminer pour quelle production le bénéfice de l'usine est maximal et donner ce bénéfice à l'euro près.
4. Déterminer la production pour laquelle la croissance du bénéfice ralentit.

# Corrigé du devoir surveillé n° 6

**EXERCICE 6.1.**
***Commun à tous les candidats***
**Partie A**

1. (a) $f(0) = 0$ et $f(1) = 2\text{e}$. .......... 0,5 pt
   (b) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a$ .......... 0,5 pt
   Donc $f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$ et $f'(-1) = 0$ car il est dit que la tangente à la courbe au point d'abscisse $-1$ est parallèle à l'axe des abscisses. .......... 1 pt
2. • On a :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Les variations de $f$ sont les suivantes | ↘ | | ↗ |
| Donc les signes de $f'(x)$ sont les suivants | $-$ | 0 | $+$ |

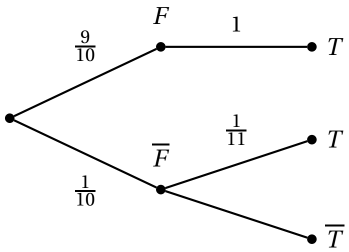
   Donc ce ne peut pas être la courbe 2. .......... 0,5 pt
   • Par ailleurs, d'après la question précédente, $f'(0) = 2$ donc la courbe de $f'$ passe par le point $(0\,;2)$ ce ne peut donc pas être la courbe 3. .......... 0,5 pt
   La courbe de $f'$ est donc la courbe 1. .......... 0,5 pt

**Partie B**
*Barème : Une réponse exacte rapporte* 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*
La fonction $f$ précédente est, en fait, la fonction définie pour tout réel $x$ par : $f(x) = 2x\text{e}^x$.

1. $f = u \times v$ où $u(x) = 2x$ et $v(x) = \text{e}^x$.
   $f' = u'v + uv'$ or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \text{e}^x$.
   Donc $f'(x) = 2\text{e}^x + 2x\text{e}^x = (2+2x)\text{e}^x = 2(x+1)\text{e}^x$, soit la réponse **c**.
2. L'équation de la tangente à $\Gamma$ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2(x-0)+0 \Leftrightarrow y = 2x$ soit la réponse **b**.
3. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\text{e}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{\text{e}}}$ soit la réponse **b**.

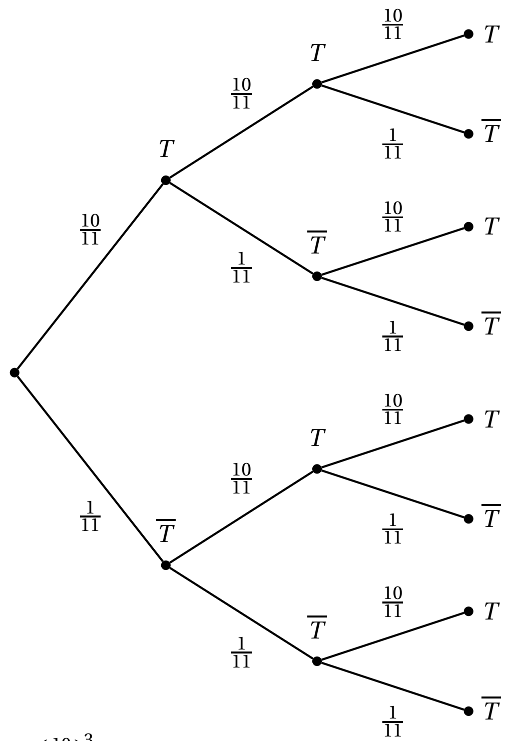
**EXERCICE 6.2.**
***Pour les candidats de la série L et pour les candidats de la série SES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

1. $p(\overline{F}) = 1 - p(F) = \frac{1}{10}$. .......... 0,5 pt
2. (a)




   .......... 1 pt

   (b) $p(T \cap F) = p(F) \times p_F(T) = \frac{9}{10} \times 1 = \frac{9}{10}$. .......... 1 pt
   (c) On cherche en fait $p(\overline{F} \cap T)$. .......... 0,5 pt
   $p(\overline{F} \cap T) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$ .......... 1 pt
   (d) $F$ et $\overline{F}$ réalisant une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a $p(T) = p(T \cap F) + p(\overline{F} \cap T)$. .......... 0,5 pt
   Donc $p(T) = \frac{9}{10} + \frac{1}{110} = \frac{99}{110} + \frac{1}{110} = \frac{100}{110} = \frac{10}{11}$ .......... 1 pt
   (e) On cherche en fait $p_T(F)$. .......... 0,5 pt
   $p_T(F) = \frac{p(T\cap F)}{p(T)} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}} = \frac{9}{10} \times \frac{11}{10} = \frac{99}{100}$. .......... 1 pt
3. L'évènement cherché est le contraire de l'évènement « Aucun appareil n'est pas accepté à l'issue du test » $\Leftrightarrow$ « Tous les appareils sont acceptés à l'issue du test ».
   On peut représenter la situation de la manière suivante :




Donc la probabilité cherchée est $1-\left(\frac{10}{11}\right)^3 \approx 0,25$. ............ 1 pt

**EXERCICE 6.2.**

***Pour les candidats de la série SES ayant suivi l'enseignement de spécialité***

*Question préliminaire :*

Chaque questionnaire est une arête, il suffit donc de compter le nombre d'arêtes, ou bien d'additionner les degrés des sommets dont le résultat est le double du nombre d'arêtes :

| Sommet | A | B | C | D | E | F | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 4 | 5 | 3 | 4 | 2 | 2 | 20 |

Il y a donc 10 arêtes donc 10 questionnaires. ............ 0,5 pt

**Partie A**

1. $G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ............ 1 pt
2. Le graphe n'est pas complet car tous ses sommets ne sont pas adjacents, comme E et F par exemple. ........ 1 pt
   Le graphe est connexe car deux sommets quelconques de ce graphe sont toujours reliés par une chaîne. .... 1 pt
3. Examinons si le graphe contient une chaîne eulérienne.
   Nous avons vu dans la question préliminaire que le graphe comporte exactement deux sommets impairs donc il contient une chaîne eulérienne (et pas de cycle) dont les extrémités sont forcément les sommets impairs : B et C.
   Il n'est donc pas possible de répondre à tous les questionnaires sans repasser deux fois devant le même en commençant par n'importe quelle zone puisqu'il faut débuter en B ou en C.
   Et si on débute en C la dernière zone visitée sera la B. ............ 2 pts

**Partie B** ............ 2,5 pts

*Vous répondrez* ***au choix*** *à l'****une*** *des deux questions suivantes en détaillant soigneusement votre réponse.*

**Question 1 :** Il s'agit en fait de chercher $n$, le nombre chromatique du graphe.

**Minorant de $n$ :** Le sous graphe engendré par les sommets A, B, C et D est complet et d'ordre 4 donc $n \geqslant 4$.

**Majorant de $n$ :** Procédons à une coloration, par exemple en utilisant l'algorithme de WELCH et POWELL

| Sommet | B | A | D | C | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Degré | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| Étape 1 | couleur 1 | | | | | |
| Étape 2 | | couleur 2 | | | couleur 2 | |
| Étape 3 | | | couleur 3 | | | couleur 3 |
| Étape 4 | | | | couleur 4 | | |

Donc $n \leqslant 4$.

**Conclusion :** $n \geqslant 4$ et $n \leqslant 4$ donc $n = 4$.

Le nombre minimum de couleurs pour illustrer chaque zone est donc de 4.

**Question 2 :** Il s'agit de déterminer le nombre de chaînes comportant trois arêtes dont les extrémités sont A et E.
$G^3$ donne le nombre de chaînes de longueur 3 entre les différents sommets.
D'après la calculatrice, le coefficient ligne 1 colonne 5 (ou ligne 5 colonne 1) de $G^3$ est 5.
Il y a donc 5 chaînes de longueur 3 entre les sommets A et E qui sont : AFBE, ABDE, ACDE, ADBE, ACBE.
Ce sont les trajets recherchés.

**EXERCICE 6.3.**
***Commun à tous les candidats***

1. $u_1 = 0,9u_0 + 20 = 470$ et $u_2 = 0,9u_1 + 20 = 443$. .................... 1 pt
2. $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$ pour tout entier naturel $n$. .................... 0,5 pt
3. On note, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_n - 200$.
   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,9u_n + 20 - 200 = 0,9u_n - 180 = 0,9\left(u_n - \frac{180}{0,9}\right) = 0,9(u_n - 200) = 0,9v_n$. .......... 1,5 pt
   $(v_n)$ est donc une suite géométrique (de premier terme $v_0 = u_0 - 200 = 300$ et de raison $q = 0,9$). ..... 0,5 pt
   (b) Comme c'est une suite géométrique $v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel $n$. ............ 0,5 pt
   (c) $v_n = u_n - 200 = 300 \times 0,9^n \Leftrightarrow u_n = 200 + 300 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel $n$. ............ 0,5 pt
4. *Dans les questions qui suivent, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   (a) $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et dont le premier terme est positif, donc $(v_n)$ décroissante :
   $v_{n+1} \leqslant v_n \Leftrightarrow u_{n+1} - 200 \leqslant u_n - 200 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Donc la suite $(u_n)$ est aussi décroissante. .................... 0,75pt
   Cela signifie que le nombre d'abonnés du site ne va faire que baisser d'une année à l'autre. .......... 0,25 pt
   (b) Comme $0 < q < 1$, $q^n$ va tendre vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.
   Donc $u_n$ va tendre vers $200 + 300 \times 0 = 200$. .................... 0,75 pt
   Cela signifie que le nombre d'abonnés du site va tendre vers 200 milliers d'abonnés. ................ 0,25 pt

**EXERCICE 6.4.**
***Commun à tous les candidats***
**Partie A.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2 + e^{2x - 0,5x^2}$.

1. $f(x) = -1 \Leftrightarrow -2 + e^{2x-0,5x^2} = -1 \Leftrightarrow e^{2x-0,5x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x - 0,5x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 - 0,5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2 = 0,5x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$. .................... 0,5 pt
2. (a) $f = -2 + e^u$ avec $u(x) = 2x - 0,5x^2$ donc $f' = 0 + u'e^u$ or $u'(x) = 2 - 0,5 \times 2x = 2 - x$.
   Donc $f'(x) = (2 - x)e^{2x-0,5x^2}$. .................... 1 pt
   (b) $e^{2x-0,5x^2}$ strictement positif donc $f'(x)$ sera du signe de $2 - x$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f$ | | ↗ | $-2 + e^2$ | ↘ | |

   .................... 1 pt
3. (a) $f' = u \times v$ avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^{2x-0,5x^2}$ donc $f'' = u'v + uv'$ or $u'(x) = -1$ et $v'(x) = (2 - x)e^{2x-0,5x^2}$.
   Donc $f''(x) = -1 \times e^{2x-0,5x^2} + (2 - x) \times (2 - x)e^{2x-0,5x^2} = \left(-1 + (2 - x)^2\right)e^{2x-0,5x^2} = (-1 + 4 - 4x + x^2)e^{2x-0,5x^2} = (x^2 - 4x + 3)e^{2x-0,5x^2}$. .................... 1 pt
   (b) Le signe de $f''(x)$ nous donnera la convexité de $f$.
   $e^{2x-0,5x^2}$ strictement positif donc $f''(x)$ sera du signe de $x^2 - 4x + 3$ qui est un trinôme positif sauf entre ses

racines : 1 et 3. Donc :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f'$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | | convexe | |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 pt

4. (a) Sur $[0; 1]$ :
   - $f$ est continue
   - $f$ est strictement croissante
   - $f(0) = -1 < 0 < f(1) = -2 + \mathrm{e}^{1,5} \approx 2,48$

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 pt

   (b) D'après la calculatrice :

   | $x$ | 0,38 | $\alpha$ | 0,39 |
   |---|---|---|---|
   | $f(x)$ | - | 0 | + |

   Donc $0,38 < \alpha < 0,39$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 0,5 pt

   On admettra que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution $\beta$ appartenant à l'intervalle $[3,61; 3,62]$.

**Partie B.**

1. Cela revient à résoudre $f(x) = -1$ or on sait que dans ce cas $x = 0$ ou $x = 4$.
   Donc l'entreprise aura un déficit de 1 000 euros pour une production de 0 kg ou de 400 kg. . . . . . . . . . . . . . . . . . .0,5 pt
2. Cela revient à résoudre $f(x) \geqslant 0$ or, d'après les variations de $f$ et les questions précédentes on a :

   | $x$ | 0 | | $\alpha$ | | $\beta$ | | 6 |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

   Donc $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [\alpha; \beta]$.
   Donc l'entreprise sera bénéficiaire pour une production entre 39 kg et 361 kg. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 pt
3. Cela revient à cherche pour quelle valeur de $x$ $f(x)$ est maximale or d'après le tableau de variation de $f$ le maximum est atteint pour $x = 2$ et vaut $f(2) = -2 + \mathrm{e}^2 \approx 5,389$.
   Donc pour une production de 200 kg le bénéfice est maximum et vaut environ 5 389 euros. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1 pt
4. Cela revient à chercher pour quelles valeurs de $x$ $f'(x)$ est décroissante, or on a vu que c'était pour $x \in [1; 3]$.
   Donc la croissance du bénéfice ralentit entre 100 kg et 300 kg. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 0,5 pt

# Chapitre 6

# Calcul intégral

## Sommaire

## 6.1 Activités

**ACTIVITÉ 6.1.**

**Partie 1 : Vitesse par paliers**

Un véhicule se déplace de la façon suivante : chaque minute il change sa vitesse de la manière indiquée par le tableau ci-dessous.

1. (a) Lire la vitesse du véhicule pendant la 15$^{\text{ième}}$ minute.

   (b) Calculer la somme des distances parcourues de la 1$^{\text{ière}}$ à la 15$^{\text{ième}}$ minute. À quoi correspond ce nombre ?

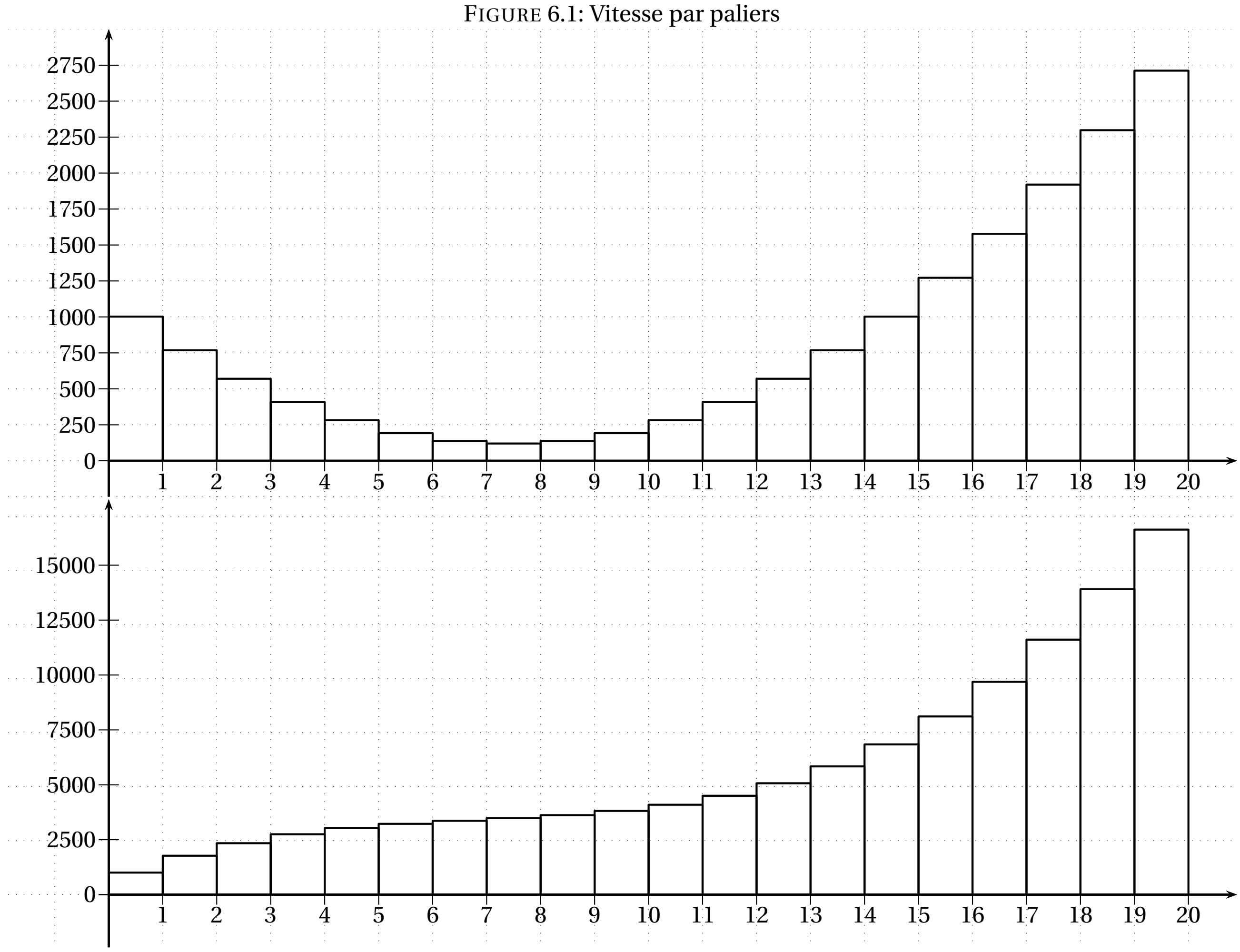
   (c) Où retrouve-t-on ce nombre sur chacun des graphiques de la figure 6.1 de la présente page ?

2. Faire de même pour la 20$^{\text{ième}}$ minute et la somme des distances de la 1$^{\text{ière}}$ à la 20$^{\text{ième}}$ minute.

3. Pendant quelle minute, la vitesse a-t-elle été la plus lente ? Quelle est alors la distance totale parcourue ?

| numéro de la minute | vitesse pendant cette minute en mètres par min | distance totale parcourue en mètres |
|---|---|---|
| 1 | 1002 | 1002 |
| 2 | 768 | 1770 |
| 3 | 570 | 2340 |
| 4 | 408 | 2748 |
| 5 | 282 | 3030 |
| 6 | 192 | 3222 |
| 7 | 138 | 3360 |
| 8 | 120 | 3480 |
| 9 | 138 | 3618 |
| 10 | 192 | 3810 |
| 11 | 282 | 4092 |
| 12 | 408 | 4500 |
| 13 | 570 | 5070 |
| 14 | 768 | 5838 |
| 15 | 1002 | 6840 |
| 16 | 1272 | 8112 |
| 17 | 1578 | 9690 |
| 18 | 1920 | 11610 |
| 19 | 2298 | 13908 |
| 20 | 2712 | 16620 |

FIGURE 6.1: Vitesse par paliers



**Partie 2 : Vitesse continue**

Une autre véhicule a sa vitesse donnée chaque seconde par la fonction suivante,où $x \in [0; 20]$ est le temps en minute :

$$V(x) = 18x^2 - 288x + 1272$$

1. Calculer la vitesse à 15 min, 20 min et 8 min. Comparer au cas précédent.
2. La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la figure 6.2 de la présente page représente la vitesse à $x$ min.
   (a) Comment interpréter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
   (b) Calculer la somme, pour $x$ variant de 1 en 1 :

$$\sum_{x=1}^{x=8} 1 \times V(x) = 1 \times V(1) + 1 \times V(2) + \cdots + 1 \times V(7) + 1 \times V(8)$$

3. On étudie la distance parcourue pendant les huit premières min en calculant les distances parcourues pour chaque 30 s ou 0,5 min.
   (a) À l'aide de la calculatrice, calculer les vitesses de 0,5 min à 8 min de tous les 0,5 min.
   (b) Calculer la somme, pour $x$ variant de 0,5 en 0,5 :

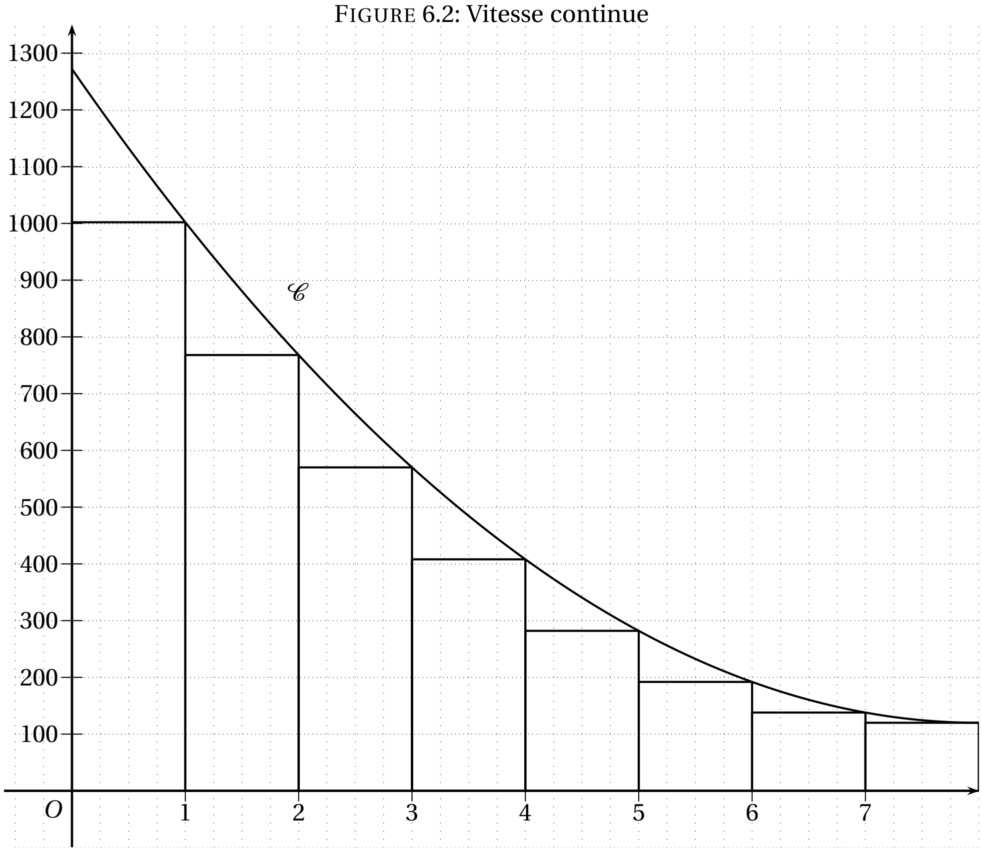
$$\sum_{x=0,5}^{x=8} 0,5 \times V(x) = 0,5 \times V(0,5) + 0,5 \times V(1) + \cdots + 0,5 \times V(8)$$

   Comment pourrait-on représenter cette somme sur le graphique 6.2 ?
4. Si vous disposez d'un tableur, procéder de même en calculant les vitesses tous les secondes.
   Expliquez pourquoi la somme suivante, pour $x$ variant de seconde en seconde, est très proche de l'aire sous la courbe :

$$\sum_{x=\frac{1}{60}}^{x=8} \frac{1}{60} \times V(x)$$

   Comment interpréter cette aire en terme de distance ?

FIGURE 6.2: Vitesse continue



**ACTIVITÉ 6.2** (Fonctions dont on connaît la dérivée)**.**

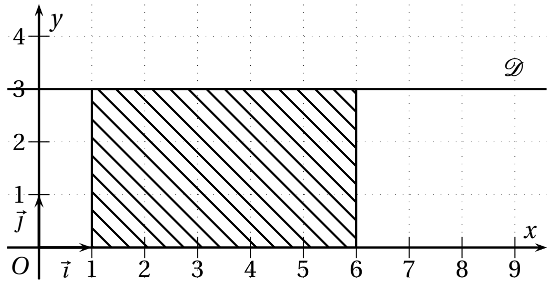
1. Soient les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$.
   (a) Vérifier que $g$ est la dérivée de $f$.
   (b) Trouver d'autres fonctions ayant $g$ pour dérivée.
   (c) Plus généralement, quelles sont les fonctions ayant $g$ pour dérivée ?
2. À l'aide du tableau des dérivées, trouver **une** fonction $F$ ayant pour dérivée la fonction $f$ donnée dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$ ;
   (b) $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$ ;
   (c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$ ;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ ;
   (e) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$ ;
   (f) $f(x) = 6(2x-1)^2$ sur $\mathbb{R}$

**Définition.** Soit $F$ une fonction de dérivée $f$. Alors $F$ est appelée *primitive* de $f$.

**ACTIVITÉ 6.3** (Aire et primitive)**.**

**Fonction constante**

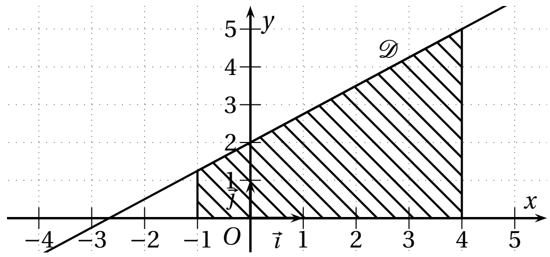
Le droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$ dans le repère ci-contre.



1. Calculer l'aire du rectangle hâchuré, en carreaux.
2. Donner une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
3. Comparer les deux résultats.

**Fonction affine**

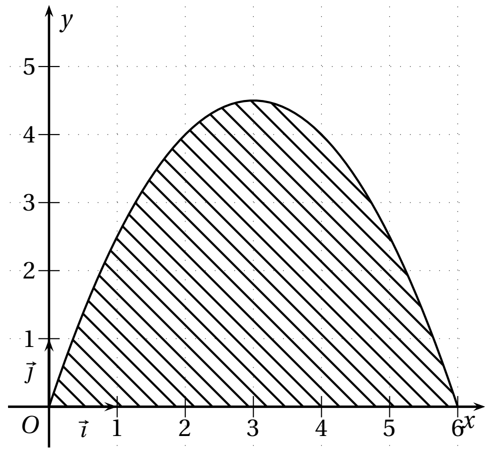
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.



1. Calculer l'aire du trapèze [1] hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-1)$.
3. Comparer les deux résultats.

**Fonction trinôme**

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que : « Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ». On l'admettra.
La parabole ci-contre est d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ pour $x \in [0\,;6]$ et représente la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.



1. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du secteur parabolique hachuré.
2. Déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(0)$.
3. Comparer les deux résultats.

**Fonction de la partie 2 de l'activité 6.1**

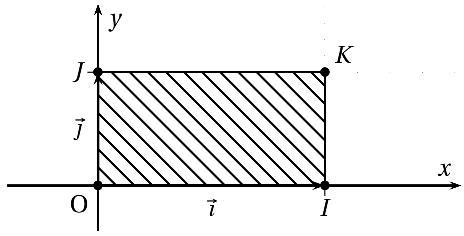
On rappelle que le véhicule a sa vitesse donnée chaque seconde par la fonction suivante : $V(x) = 18x^2 - 288x + 1272$ où $x \in [0\,;20]$ est le temps en minute.

1. Trouver une fonction $D$, primitive de la fonction $V$.
2. En déduire la distance totale parcourue pendant les huit premières minutes.
3. En déduire la vitesse moyenne pendant ces huit premières minutes.
   Comment pourrait-on la représenter sur la figure 6.2 page précédente ?
4. Calculer :
   - la distance totale parcourue entre les quinzième et vingtième minutes
   - la vitesse moyenne pendant cette durée
5. Calculer la distance totale parcoure pendant les vingt premières minutes et la vitesse moyenne pendant cette durée, qu'on convertira en kilomètres par heure.

1. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(b+B)\times h}{2}$ où $b$ est la petite base, $B$ la grande base et $h$ la hauteur du trapèze

## 6.2 Aire sous la courbe d'une fonction positive

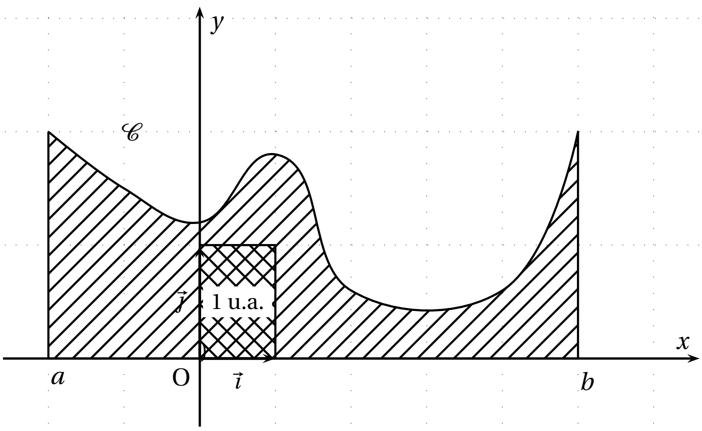
**Définition 6.1.** Soit $P$ un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient $I$, $J$ et $K$ les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire(O$IKJ$) = 1 u.a.




*Remarques.* • O$IKJ$ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
• Si l'on a, par exemple, $OI=3$ cm et $OJ=2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm$^2$.

**Définition 6.2** (Aire sous la courbe d'une fonction positive)**.** Soit $P$ un plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Soit $f$ une fonction continue et **positive** sur un intervalle $I$ dont la représentation graphique est appelée $\mathscr{C}$.
Soient $a \leqslant b$ deux réels de $I$.
On appelle *aire sous la courbe de $f$ de $a$ à $b$* l'aire, **exprimée en u.a.**, du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :
- les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ (à gauche et à droite) ;
- $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$




*Remarques.* • On a vu, dans l'activité 6.1 page 78, que la somme des aires rectangles « situés sous la courbe » s'approchait d'autant plus de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que la base du rectangle était petite. En extrapolant ce raisonnement, il faut comprendre la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ de la façon suivante : les rectangles sous la courbe sont de base d$x$, infiniment petite, de hauteur $f(x)$, le symbole $\displaystyle\int$ représente la somme infinie de ces rectangles, $a$ et $b$ sont les bornes de la somme.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit aussi « somme de $a$ à $b$ de $f(x)\mathrm{d}x$ ».
• La variable peut être indifférement $t$, $x$, $y$... On dit que c'est une variable *muette*.

## 6.3 Primitive d'une fonction

### 6.3.1 Définition et conséquences

**Définition 6.3.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$.
On appelle *primitive de $f$* toute fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $F'=f$ sur $I$.

**Théorème 6.1.** *Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$*

On l'admettra.

**Théorème 6.2.** *Soit $F$ une primitive de $f$ sur un intervalle $I$.*
*Alors $G$ est une primitive de $f$ sur $I$ si et seulement si $G=F+k$, où $k\in\mathbb{R}$, pour tout $x\in I$.*

*Preuve.* • Supposons que $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$ sur $I$. Montrons qu'alors $G = F + k$.
Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.
- Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitive de $f$.
$G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc $G$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$.

♢

### 6.3.2 Primitive satisfaisant une condition initiale

**Propriété 6.3.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
*Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.*

*Preuve.* • *Existence.*
$f$ étant continue, elle admet des primitives. Soit $H$ l'une d'elles.
Supposons que $H(x_0) = z_0 \neq y_0$.
D'après le théorème 6.2, la fonction $F = H - z_0 + y_0$ est aussi une primitive de $f$.
Or $F(x_0) = H(x_0) - z_0 + y_0 = z_0 - z_0 + y_0 = y_0$. Il existe donc bien une primitive $F$ de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$.
- *Unicité.*
Soient $F$ et $G$ deux primitives telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$.
D'après le théorème 6.2, $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k \Leftrightarrow y_0 = y_0 + k \Leftrightarrow k = 0$.
Donc $G = F$.

♢

**Exemple 6.1.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer **la** primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.
- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de $f$ sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche $k$ tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

### 6.3.3 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau 6.1 page ci-contre donne, pour chaque fonction $f$ de référence, les fonctions primitives $F$ sur l'intervalle considéré.
Les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

### 6.3.4 Opérations sur les primitives

Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$. On a alors les propriétés résumées dans le tableau ci-dessous.
Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

| Conditions | La fonction s'écrivant sous la forme | admet comme primitive |
|---|---|---|
| | $u' + v'$ | $u + v$ |
| Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante | $ku'$ | $ku$ |
| | $u'\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u$ |

TABLE 6.1: Primitives des fonctions usuelles

| Fonction $f$ | Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante) | Intervalle $I$ |
|---|---|---|
| $f(x) = m$ (constante) | $F(x) = mx + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x$ | $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^3$ | $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$ | $\mathbb{R}$ |
| Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\frac{1}{x} + k$ | $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^3}$ | $F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + k$ | $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| Plus généralement : $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$ | $F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$ | $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ | $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = \ln(x) + k$ | $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ | $F(x) = \mathrm{e}^x + k$ | $\mathbb{R}$ |

## 6.4 Intégrale d'une fonction

### 6.4.1 Définition

**Définition 6.4.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels de $I$. Soit $F$ une primitive de $f$. On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel, noté $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, égal à $F(b) - F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

On dit que $a$ et $b$ sont les bornes de l'intégrale.

On admettra que dans le cas d'une fonction $f$ positive avec $a \leqslant b$, donc lorsque l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe de $f$, cette aire est bien donnée par $F(b) - F(a)$.

*Remarques.* • On note aussi : $F(b) - F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$.
- Le choix de la primitive $F$ n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si on prend à la place une primitive $G = F + k$, on a $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$.
- Dans les cas où $f$ n'est pas toujours positive ou bien quand $a \geqslant b$, l'intégrale n'est pas l'aire sous la courbe mais est une quantité mathématique (qui n'est pas forcément positive).

### 6.4.2 Propriétés de l'intégrale

*Les preuves des propriétés seront faites en classe.*

**Propriété 6.4.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$. Alors*

$$\int_a^a f(t)dt = 0$$

**Interprétation graphique** : dans le cas d'une fonction positive, $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t$ peut être vue comme l'aire d'un rectangle de hauteur $f(t)$ et de base $a - a = 0$, donc son aire est égale à zéro.

**Propriété 6.5.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$ et $b$ deux réels de $I$. Alors*

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

**Propriété 6.6** (Linéarité)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels de $I$ et $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques. Alors :*

- $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$
- $\displaystyle\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- *Plus généralement :* $\displaystyle\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

**Interprétation graphique** : dans le cas de fonctions positives, avec $a \leqslant b$ et $\alpha$ et $\beta$ positifs, on peut interpréter ces propriétés de la façon suivante :
- l'aire sous la courbe de $\alpha f$ est égale à $\alpha$ fois l'aire sous la courbe de $f$ ;
- l'aire sous la courbe de $f+g$ est égale à la somme de l'aire sous la courbe de $f$ et de l'aire sous la courbe de $g$.

**Propriété 6.7** (Inégalités)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $I$ et $a \leqslant b$ deux réels de $I$.*

- *Si $f \geqslant 0$ sur $I$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
- *Si $f \leqslant g$ sur $I$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

*Remarque.* Les réciproques sont fausses.

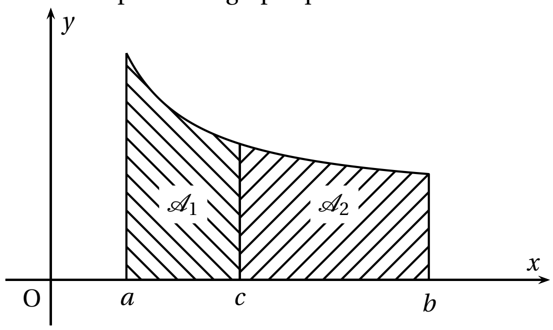
**Interprétation graphique** : dans le cas de fonctions positives, comme $a \leqslant b$, on peut interpréter ces propriétés de la façon suivante : si $f \leqslant g$ alors l'aire sous la courbe de $f$ est inférieure à l'aire sous la courbe de $g$, le premier point étant un cas particulier de ce cas général (l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à zéro est égale à zéro).

**Propriété 6.8** (Relation de CHASLES)**.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a$, $b$ et $c$ trois réels de $I$. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

**Interprétation graphique** : Dans le cas où $a \leqslant c \leqslant b$ et où $f \geqslant 0$, on peut interpréter la relation de CHASLES en termes d'aires : sur la figure 6.3 de la présente page, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

FIGURE 6.3: Interprétation graphique de la relation de CHASLES




### 6.4.3 Intégrale et primitive

**Théorème 6.9.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$. Alors la fonction $F$ définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et a pour dérivée $f$.*

On admettra que $F$ est dérivable et la preuve que sa dérivée est $f$ sera faite en cours.

*Remarque.* Par définition, $F$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

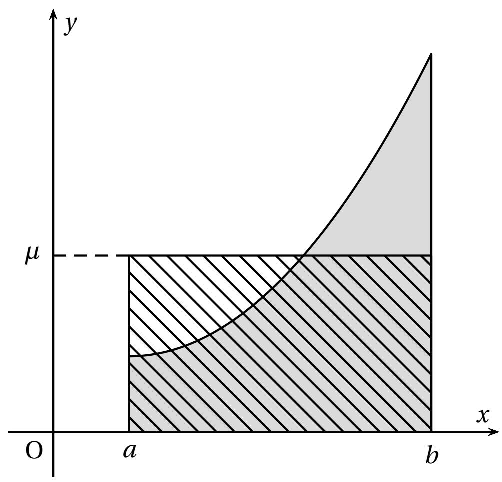
### 6.4.4 Valeur moyenne d'une fonction

**Définition 6.5.** La valeur moyenne d'une fonction $f$ continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

*Remarques.* • On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de $f$.
• La valeur moyenne de $f$ est dans la même unité que celle de $f$.

*Remarque.* Dans le cas où $f \geqslant 0$, on peut interpréter la valeur moyenne en termes d'aires (ici $a < b$).
On cherche un nombre $\mu$ tel que, en remplaçant chaque valeur de $f$ par $\mu$, la somme des $\mu \mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction $f$.
Or l'aire sous la courbe entre $a$ et $b$ d'une fonction constante $\mu$ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hâchurée sont égales quand $\mu$ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.




## 6.5 Exercices

### 6.5.1 Primitives

**EXERCICE 6.1.**
Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer $F$, une primitive de $f$.

1. $f(x) = 5$ ;
2. $f(x) = x$ ;
3. $f(x) = 3x$ ;
4. $f(x) = 3x^2$ ;
5. $f(x) = -4x+3$ ;
6. $f(x) = x^2$ ;
7. $f(x) = 7x-1$ ;
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$ ;
9. $f(x) = 4x^3 + x$ ;
10. $f(x) = \frac{x-5}{3}$ ;
11. $f(x) = -5x^2$ ;
12. $f(x) = x^4$ ;
13. $f(x) = 2x^5 + 3x$ ;
14. $f(x) = \frac{3x^4+x}{2}$ ;
15. $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

**EXERCICE 6.2.** 1. Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, donner l'ensemble des primitives $F$ de $f$ sur l'intervalle $I$.

(a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ sur $I = \mathbb{R}$ ;
(b) $f(x) = -x^2 + 1$ sur $I = \mathbb{R}$ ;
(c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $I = ]0\,;\,+\infty[$ ;
(d) $f(x) = 5x + \frac{2}{x^2}$ sur $I = ]0\,;\,+\infty[$.

2. Soit $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$.
Déterminer les primitives $F$ de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
Existe-t-il une primitive de $f$ prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$ ?

**EXERCICE 6.3.**
Pour chacune des fonctions $f$ ci-dessous, donner toutes les primitives de $f$ sur $I$.

1. $f(x) = x^9$ ;
2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ;
3. $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$ ;
4. $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$ ;
5. $f(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{x}$ ;
6. $f(x) = 2x - 7 - \frac{5}{x^3}$.

**EXERCICE 6.4.**
Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, donner une primitive $F$ vérifiant la condition imposée.

1. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ; $F(2) = 3$ ;
2. $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 5 + \frac{3}{x^2}$ ; $F(3) = -1$.

**EXERCICE 6.5.**
On considère la fonction $F$ définie par $F(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée $F'$ de la fonction $F$ et dresser le tableau de variation de la fonction $F$.
2. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.
3. On considère la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   Déterminer la primitive $G$ de $g$ vérifiant $G(2) = 0$.

### 6.5.2 Calcul intégral

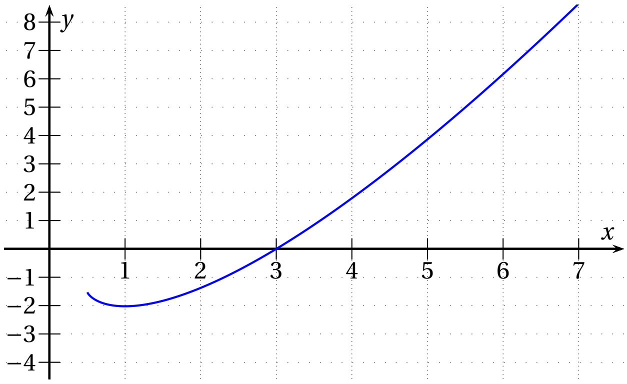
**EXERCICE 6.6.**
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_4^0 \left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\mathrm{d}x$;

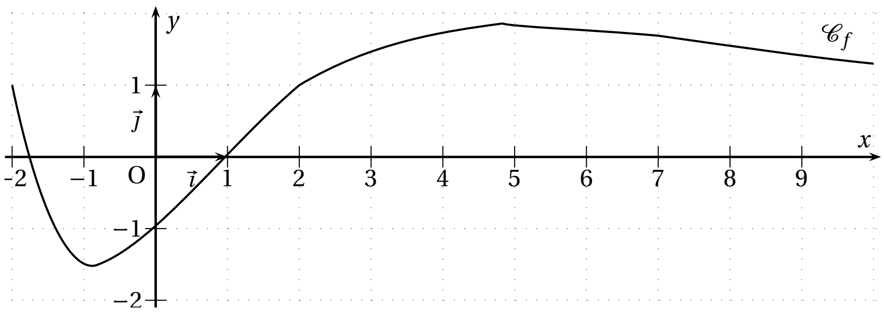
### 6.5.3 Lectures graphiques

**EXERCICE 6.7** (D'après Amérique du Nord 2 007)**.**
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre représente une fonction $F$ définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\,;-2)$.
On note $f$ la fonction dérivée de $F$.

1. À l'aide du graphique, donner les variations de $F$ et en déduire le signe de $f$.
2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.




**EXERCICE 6.8** (D'après Polynésie 2005)**.**
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $f$ dans un repère orthonormal.




On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction $f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive $F$ de $f$ qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5\,;5,43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée $f'$ de $f$.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à $10^{-2}$.

1. (a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.

(c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de $F$ sur l'intervalle $[-2\,;10]$.

2. (a) Déterminer $\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$. La représenter en rouge sur le graphique.

   (b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où $f$ est positive.

   (c) Donner la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[1\,;5]$. La représenter en bleu sur le graphique.

**EXERCICE 6.9.**

On a représenté, sur la figure 6.4 page suivante, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\Gamma$ d'une fonction $g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

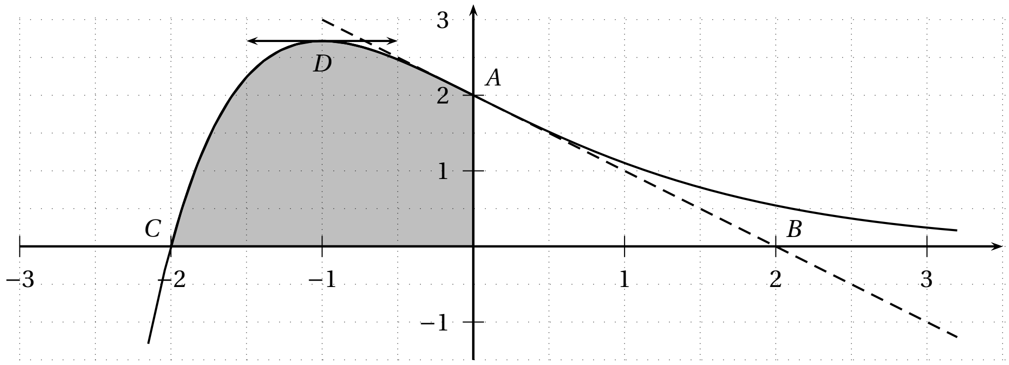
La courbe $\Gamma$ passe par les points $O(0\,;0)$ et $A(2\,;2)$. La droite $(AB)$ est la tangente en $A$ à la courbe $\Gamma$. La tangente à $\Gamma$ au point $C$ d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Le domaine hachuré $\mathscr{D}$ est délimité par les droites d'équation $x=2$, $x=3$, l'axe des abscisses et la courbe $\Gamma$.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Avec la précision permise par le graphique :
   (a) Déterminer les solutions des équations suivantes :
   i. $g(x)=2\,;$ ii. $g(x)=-2\,;$ iii. $g(x)=4$.
   (b) Plus généralement, déterminer, selon les valeurs de $\lambda$, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=\lambda$.
3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 6.5, représente la fonction dérivée $g'$ de $g$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. (a) Une des représentations graphiques page suivante, figure 6.5, représente une primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

**EXERCICE 6.10.**

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\Gamma$, dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 1 cm sur l'axe des ordonnées), d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. La courbe $\Gamma$ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2\,;0)$ et la droite $(AB)$ est la tangente en $A$ à $\Gamma$. La tangente à $\Gamma$ en son point $D$ d'abscisse $-1$ est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par les axes de coordonnées et par la courbe $\Gamma$.




1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x)>1\,;$ • $f(x)\leqslant 2\,;$ • $f(x)\geqslant 3\,;$ • $f(x)<4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée $f'$ de $f$. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
4. (a) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
   (b) Déterminer alors l'aire du domaine grisé $\mathscr{D}$ en cm$^2$.

*Courbe 1* *Courbe 2* *Courbe 3*

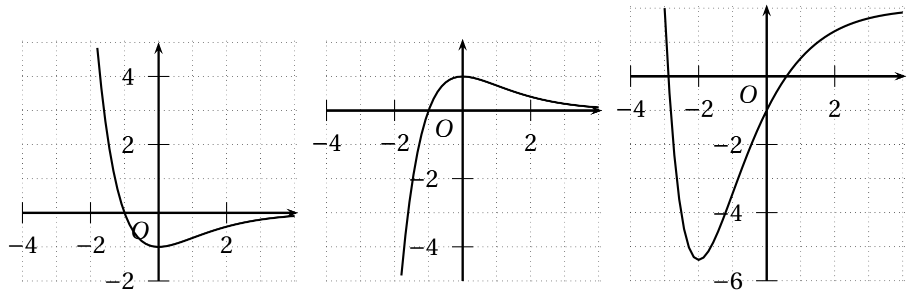


FIGURE 6.4: Courbe Γ de l'exercice 6.9

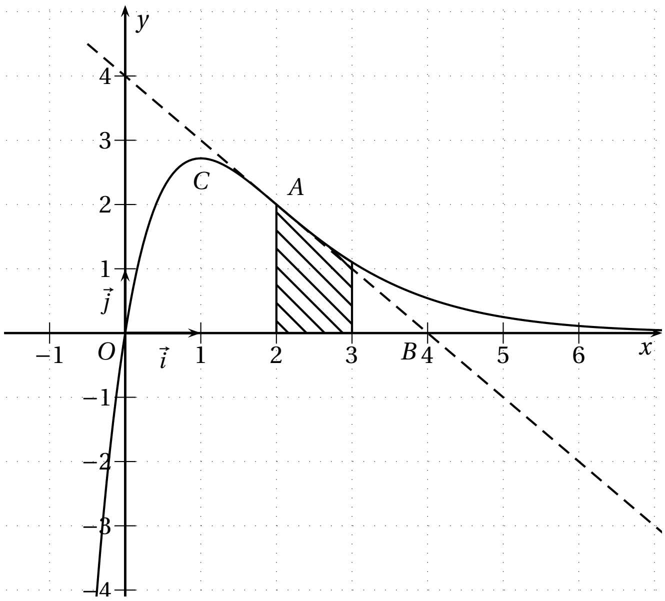
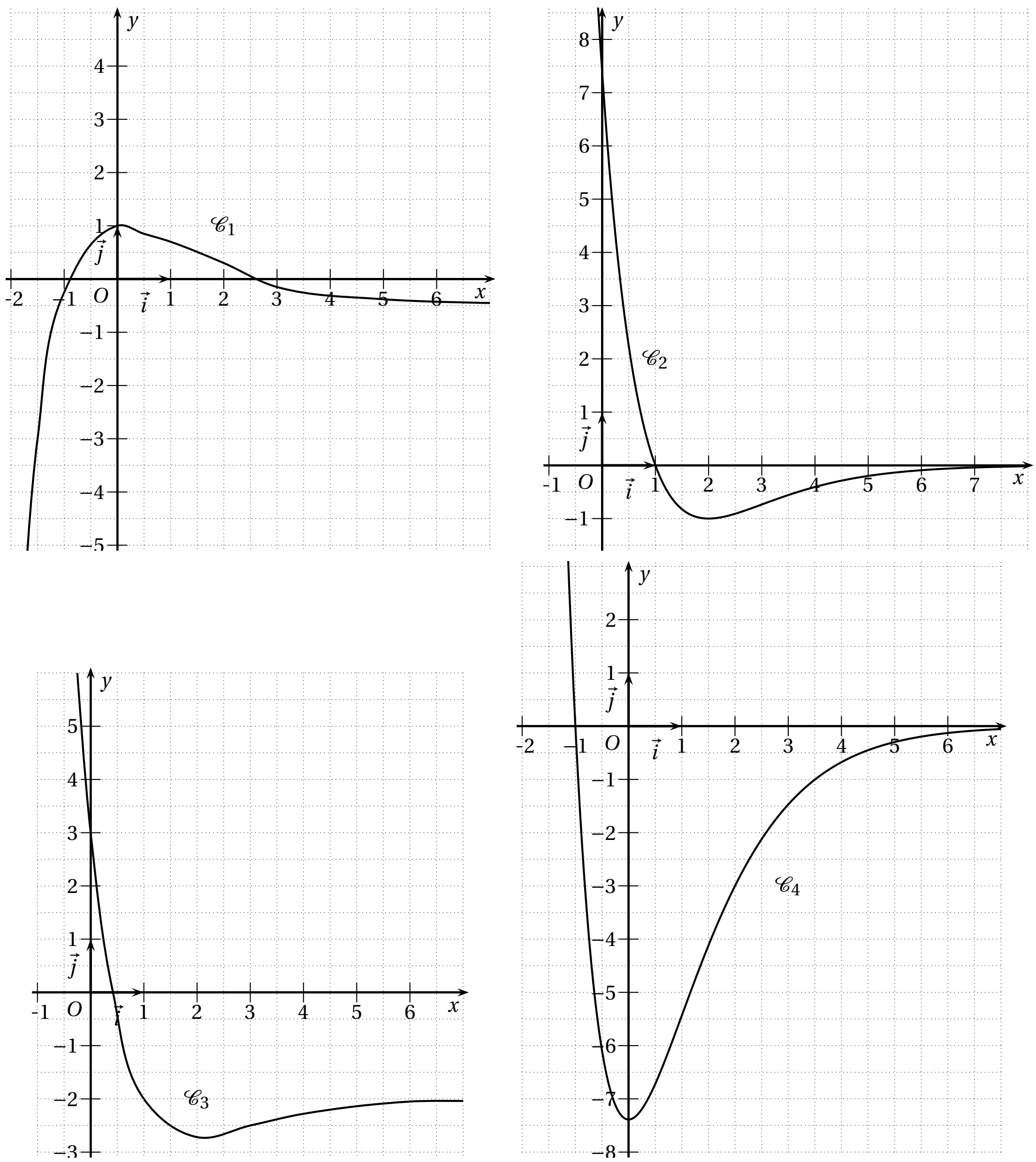



FIGURE 6.5: Courbes de l'exercice 6.9



### 6.5.4 Sujets de synthèse

**EXERCICE 6.11** (D'après Asie Juin 2 007)**.**
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction $f$ définie sur $[1\,;\,6]$ par $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de $x$ centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

**EXERCICE 6.12** (D'après Liban 2 007)**.**
On considère la fonction $f$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure 6.6 page suivante dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A $(1\,;\,0)$ et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$ où B est le point de coordonnées $(2\,;\,\mathrm{e}-1)$. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

**Partie A**

Pour tout réel $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln(x)$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de $a$ et $b$.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.
3. Justifier que $a$ et $b$ sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} a\mathrm{e}+b & = & 0 \\ a+b & = & \mathrm{e}-1 \end{array}\right.$
   Déterminer $a$ et $b$.

**Partie B**

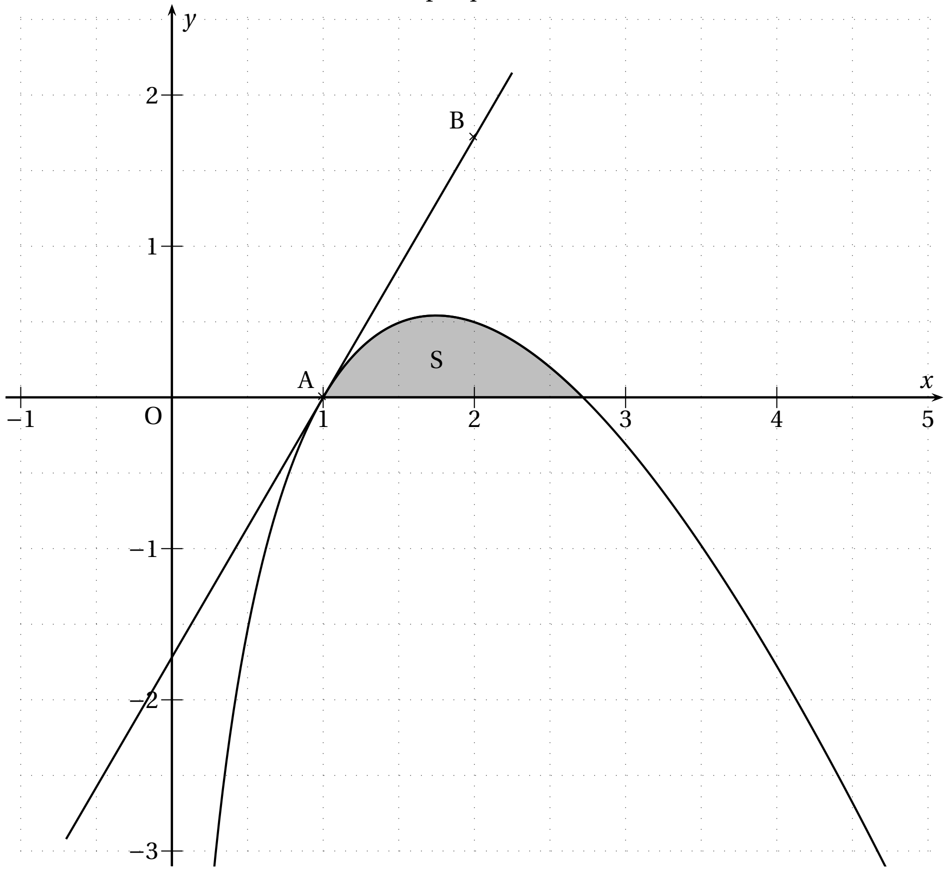
On admet que la fonction précédente est définie pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (\mathrm{e}-x)\ln(x)$.
On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit $F$ la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \mathrm{e}x\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 - \mathrm{e}x$
   Montrer que $F$ est une primitive de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner la valeur approchée à $10^{-1}$ de S en cm$^2$.

**EXERCICE 6.13.**
On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 5\frac{\ln(x)}{x} + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Calculer $f'(x)$ où $f'$ est la fonction dérivée de $f$, puis étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de $f$ ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.
2. On considère la fonction $F$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = \frac{5}{2}(\ln(x))^2 + 3x$
   (a) Démontrer que $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln(2))^2 + b$ avec $a$ et $b$ deux réels à déterminer.
3. (a) Préciser le signe de $f$ sur l'intervalle $[2\,;\,4]$.
   (b) Donner une interprétation graphique de $I$.
4. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique $x$ milliers de pièces est égal à $f(x)$.
   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

FIGURE 6.6: Graphique de l'exercice 6.12

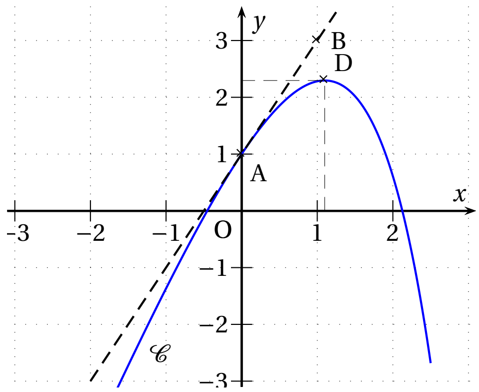



**EXERCICE 6.14** (Antilles – Septembre 2 009)**.**
On considère une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$ par : $f(x) = a\mathrm{e}^{x} + bx + c$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels fixés.

Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $f$ est représentée sur la figure ci-contre.

On dispose des renseignements suivants :

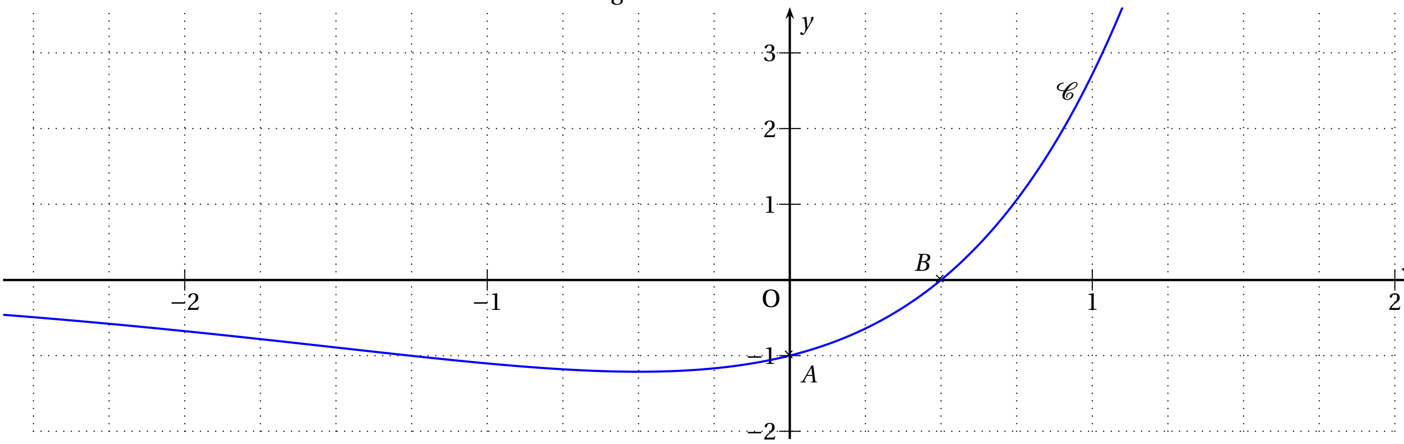
- $\mathscr{C}$ passe par A$(0 ; 1)$.
- B est le point de coordonnées $(1 ;\ 3)$ ; la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse $\ln(3)$.




1. On désigne par $f'$ la dérivée de la fonction $f$. Traduire les renseignements précédents par trois égalités utilisant $f$ ou $f'$.
2. En résolvant un système, déterminer $a$, $b$ et $c$.
3. On admet à partir de maintenant que $f(x) = -\mathrm{e}^{x} + 3x + 2$.
   (a) Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
   (b) Montrer que $f$ s'annule exactement une fois sur $[-2 ; \ln(3)]$ en un réel $\alpha$. Donner, en justifiant, une valeur approchée au centième près de $\alpha$.
   (c) Pour la suite, on admet que $f$ s'annule exactement une fois sur $[\ln(3) ; 3]$ en un réel $\beta$.
   Déterminer le signe de $f$ sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
4. (a) Déterminer une primitive de $f$ sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
   (b) On considère la surface $\mathscr{S}$ délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = \ln(3)$.
   Hachurer $\mathscr{S}$ sur la figure en annexe.
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire. On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au centième.

**EXERCICE 6.15.**
On considére la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x$ ; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure 6.7 de la présente page (unités : 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

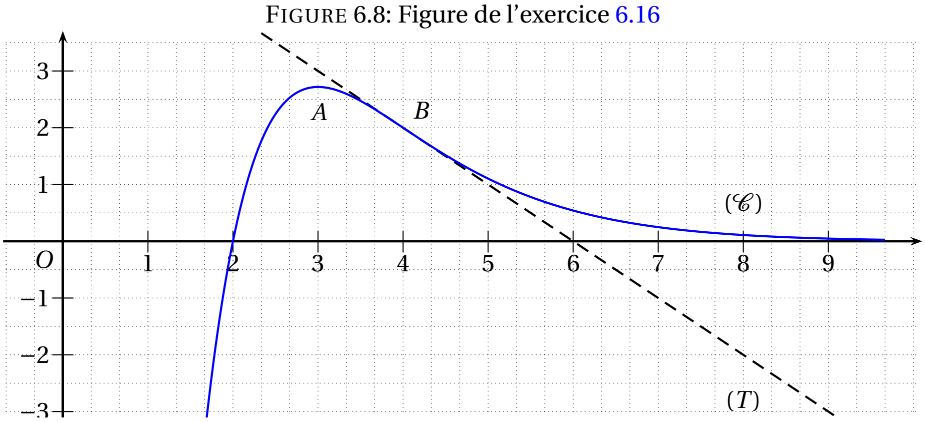
FIGURE 6.7: Figure de l'exercice 6.15




1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. (a) Montrer que $f'$, la dérivée de $f$, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ puis en déduire le tableau des variations de $f$ (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A$ et la tracer sur le graphique.
3. (a) Montrer que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de $f$.
   (b) Colorier le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
   (c) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis en déduire la valeur de l'aire du domaine colorié en cm$^2$ arrondie au centième.

**EXERCICE 6.16** (D'après Métropole – La Réunion – Septembre 2 007)**.**
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur la figure 6.8 de la présente page, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $R$. On note $f'$ sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en $A$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente $(T)$ à la courbe en $B$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

FIGURE 6.8: Figure de l'exercice 6.16




**Partie I : Lectures graphiques**

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel $x$ de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$ ?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

**Partie II : Étude de la fonction**

La fonction $f$ représentée sur la figure 6.8, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
2. (a) Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

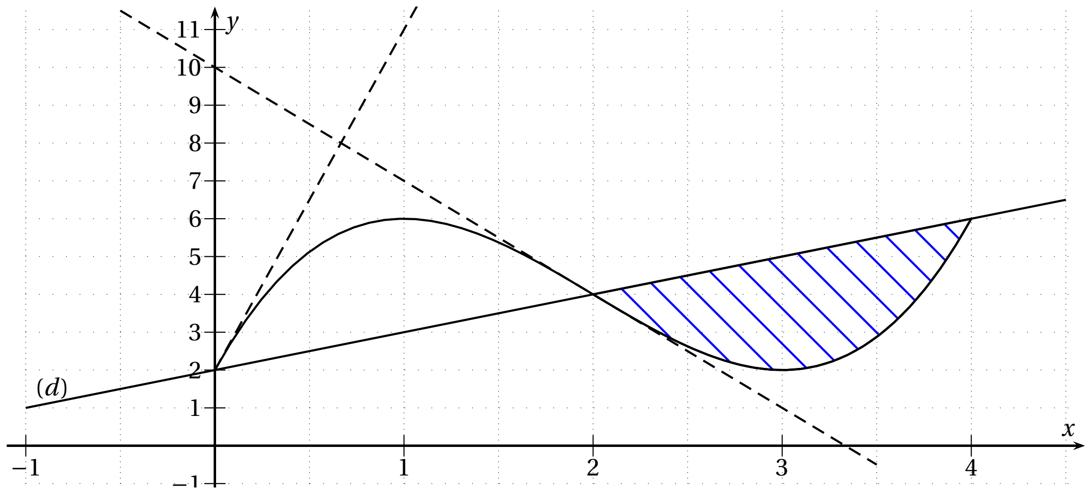
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
3. On admet que la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   En déduire la valeur moyenne $m$ de $f$ sur l'intervalle $[2\,;10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.

**Partie III : Étude d'un bénéfice**

Une entreprise vend $x$ centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend $x$ centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8\,;4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1'€).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

**EXERCICE 6.17** (D'après Centres étrangers 2 007).
On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $I = [0\,;4]$ ; sa courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal (1 unité = 2,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite $(d)$ d'équation $y = x+2$.
Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.




1. Par lecture graphique, déterminer :

   (a) $f(0)$ et $f'(0)$ ; (b) $f(1)$ et $f'(1)$ ; (c) $f(2)$ et $f'(2)$ ;

   (d) l'ensemble des réels $x$ tels que $f(x) \leqslant x+2$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :

   (a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$ (b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$ (c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où $m,\ n,\ p$ et $q$ sont des réels.

   (a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer $p$ et $q$.

   (b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer $m$ et $n$.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

   (a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.

   (b) Calculer, en cm$^2$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.

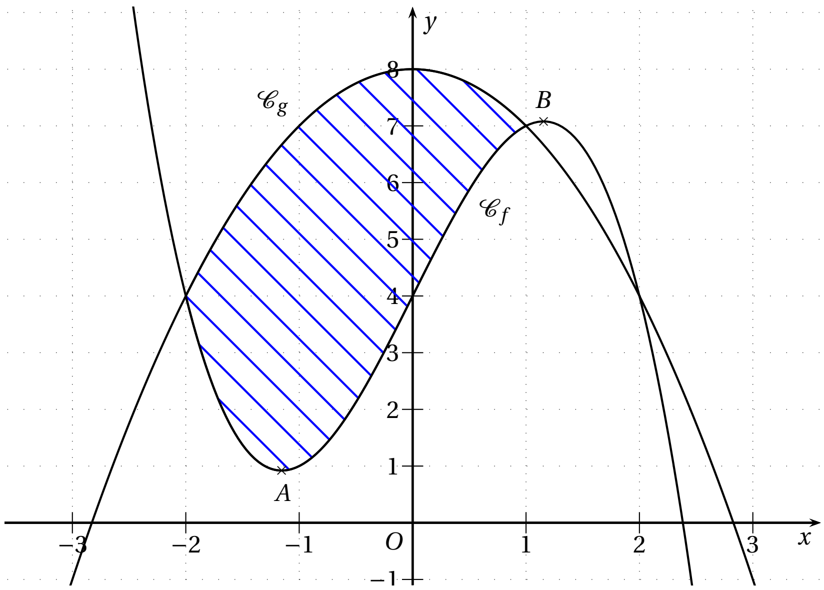
# Devoir surveillé n° 7

## Logarithme népérien – Calcul intégral

**EXERCICE 7.1** (6,5 points)**.**
On a tracé, sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives de $f$ et de $g$, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x + 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 8$$

On appelle $f'$ la fonction dérivée de $f$. $A$ et $B$ sont les sommets de $\mathscr{C}_f$.




1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de $f$. *On indiquera les valeurs approchées au centième des extremums locaux.*
2. Déterminer les valeurs exactes des abscisses de $A$ et de $B$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Donner une valeur approchée de $\alpha$ au dixième.
   (c) Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
4. Soit $F$ une primitive de $f$.
   À l'aide de ce qui précède et sans calcul, déterminer les variations de $F$.
5. (a) Déterminer $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
   (b) Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur l'axe des abscisses et 0,75 cm sur celui des ordonnées, déterminer $\mathscr{A}$ en cm$^2$.

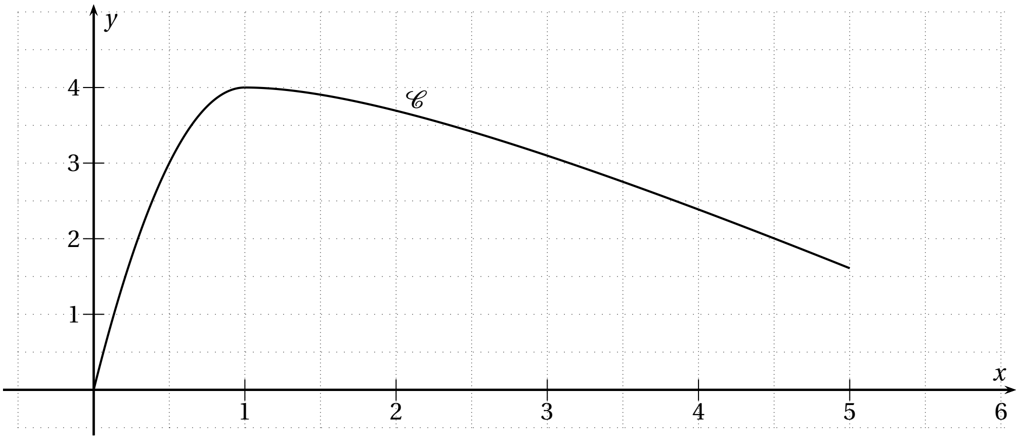
**EXERCICE 7.2** (7,5 points)**.**
Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si $x$ est le temps exprimée en minutes, le débit, exprimée en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction $f$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -4x^2 + 8x & \text{pour } x \in [0\,;\,1] \\ f(x) = \ln x - x + 5 & \text{pour } x \in [1\,;\,5] \end{cases}$$

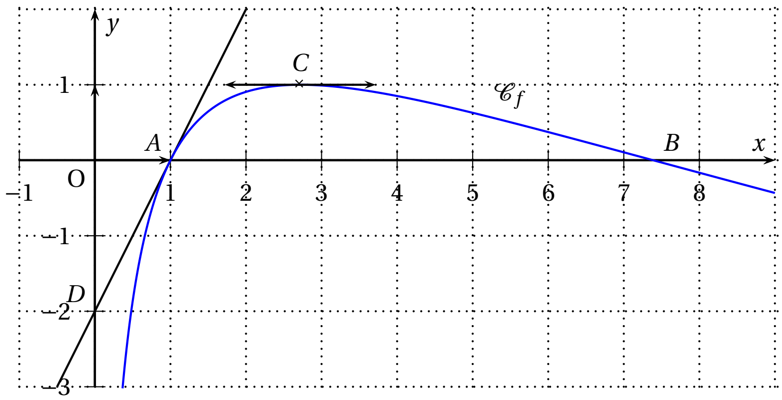
La courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donnée par $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $f$ est croissante sur $[0\,;\,1]$, et décroissante sur $[1\,;\,5]$.
2. (a) Donner une primitive, $F$, de la fonction $f$ sur $[0\,;\,1]$.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

3. (a) Soient $g$ et $G$ les fonctions définies sur $[1\,;5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.
   Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $[1\,;5]$.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes arrondi à l'unité.
5. On rappelle que la valeur moyenne $m$ d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a\,;b]$ où elle est continue est donnée par : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer la valeur approchée, arrondie au millième, de $f$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   (b) Interpréter ce nombre en terme d'appels reçus.
   (c) Représenter ce nombre sur le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.




**EXERCICE 7.3** (6 points).
On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $A(1\,;0)$ et en $B$.
La tangente en $C$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en $A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $D$.




1. Déterminer l'abscisse du point $B$ (la valeur exacte est demandée).
2. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point $C$ et l'ordonnée du point $D$ (les valeurs exactes sont demandées).
3. (a) Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4]$.
   Démontrer que $g$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Calculer $\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

# Chapitre 7

# Lois de probabilité à densité

## Sommaire



## 7.1 Quelques rappels

### 7.1.1 Variable aléatoire discrète

**Définition.** Soit une expérience aléatoire dont l'univers des issues est un ensemble $\Omega$ fini. Une *variable aléatoire*, dite *discrète*, est une **fonction** qui à chaque élément de $\Omega$ associe un réel $k$.

**Définition.** Soit $X$ une variable aléatoire discrète dont les valeurs sont dans l'ensemble $\Omega_X = \{k_1 ; k_2 ; \ldots ; k_n\}$, un ensemble fini de valeurs.
L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire $X$, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, sont respectivement les nombres :

$$\begin{aligned}
E(X) &= p(X = k_1) \times k_1 + p(X = k_2) \times k_2 + \ldots + p(X = k_n) \times k_n \\
V(X) &= p(X = k_1) \times (k_1 - E(X))^2 + p(X = k_2) \times (k_2 - E(X))^2 + \ldots + p(X = k_n) \times (k_n - E(X))^2 \\
&= \left[p(X = k_1) \times k_1^2 + p(X = k_2) \times k_2^2 + \ldots + p(X = k_n) \times k_n^2\right] - (E(X))^2 \\
\sigma(X) &= \sqrt{V(x)}
\end{aligned}$$

### 7.1.2 Loi binomiale

**Définition.** Une *épreuve de* BERNOULLI est une expérience aléatoire pour laquelle il n'y a que deux issues, nommées, en général, « succès » et « échec » et notées, en général, $S$ et $\overline{S}$. On note $p$ la probabilité du succès.
Quand une même épreuve de BERNOULLI est répétée plusieurs fois de manière indépendante, on dit qu'on est en présence d'un *schéma de* BERNOULLI. On note $n$ le nombre de fois que l'épreuve de BERNOULLI est répétée.
Soit $X$ la variable aléatoire qui à chaque issue d'un schéma de BERNOULLI associe le nombre de succès qu'elle comporte. On appelle *loi binomiale* la loi de probabilité de $X$. On la note $\mathscr{B}(n,p)$.

**Propriété.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :*
- $p(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$
- *L'espérance de $X$ est $E(X) = np$*
- *La variance de $X$ est $V(X) = np(1-p)$*
- *L'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$*

### 7.1.3 Primitive s'annulant en $a$

**Théorème.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I = [a;b]$. Alors la fonction $F$ définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$, a pour dérivée $f$ et est donc, par définition, la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

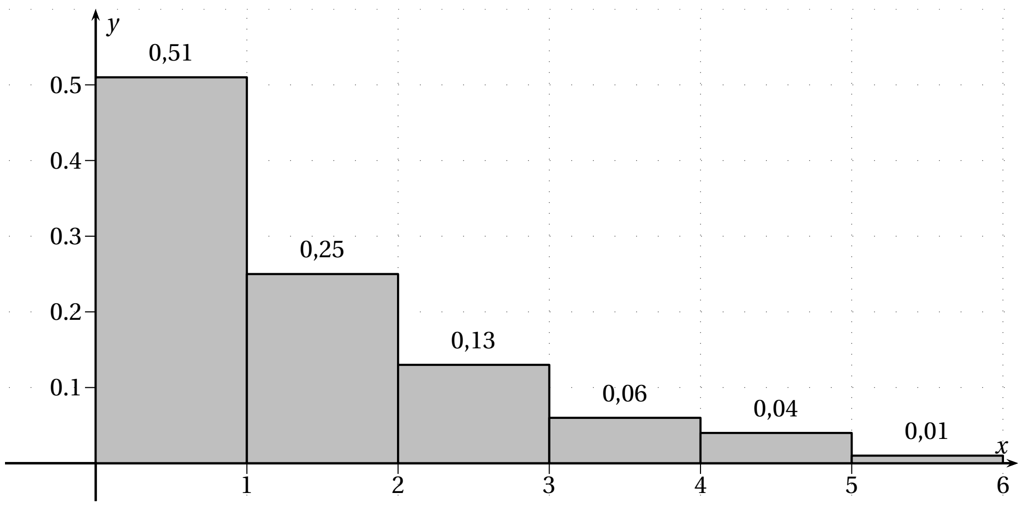
## 7.2 Activités

### 7.2.1 Introduction de la fonction de densité

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de six kilomètres d'un éco-point (site pour déposer bouteille de verre, papier recyclable, etc.).

1. Un relevé statistique a permis d'établir l'histogramme des fréquences de la figure 7.1 de la présente page.

FIGURE 7.1: Premier histogramme des fréquences




Ainsi, la fréquence de la population habitant entre 0 et 1 km d'un éco-point est de 0,51 ou, dit autrement, 51 % de la population habite entre 0 et 1 km d'un éco-point.

(a) Quel est le pourcentage d'habitants résidant à moins de 3 km d'un éco-point ?

(b) Que vaut la somme des aires des rectangles de l'histogramme ?

2. On suppose que la population est très grande et on choisit un habitant au hasard.
On crée la variable aléatoire $X$ qui à chacun des événements élémentaires de cette expérience aléatoire, donc à chaque personne, associe la distance séparant la résidence de cette personne de l'éco-point le plus proche.
$X$ prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[0;6[$, et on peut considérer qu'il y a une infinité de possibilités.
On dit alors que la variable aléatoire $X$ est *continue* (par opposition à *discrète*).

On veut définir certaines caractéristiques de la loi de probabilité de $X$.

(a) Compléter :

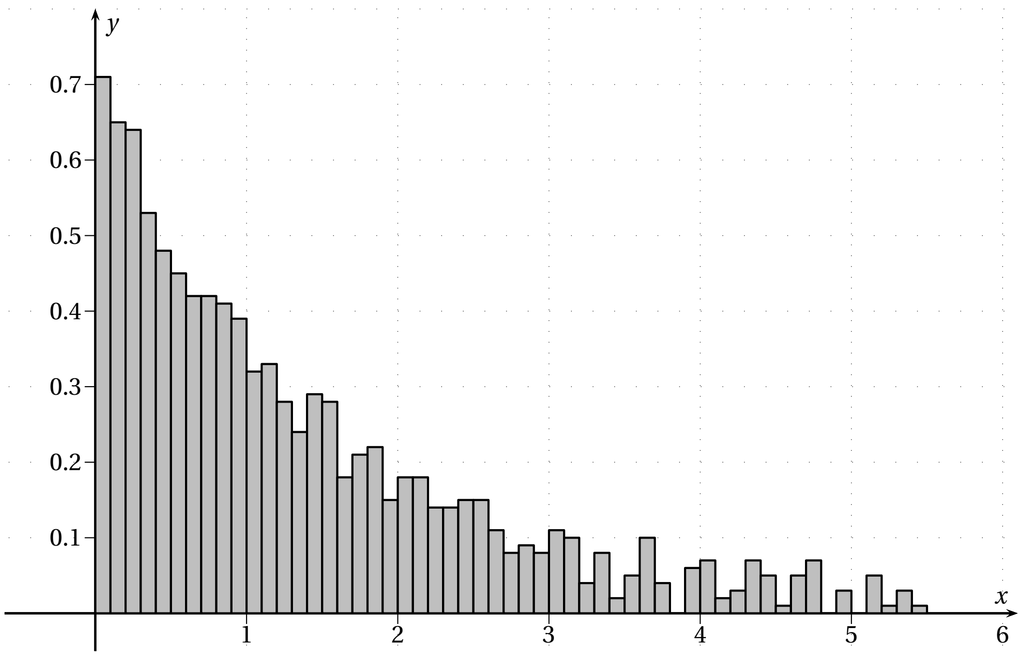
- $p(0 \leqslant X < 1) = \dots\dots\dots$
- $p(1 \leqslant X < 2) = \dots\dots\dots$
- $p(2 \leqslant X < 3) = \dots\dots\dots$
- $p(3 \leqslant X < 4) = \dots\dots\dots$
- $p(4 \leqslant X < 5) = \dots\dots\dots$
- $p(5 \leqslant X < 6) = \dots\dots\dots$

(b) Pour tout entier $n$ (en particulier ceux compris entre 1 et 6) que représente la somme des aires des rectangles situés à gauche de $n$ sur l'axe des abscisses ?

(c) Pour tout entier $n$ (en particulier ceux compris entre 0 et 5), que représente la somme des aires des rectangles situés à droite de $n$ sur l'axe des abscisses ?

3. Une étude plus précise a permis de relever les distances à 0,1 km près et de construire l'histogramme de la figure 7.2 de la présente page, où chacun des 60 rectangles a pour base 0,1 et pour **aire** la fréquence de la classe correspondante.

FIGURE 7.2: Second histogramme des fréquences




(a) Le 1[er] rectangle a une hauteur de 0,71. Quel pourcentage de la population réside à moins de 0,1 km de l'éco-point ?

(b) Que vaut la somme des aires de tous les rectangles ?

(c) On donne dans le tableau 7.1 de la présente page un extrait des relevés ayant permis d'élaborer cet histogramme. À l'aide de cet extrait, déterminer les probabilités suivantes :

- $p(0,5 \leqslant X < 0,8)$
- $p(X < 0,5)$
- $p(X \geqslant 0,8)$

TABLE 7.1: Extrait des relevés

| Distance | $[0;0,1[$ | $[0,1;0,2[$ | $[0,2;0,3[$ | $[0,3;0,4[$ | $[0,4;0,5[$ | $[0,5;0,6[$ | $[0,6;0,7[$ | $[0,7;0,8[$ | $[0,8;0,9[$ | $[0,9;1,0[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence (en %) | 7,1 | 6,5 | 6,4 | 5,3 | 4,8 | 4,5 | 4,2 | 4,2 | 4,1 | 3,9 |

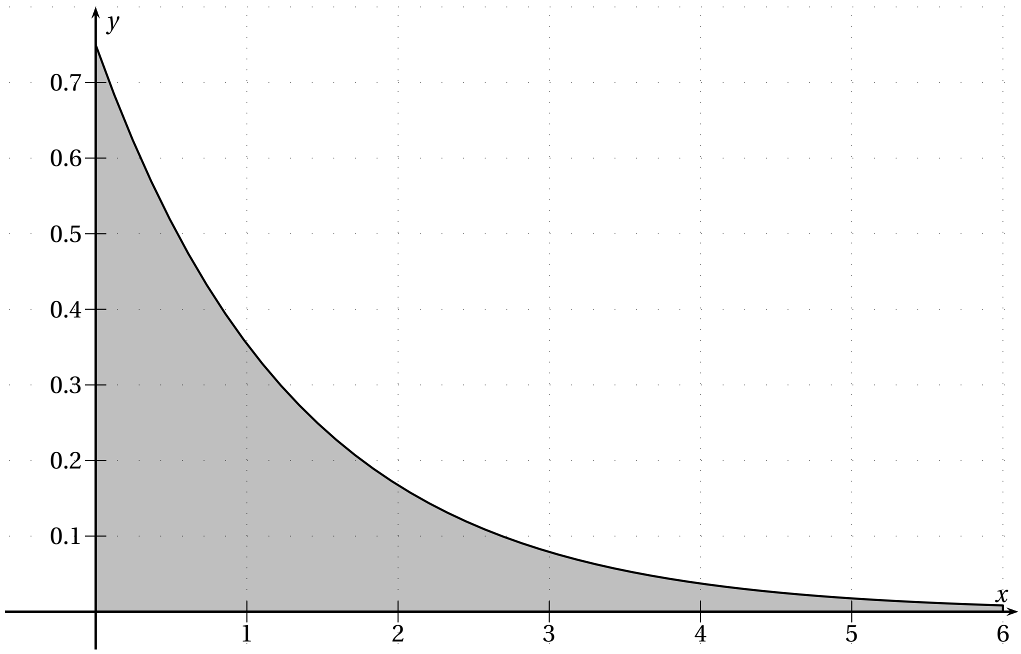
(d) Comment pourrait-on obtenir ces mêmes résultats uniquement à partir de l'histogramme ?

(e) Plus généralement, soient $a$ et $b$ deux nombres d'au plus une décimale tels que $0 \leqslant a < b < 6$. Comment pourrait-on obtenir à l'aide des aires des rectangles :

- $p(a \leqslant X < b)$ ?
- $p(X < a)$ ?
- $p(X \geqslant b)$ ?

4. Si on extrapole à partir des relevés, on voit apparaître une courbe comme sur la figure 7.3 de la présente page.

FIGURE 7.3: Fonction de densité




Cette courbe représente une fonction $f$ définie sur $[0\,;\,6[$ et est appelée *densité de probabilité* de la loi de $X$.

(a) Soit $a$ et $b$ deux nombres réels de l'intervalle $[0\,;\,6[$ avec $a < b$. En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, comment pourrait-on obtenir les probabilités suivantes :
- $p(a \leqslant X < b)$ ?
- $p(X < a)$ ?
- $p(X \geqslant b)$ ?

(b) Que peut-on dire de l'aire sous la courbe de $f$ entre 0 et 6 ?

(c) On suppose qu'ici $f(x) \approx 0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}75x}$.
   i. Déterminer une primitive $F$ de $f$.
   ii. Calculer :
      - $p(1{,}23 \leqslant X < 3{,}67)$
      - $p(X < 1{,}23)$
      - $p(X \geqslant 3{,}67)$
   iii. Vérifier que $p(0 \leqslant X < 6)$ est proche de 1.
   iv. Conjecturer la valeur de $p(X = 3)$ et, plus généralement, la valeur de $p(X = t)$ pour tout nombre $t \in [0\,;\,6[$. Que peut-on en déduire pour $p(X < t)$ et $p(X \leqslant t)$ ?

### 7.2.2 Introduction à la loi uniforme

On se propose d'étudier les tirages de nombres au hasard dans $[0\,;\,1]$.

1. L'intervalle $[0\,;\,1[$ contient 10 nombres ayant au plus 1 décimale : 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 et 0,9.
   (a) Combien contient-il de nombres ayant au plus 2 décimales ? D'au plus 10 décimales ?
   (b) À l'aide de La fonction *Rand* ou *NbrAléat* de la calculatrice, on peut obtenir un nombre décimal d'au plus 10 décimales. Quelle est la probabilité que ce nombre soit 0,5221311499 ?
2. L'intervalle $[0\,;\,1]$ contient une infinité de nombre réels.
   La variable aléatoire $X$ correspondant au tirage au hasard d'un nombre réel de $[0\,;\,1]$ est continue.
   (a) Conjecturer les valeurs de :
      - $p\left(X = \frac{1}{3}\right)$
      - $p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right)$
   (b) Plus généralement, soit $a \in [0\,;\,1]$, que peut-on conjecturer pour $p\,(0 \leqslant X \leqslant a)$ ?
   (c) Soit $f$ la fonction de densité de probabilité de la loi de $X$. On admet qu'elle est continue sur $[0\,;\,1]$ et donc y admet des primitives. Soit $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0.
      i. Déduire de la conjecture précédente l'expression de $F(x)$ pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$.
         *On pourra, à profit, consulter les rappels, et en particulier le paragraphe 7.1.3, page 96.*
      ii. En déduire $f(x)$.

### 7.2.3 Linéarité de l'espérance

*Une propriété de l'espérance et de l'écart-type d'une variable aléatoire n'a pas été vue en Première ES et est nécessaire pour la suite. C'est l'objet de cette activité.*

On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :

- 1 secteur de couleur rouge (R) ;
- 2 secteurs de couleur bleue (B) ;
- 5 secteurs de couleur verte (V).

Le joueur faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que la roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :

- 0 euro si c'est le vert ;
- 3 euros si c'est le bleu ;
- 4 euros si c'est le rouge.

1. On appelle $X$ la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain du joueur.
   (a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $X$ *(on la présentera sous forme de tableau).*
   (b) Calculer $E(X)$, l'espérance de $X$. Interpréter le résultat en termes de partie et de gain.
   *Voir les rappels, en particulier le paragraphe 7.1.1 page 95, si jamais vos souvenirs sur la notion d'espérance sont trop lointains.*
   (c) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$, la variance et l'écart type de $X$.
   *Même remarque qu'à la question précédente concernant la variance et l'écart-type.*
2. L'organisateur décide de doubler tous les gains. On appelle $Y$ la nouvelle variable aléatoire et on a $Y = 2X$.
   (a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $Y$.
   (b) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. Pour pouvoir jouer, chaque joueur doit miser, avant de jouer, 4 euros. On appelle $Z$ la nouvelle variable aléatoire et on a $Z = Y - 4$.
   (a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire $Z$.
   (b) Calculer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.
4. Quel est le lien entre :
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de $X$ et ceux de $Y$ ?
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de $Y$ et ceux de $Z$ ?
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de $X$ et ceux de $Z$ ?

### 7.2.4 De la loi binomiale à la loi normale

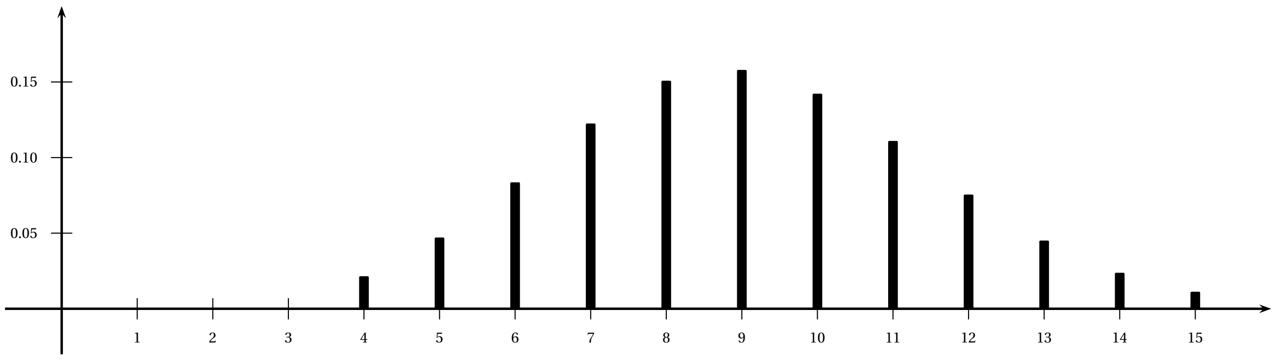
**Partie A : Variable aléatoire $X_n$ suivant la loi binomiale** $\mathscr{B}(n; 0,3)$

On se propose de construire des représentations graphiques de la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X_n$ suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n; 0,3)$ où l'on fera varier $n$.

1. On donne sur la figure 7.4 de la présente page, pour $n = 30$, les valeurs approchées des probabilités de cette loi *(seulement celles supérieures à* $10^{-2}$*, les autres ayant été négligées)* ainsi qu'une représentation graphique en bâtons.

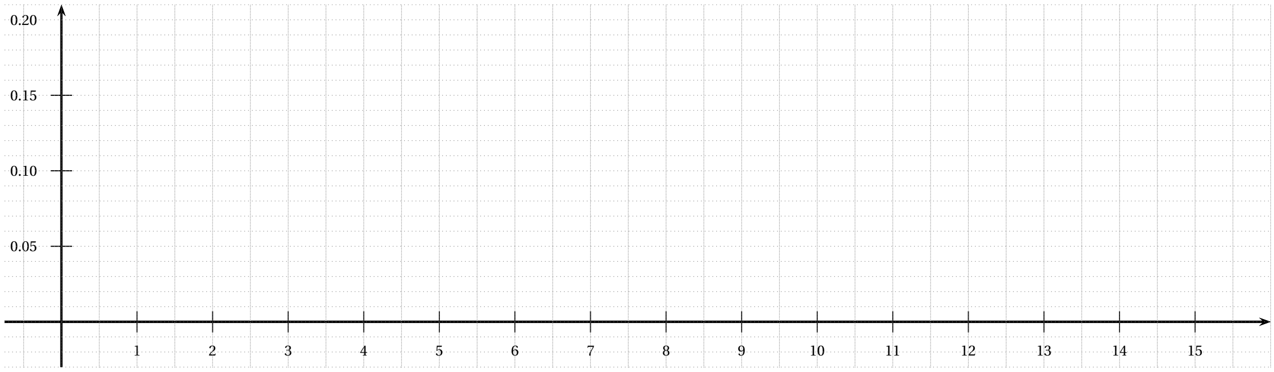
FIGURE 7.4: Loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,3$

| $k$ | $\cdots$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X_n = k)$ | $\cdots$ | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,16 | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | $\cdots$ |




   (a) Calculer l'espérance $\mu$ et l'écart-type $\sigma$ de $X_{30}$.

FIGURE 7.5: L'histogramme de la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,3$

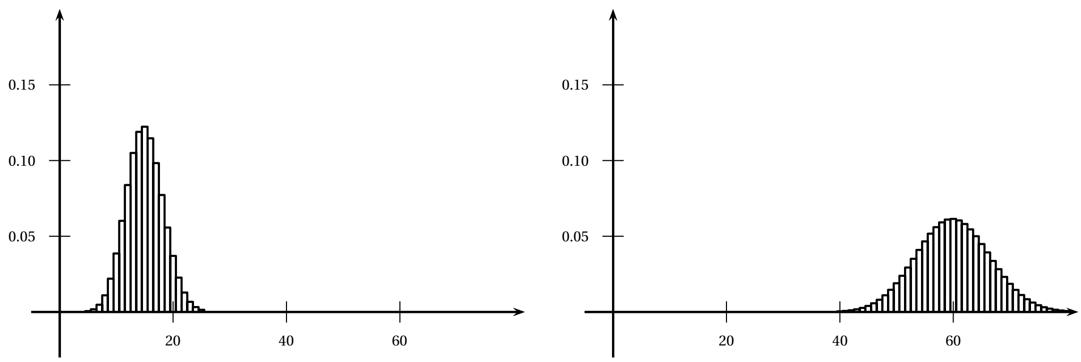



(b) Représenter dans le repère de la figure 7.5 de la présente page l'histogramme où chaque rectangle :
- est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
- a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire *(soit ici une unité)* ;
- a son aire égale à la probabilité *(donc, ici, sa hauteur est égale à la probabilité)*.

(c) Que vaudrait la somme des aires des rectangles si on avait représenté tous les rectangles possibles *(pas seulement ceux correspondant à une probabilité supérieure à* $10^{-2}$*)* ?

2. Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où $n$ vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure 7.6 de la présente page.

FIGURE 7.6: Loi binomiale – Premiers histogrammes




(a) Dans chacun de ces deux cas, calculer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire.

(b) Où retrouve-t-on l'espérance sur les graphiques ?

(c) Quelle est l'influence de l'écart-type sur les graphiques ?

**Partie B : Variable aléatoire $Y_n = X_n - \mu$**

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire $Y_n$ telle que : $Y_n = X_n - \mu$, où $X_n$ est la variable aléatoire de la partie A et $\mu$ est l'espérance de $X_n$.

1. Compléter le tableau de la figure 7.7 page suivante dans le cas où $n = 30$ :
2. Représenter l'histogramme de la loi de probabilité de $Y_{30}$ sur le graphique de la figure 7.7 page ci-contre.
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de $Y_{30}$. Que constate-t-on ?
4. Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où $n$ vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure 7.8 page suivante.
   Calculer l'espérance et l'écart-type de $Y_{50}$ et de $Y_{200}$.
   L'espérance et l'écart-type jouent-ils le même rôle pour les graphiques qu'à la partie A ?

FIGURE 7.7: $Y_n$

| $k$ | $\cdots$ | | | | | | | | | | | | | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(Y_{30}=k)$ | $\cdots$ | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,16 | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | $\cdots$ |

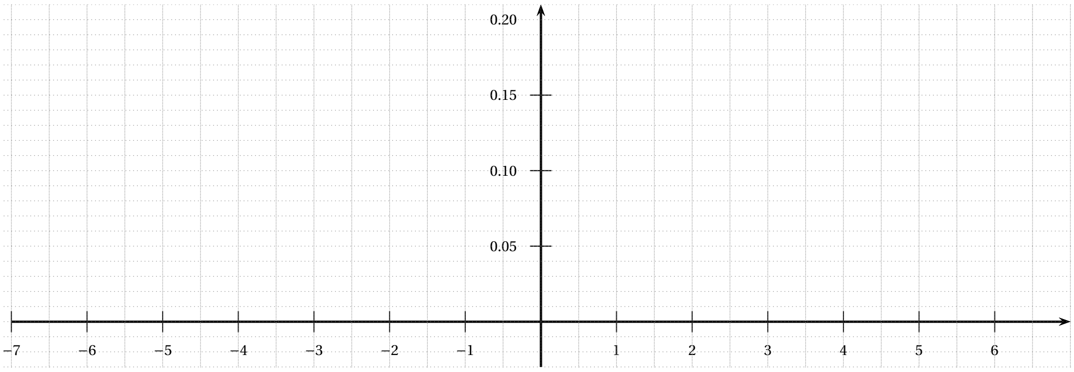



FIGURE 7.8: Loi binomiale – De nouveaux histogrammes


**Partie C : Variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$**

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire $Z_n$ telle que : $Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$, où $X_n$ est la variable aléatoire de la partie A, $\mu$ est l'espérance de $X_n$ et $\sigma$ est l'écart type de $X_n$.

1. Compléter le tableau de la figure 7.9 page suivante dans le cas où $n = 30$ (*on arrondira les valeurs de k au centième*).
2. On rappelle que chaque rectangle de l'histogramme :
   - est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
   - a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire ;
   - a son aire égale à la probabilité.

   (a) Vérifier que la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire est constante.
   *Cette vérification peut se faire à partir des valeurs approchées successives de la variable aléatoire mais surtout, plus sûrement, à partir des valeurs exactes de cette variable aléatoire.*

   (b) Compléter alors le second tableau de la figure 7.9 page suivante.

   (c) Compléter alors le graphique de la figure 7.9 page suivante avec l'histogramme de la loi $Z_{30}$.
3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de $Z_{30}$. Que constate-t-on ?
4. Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où $n$ vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure 7.10 page suivante.
   Calculer l'espérance et l'écart-type de $Z_{50}$ et de $Z_{200}$ et vérifier que ces résultats se retrouvent sur les graphiques.

On obtient des histogrammes dont les positions et les dispersions, lorsque $n$ varie, sont beaucoup plus stables.
On peut constater que plus $n$ augmente, plus le graphique évoque une « cloche ». L'histogramme est limité par l'axe des abscisses et une ligne brisée qui, lorsque $n$ augmente, tend à se confondre avec la représentation graphique d'une fonction $f$. Le mathématicien ABRAHAM DE MOIVRE a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

FIGURE 7.9: $Z_n$

Premier tableau

| $k$ | $\cdots$ | | | | | | | | | | | | | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(Z_{30} = k)$ | $\cdots$ | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,16 | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | $\cdots$ |

Second tableau

| $k$ | $\cdots$ | | | | | | | | | | | | | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aire du rectangle | $\cdots$ | 0,02 | 0,05 | 0,08 | 0,12 | 0,15 | 0,16 | 0,14 | 0,11 | 0,07 | 0,04 | 0,02 | 0,01 | $\cdots$ |
| Hauteur du rectangle | $\cdots$ | | | | | | | | | | | | | $\cdots$ |

Graphique

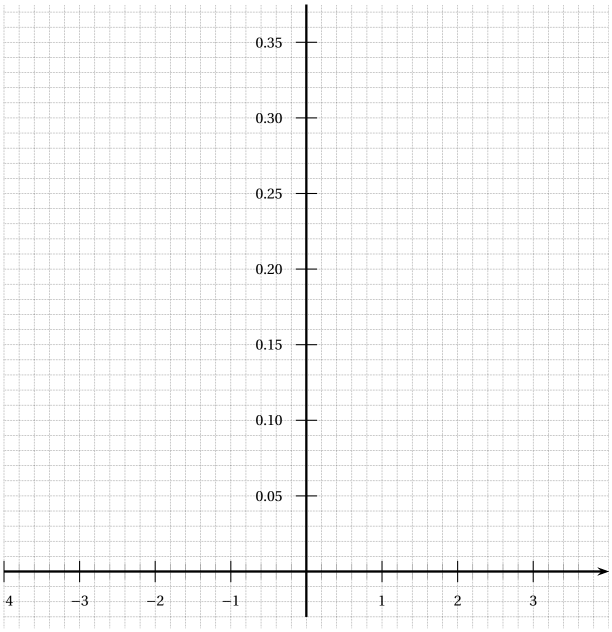
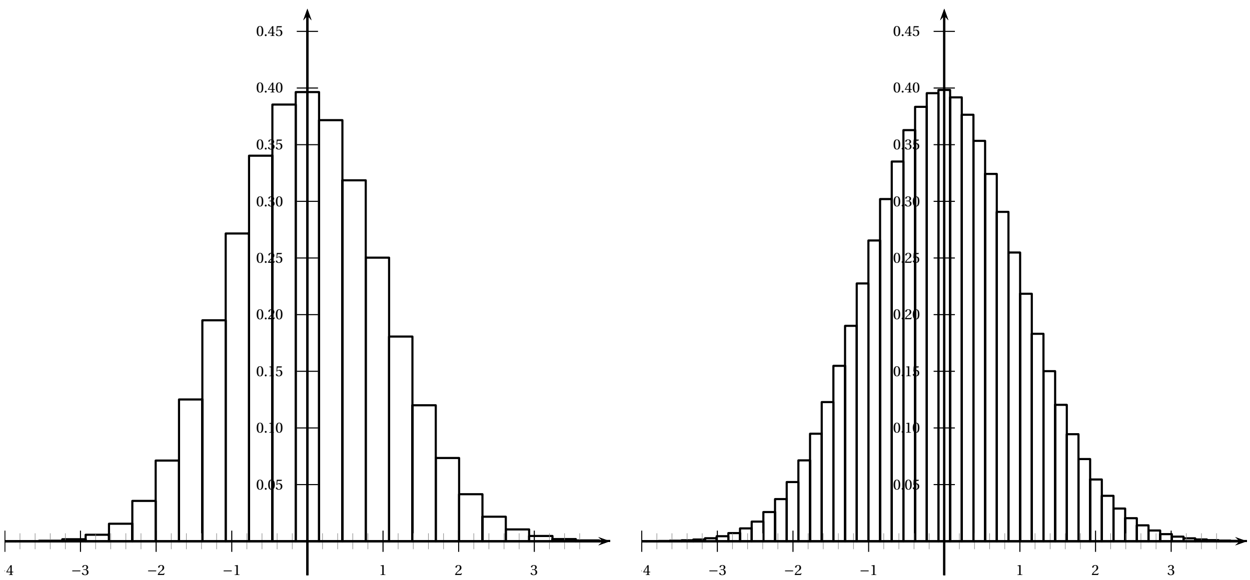



FIGURE 7.10: Loi binomiale – Derniers histogrammes

$n = 50$ $n = 200$



## 7.3 Bilan et compléments

### 7.3.1 Loi à densité sur un intervalle

**Définition 7.1.** On appelle *fonction de densité* sur un intervalle $[a\,;b]$ une fonction $f$ telle que :
- $f$ est continue et positive sur $[a\,;b]$ ;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

**Définition 7.2.** Soit $X$ une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;b]$, et $f$ une fonction de densité sur $[a\,;b]$. On dit que $p$ est la *loi de probabilité de densité $f$* lorsque, pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans $[a\,;b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d)$ est l'aire sous la courbe représentative de $f$ entre $c$ et $d$.

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Propriété 7.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;b]$, munie d'une fonction de densité $f$ sur $[a\,;b]$. Alors :*
- *$p(a \leqslant X \leqslant b) = 1$ et, si $[c\,;d] \subset [a\,;b]$, $0 \leqslant p(c \leqslant X \leqslant d) \leqslant 1$.*
- *Pour tout $c \in [a\,;b]$, $p(X = c) = 0$ et $p(X < c) = p(X \leqslant c)$.*
- *Si $A$ et $B$ sont deux intervalles tels que $A \cap B = \varnothing$ alors $p(X \in A \cup B) = p(X \in A) + p(X \in B)$.*
- *Pour tout $c \in [a\,;b]$, $p(a \leqslant X \leqslant c) + p(c \leqslant X \leqslant b) = 1$.*

Les preuves seront faites en classe.

#### Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

**Définition 7.3.** Soit $X$ une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;b]$, munie d'une fonction de densité $f$ sur $[a\,;b]$. On appelle *espérance mathématique de $X$* le nombre $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

### 7.3.2 Loi uniforme sur $[a\,;b]$

**Définition 7.4.** Une variable aléatoire continue $X$ suit *la loi uniforme* sur $[a\,;b]$ si elle admet comme densité de probabilité la fonction $f$, **constante**, définie sur $[a\,;b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

**Propriété 7.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Alors pour tout $[c\,;d] \subset [a\,;b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$.*

La preuve sera faite en classe.

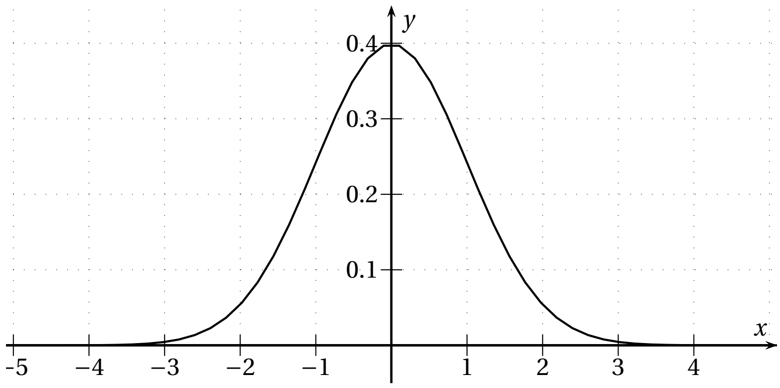
**Propriété 7.3.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$. Alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.*

La preuve sera faite en classe.

### 7.3.3 Loi normale centrée réduite

**Définition 7.5.** On dit qu'une variable aléatoire continue suit *la loi normale centrée réduite*, notée $\mathcal{N}(0\,;1)$ lorsqu'elle a pour densité la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$




*Remarque.* • Cette fonction est aussi appelée *densité de probabilité de* LAPLACE-GAUSS.
• Sa courbe est parfois appelée *courbe de* GAUSS.

**Propriété 7.4.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. Alors :*
- *$E(X) = 0$ et c'est pour cela qu'on dit que la loi est* centrée *;*
- *$\sigma(X) = 1$ et c'est pour cela qu'on dit que la loi est* réduite.

On l'admettra.

La fonction de densité de probabilité de LAPLACE-GAUSS est bien positive et continue.
La courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car $f(-x) = f(x)$.
On admettra que l'aire sous la courbe de cette fonction de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 1.
De ces quelques caractéristiques on peut déduire les propriétés suivantes :

**Propriété 7.5.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$ et $a$ un réel. Alors :*
- $p(X \in \mathbb{R}) = 1$.
- $p(X \leqslant 0) = p(X \geqslant 0) = 0,5$.
- $p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$.
- $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a)$.

Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

*Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.*

### 7.3.4 Loi normale d'espérance $\mu$ et d'écart-type $\sigma$

**Définition 7.6.** Soit $X$ une variable aléatoire continue. On dit que $X$ suit une loi normale de paramètres $\mu$ et $\sigma$, notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

**Propriété 7.6.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors :*
- $E(X) = \mu$ ;
- $V(X) = \sigma^2$ ;
- $\sigma(X) = \sigma$.

Les preuves seront faites en classe.
La fonction de densité de $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ présente quelques caractéristiques bien utiles :
- Elle est positive et continue et l'aire sous sa courbe pour $x$ variant de $-\infty$ et $+\infty$ est égale à 1 (admis).
- Sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

On peut en déduire les propriétés suivantes :

**Propriété 7.7.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ et $a$ et $b$ deux réels. Alors :*
- $p(X \in \mathbb{R}) = 1$.
- $p(X \leqslant \mu) = p(X \geqslant \mu) = 0,5$.
- $p(X \leqslant \mu - a) = p(X \geqslant \mu + a)$.
- $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a)$.

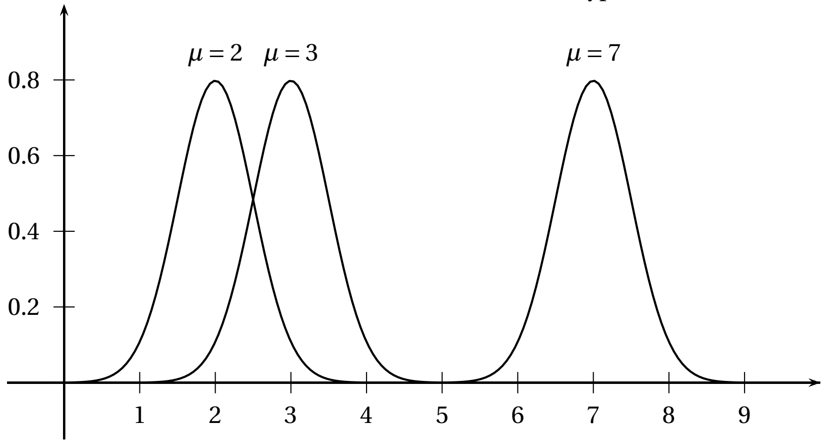
Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

*Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.*

#### Loi normale et espérance

On présente sur la figure 7.11 page ci-contre trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérances respectives 2, 3 et 7 et d'écart-type 0,5.
On constate qu'à une translation de vecteur $k\vec{\imath}$ près, les courbes sont identiques.

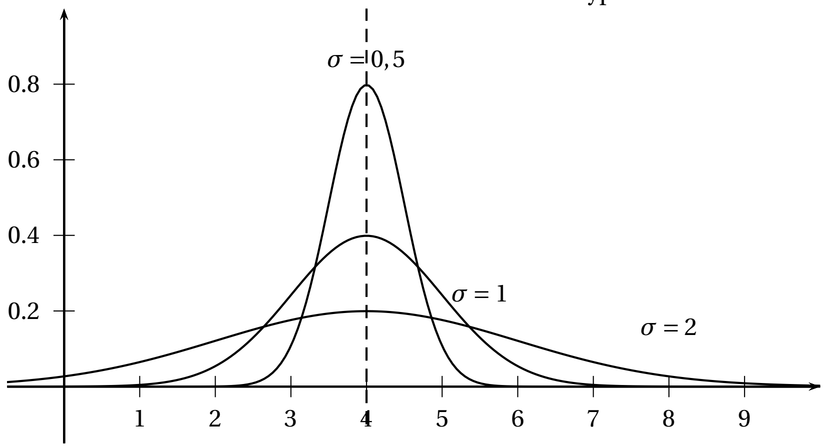
FIGURE 7.11: Loi normale et écart-type




**Loi normale et écart-type**

On présente sur la figure 7.12 de la présente page trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérance 4 et d'écarts-types respectifs 0,5, 1 et 2.

FIGURE 7.12: Loi normale et écart-type




On constate que plus l'écart-type est important et plus la courbe de la fonction de densité est « évasée » et plus le maximum est petit. En effet, un écart-type important signifie que la dispersion des données est importante.
On notera que, dans tous les cas, l'aire sous la courbe de la fonction de densité de probabilité (pour $x$ variant de $-\infty$ à $+\infty$) est égale à 1.

Certaines valeurs dépendant de $\sigma$ sont à retenir *(par cœur)* :

**Propriété 7.8.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$*

- $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$ ;
- $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,95$ ;
- $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,997$.

Cette propriété est illustrée par la figure 7.13 page suivante.

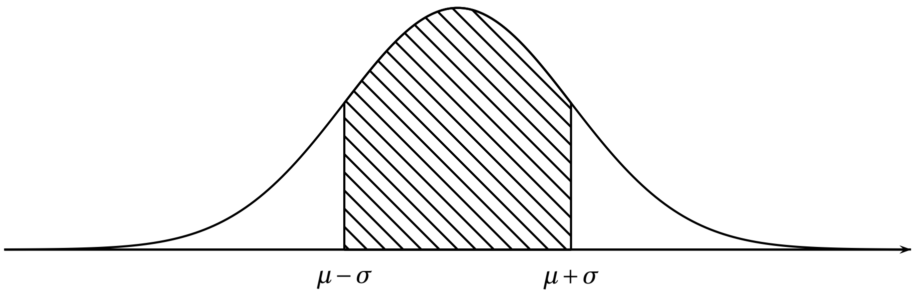
**Intérêt de la loi normale**

On retrouve la loi normale dans un très grand nombre de distributions dans la nature, dans l'industrie, en économie, en médecine ou dans les sciences sociales car beaucoup de phénomènes naturels, industriels, économiques, physiologiques ou sociaux résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes.
Ce résultat s'explique mathématiquement par le théorème suivant, qui n'est pas exigible en terminale ES et qu'on admettra, mais qui explique l'intérêt porté à la loi normale :

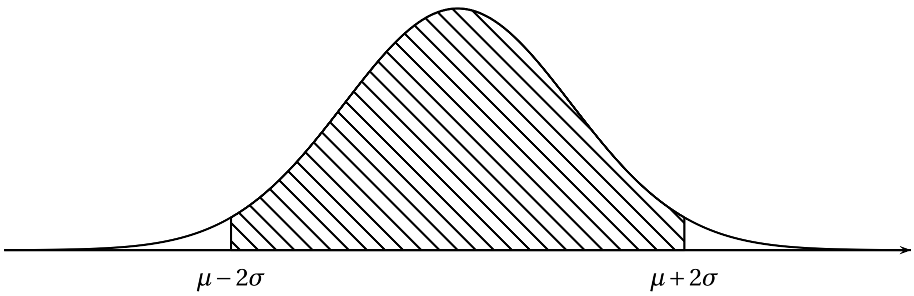
**Théorème.** *Lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes de lois quelconques, cette somme suit une loi normale.*

C'est le cas de la taille ou du poids d'un individu en fonction de son âge dans les premières années de sa vie qu'on retrouve dans les carnets de santé, par exemple.

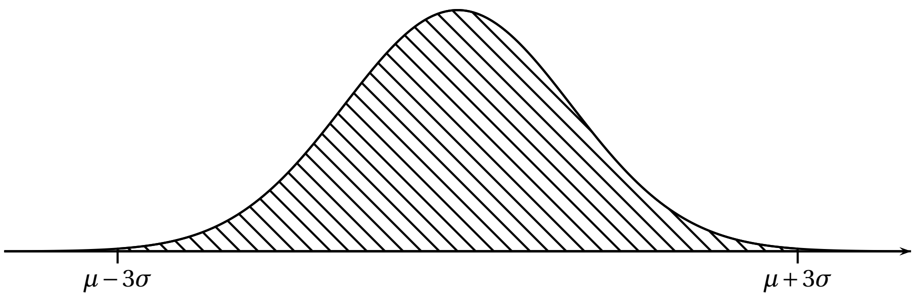
FIGURE 7.13: Un, deux, trois sigmas




$$\mathrm{p}(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,68$$




$$\mathrm{p}(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,95$$




$$\mathrm{p}(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,997$$

### 7.3.5 Loi normale et calculatrice

Soit $X$ une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.
La fonction de densité de cette loi normale (qu'elle soit centrée ou non, réduite ou non) n'a pas de primitive explicite mais les calculatrices disposent de commandes spécifiques pour calculer, $\mu$ et $\sigma$ étant connus :

- $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ ;
- $x$ tel que $p(X \leqslant x) = a$, $a$ étant connu.

Ces commandes sont résumées dans le tableau 7.2 de la présente page.

TABLE 7.2: Commandes spécifiques des calculatrices concernant la loi normale

| | TI | Casio |
|---|---|---|
| $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$ | DISTR puis 2 : normalFRep($\alpha$,$\beta$,$\mu$,$\sigma$) | Menu Stat Dist Norm NCD<br>puis renseigner Lower = $\alpha$ ; Upper = $\beta$ ; $\sigma$ ; $\mu$ |
| $x$ tel que $p(X \leqslant x) = a$ | DISTR puis 3 : FracNormale($a$,$\mu$,$\sigma$) | Menu Stat Dist Norm InvN<br>puis renseigner Area = $a$ ; $\sigma$ ; $\mu$ |

Si jamais $\mu$ ou $\sigma$ ne sont pas connus, on pourra repasser par la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ qui suit la loi normale centrée réduite donc d'espérance et d'écart-type connus puisqu'alors $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y = 1$ ce qui pourra parfois permettre de retrouver l'espérance et l'écart-type de $X$.

Pour d'autres calculs, on pourra au besoin utiliser les résultats suivants :

**Propriété 7.9.** *Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ et $a$ et $b$ deux réels. Alors :*

- *Si $a \geqslant \mu$ :*
  - $p(X \leqslant a) = p(X \leqslant \mu) + p(\mu \leqslant X \leqslant a) = 0,5 + p(\mu \leqslant X \leqslant a)$ ;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0,5 - p(\mu \leqslant X \leqslant a)$.
- *Si $a \leqslant \mu$ :*
  - $p(X \leqslant a) = 0,5 - p(a \leqslant X \leqslant \mu)$ ;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0,5 + p(a \leqslant X \leqslant \mu)$.

Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

*Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.*

### 7.3.6 Lien entre le discret et le continu

| **Variable aléatoire discrète** | **Variable aléatoire continue** |
|---|---|
| Univers des valeurs de $X$ fini | Intervalle $I$ infini |
| Évènement $E$ : partie (sous-ensemble) de l'univers | Évènement $J$ : sous-intervalle de $I$ (ou partie engendrée par des intervalles) |
| Probabilités $p(X = k)$ où $k$ appartient à l'univers des valeurs possibles pour $X$<br>$\sum_k p(X = k) = 1$ | Densité de probabilité $f$<br>$\int_I f(t)\mathrm{d}t = 1$ |
| Espérance d'une variable aléatoire discrète $X$ où $k$ appartient à l'univers des valeurs possibles pour $X$<br>$E(X) = \sum_k k \times p(X = k)$ | Espérance d'une variable aléatoire continue $X$<br>$\int_I t f(t)\mathrm{d}t$ |

# 7.4 Exercices

## 7.4.1 Lois à densité

**EXERCICE 7.1.**
Soit $a$ un réel et $f$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=ax(1-x)$

1. Déterminer le nombre réel $a$ pour que cette fonction $f$ soit une loi de densité sur $[0\,;1]$.
2. On considère $X$ une variable aléatoire continue de densité $f$ avec $a$ ayant la valeur trouvée ci-dessus.
   Calculer la probabilité de l'événement $\{0,25 \leqslant X \leqslant 0,75\}$.

**EXERCICE 7.2.**
*Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. $f$ est la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=3x^2$.
   (a) Justifier que $f$ est une fonction de densité sur $[0\,;1]$.
   (b) $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f$.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2})$
   - $p(X \in [0,4\,;0,6])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
2. $f$ est la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $f(x)=\frac{x}{2}$.
   (a) Justifier que $f$ est une fonction de densité sur $[0\,;2]$.
   (b) $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f$.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$
   - $p(X \in [1\,;2])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
3. $f$ est la fonction définie sur $[-1\,;]$ par $f(x)=\frac{3}{4}(1-x^2)$.
   (a) Justifier que $f$ est une fonction de densité sur $[-1\,;1]$.
   (b) $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f$.
   Calculer les probabilités des événements suivants :
   - $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
   - $p\left(X \in \left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]\right)$

   (c) Déterminer $E(X)$.

**EXERCICE 7.3.**
On s'intéresse à la durée de vie $X$, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité $p$ de densité $f$, définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$.
Ainsi $p(0 \leqslant X \leqslant t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$, où $t$ est un nombre réel positif représentant le nombre d'années, et $\lambda$ un réel positif.

1. Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ en fonction de $\lambda$.
2. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
   Calculer $\lambda$.

**EXERCICE 7.4.**
On s'intéresse à la fonction $\ln x$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. (a) Vérifier que la fonction $F$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction ln.
   (b) Trouver un nombre réel $b>1$ tel que $\int_1^b \ln x\,dx=1$.
   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;b]$.
2. $X$ est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;b]$.
   (a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.
   (b) Sachant que $X$ est supérieur à 2, calculer la probabilité que $X$ soit inférieur à 2,5.

### 7.4.2 Loi uniforme

**EXERCICE 7.5.**
Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14.
Soit $X$ le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que $X$ suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

**EXERCICE 7.6.**
Suite à un problème sur sa ligne téléphonique, Christophe contacte le service après-vente de son opérateur. Le conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance jeude entre 18 h et 19 h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire, donc uniforme, sur le créneau donné, quelle est la probabilité que Christophe attende entre 15 et 40 min ?

**EXERCICE 7.7.**
Lors de la restitution des notes d'une interrogation notée sur 20, le professeur annonce que, suite à de nombreuses tricheries, il a décidé de noter chaque élève aléatoirement et uniformément entre 5 et 15.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève ait une note supérieure à 12 ?
2. Quelle note un élève peut-il espérer obtenir ?
3. Un élève qui n'a pas triché est effondré à l'annonce de ce système de notation. Il espérait avoir une note supérieure à 14. Pour le rassurer, le professeur lui indique que sa note est supérieure à 12. Quelle est la probabilité que sa note soit supérieure à 14 sachant qu'elle est supérieure à 12 ?

### 7.4.3 Loi normale

**EXERCICE 7.8.**
Une étude menée sur l'eau du robinet provenant d'un même captage affirme que la quantité en milligrammes par litre (mg.L$^{-1}$) de nitrates suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 8. Selon le code de santé publique, la teneur en nitrates doit être inférieure à 50 mg.L$^{-1}$ afin d'assurer la protection des femmes enceintes et des nouveaux-nés.
Quelle est la probabilité, à $10^{-4}$ près, que l'eau du robinet provenant de ce captage présente, par sa teneur élevée en nitrates, un risque pour la santé ?

**EXERCICE 7.9.**
Une étude sur le teck, arbre recherché pour la qualité de son bois, affirme que, cinq années après sa plantation, la hauteur d'un tel arbre suit la loi normale de paramètres $\mu = 23$ m et $\sigma = 1,5$ m.
Suite à des relevés, le propriétaire d'une exploitation de tecks plantés cinq ans auparavant apprend que la hauteur du plus grand teck sur son exploitation est de 20 m et celle du plus petit teck est de 16 m.
Doit-il s'inquiéter de la croissance des tecks plantés sur son exploitation ?

**EXERCICE 7.10.**
Le test le plus employé actuellement pour mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) standard est la test de DAVID WECHSLER.
On appelle $X$ la variable aléatoire qui à toute personne choisie au hasard associe son Q.I. mesuré à l'aide de ce test. On admet que $X$ suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 15$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un Q.I. entre 90 et 110 ?
2. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. entre 85 et 115 ?
   (b) ayant un Q.I. entre 70 et 130 ?
   (c) ayant un Q.I. entre 55 et 145 ?
3. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. supérieur à 115 ?
   (b) ayant un Q.I. supérieur à 130 ?
   (c) ayant un Q.I. supérieur à 145 ?
4. D'après la littérature sur le sujet, une personne est considéré comme un génie si son Q.I. est supérieur à 140. Quelle est la proportion de génies dans la population ?

*Remarque.* La fiabilité du test de Q.I., censé mesurer l'intelligence, est parfois contestée, certains prétendant que ce test ne mesure pas l'intelligence d'une personne mais seulement sa réussite au test de Q.I.

**EXERCICE 7.11.**
La taille exprimée en centimètres d'un enfant de cinq ans suit la loi normale d'espérance 105,5 cm et d'écart-type 4,7 cm.

1. Déterminer la probabilité qu'un enfant de cinq ans mesure entre 97 cm et 115 cm.
2. Peut-on affirmer qu'environ 94 % des enfants de cinq ans mesurent entre 97 et 115 cm ? Expliquer.

**EXERCICE 7.12.**
Le fabricant d'un jeu, après avoir effectué une enquête auprès d'un grand nombre de joueurs, a estimé que les durées des parties constituaient des données gaussiennes avec une moyenne $\mu = 62$ s et un écart-type $\sigma = 6$ s. Ce fabricant annonce : « Vous avez 95 % de chances de jouer chaque partie dans une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s. »

1. Sur quoi se fonde cette affirmation du fabriquant ?
2. Jean, passionné de ce jeu, a joué 40 parties. Peut-on affirmer que 95 % des 40 parties jouées par Jean ont une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s ?

**EXERCICE 7.13.**
Une machine remplit des paquets de pâtes dont le poids est supposé être de 500 g. On appelle $X$ la variable aléatoire qui à tout paquet rempli par cette machine associe son poids en grammes. On admet que $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(500\,;\,2^2\right)$.

1. On choisit au hasard un paquet rempli par cette machine. Quelle est la probabilité que ce paquet ait un poids compris entre 490 g et 505 g ?
2. Un grand magasin affirme qu'un de ses clients a acheté un paquet de moins de 480 g. Que peut-on en penser ?

**EXERCICE 7.14.**
La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'eau d'une certaine marque, exprimée en litres (L), suit la loi normale d'espérance 1 L et d'écart-type 0,02 L. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Préciser, sans calculatrice, la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1 L.
3. Est-il probable que cette bouteille contienne plus de 1,1 L ? Expliquer.
4. En déduire la probabilité qu'une bouteille choisie au hasard contienne plus d'un litre sachant qu'elle ne peut en contenir au maximum qu'un 1,1 L.

**EXERCICE 7.15.**
Le fréquence cardiaque est le nombre de pulsations du cœur par minute. La fréquence cardiaque au repos, en abrégé FCR, est la fréquence cardiaque la plus faible rencontrée chez une personne après une longue période de calme. On admet que la FCR d'un sportif régulier (qui pratique un sport 2 à 4 fois par semaine) suit la loi normale de paramètres $\mu = 52$ et $\sigma = 4$.

1. Sans calculatrice, préciser la probabilité (arrondie au centième) que la FCR d'un sportif régulier soit comprise entre 44 et 60.
2. Mehdi, cycliste régulier, affirme qu'il a une FCR comprise entre 38 et 40 pulsations par minutes. Ses camarades sont très sceptiques : sa FCR serait très proche de celle de RICHARD VIRENQUE.
   Que peut-on en penser ? *Argumenter à l'aide d'un calcul.*

**EXERCICE 7.16.**
La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de type « Française Frissone Pis Noir » (FFPN) peut être modélisée par une variable aléatoire à densité $X$, de loi normale de moyenne $\mu = 6\,000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de ce type souhaite disposer de probabilité.
   (a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise moins de 5 800 L par an.
   (b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise entre 5 900 et 6 100 L de lait par an.
   (c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise plus de 6 520 L par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :
   - la production maximale prévisible des 30 % des vaches les moins productives du troupeau ;
   - la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

   Répondre aux souhaits de l'éleveur.

### 7.4.4 Problèmes

**PROBLÈME 7.1.**
L'entreprise Granulex distribue un certain aliment dans un contenant métallique dont le poids après remplissage est en moyenne de 340 grammes.
Le poids est distribué normalement avec un écart-type de 4 grammes.
Toutefois on peut ajuster le processus de remplissage pour obtenir une valeur moyenne désirée sans changer l'écart-type.

1. Quelle est la probabilité qu'un contenant choisi au hasard de la production ait un poids entre 334 et 346 g ?
2. Sur une production de 1 000 contenants, combien auront un poids inférieur à 330 grammes ?
3. À quel niveau moyen doit-on fixer le remplissage de sorte que seulement 5 % des contenants aient un poids supérieur à 348 grammes ?

**PROBLÈME 7.2.**
Un ascenceur peut supporter une charge de 1 000 kg. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a une masse, en kg, qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 75$ kg et $\sigma = 16$ kg et que la somme des masses de $n$ personnes dont la masse suit cette loi normale suit elle-même une loi normale de d'espérance $n \times \mu$ et d'écart-type $\sigma \times \sqrt{n}$.

1. L'ascenseur peut-il supporter 9 personnes ?
2. L'ascenseur peut-il supporter 11 personnes ?
3. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas $10^{-6}$ ? *Justifier.*

**PROBLÈME 7.3.**
Lors d'une consultation, le médecin informe le couple Leïla et Nathanaël qu'« un garçon de trois mois pèse en moyenne 5,3 kg » et qu'« il y a 50 % de chances que son poids soit compris entre 4,8 kg et 5,8 kg ». Il ajoute toutefois qu'« il n'y a aucun inquiétude à avoir tant que le poids de l'enfant est *normal* », c'est-à-dire tant qu'il se situe dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
Le fils du couple pèse 4,1 kg et est âgé de trois mois.
En admettant que le poids en kilogrammes d'un garçon de trois mois suit une loi normale, la situation est-elle préoccupante ?

**PROBLÈME 7.4** (D'après BTS Chimiste 2007)**.**
Deux chaînes de production, $A$ et $B$, d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent en très grande quantité le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.
*Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. On note $X_A$ (respectivement $X_B$) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne $A$ (respectivement $B$), associe sa masse en milligrammes.
   On sait que $X_A$ (respectivement $X_B$) suit la loi normale de paramètres $(m_A ; \sigma_A)$ (respectivement $(m_B ; \sigma_B)$).
   Un comprimé est jugée conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.
   (a) On donne $m_A = 896$ mg et $\sigma_A = 10$ mg. Calculer, à $10^{-2}$ près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans la chaîne $A$ soit conforme.
   (b) On donne $m_B = 900$ mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par la chaîne $B$ soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart-type $\sigma_B$.
2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne $A$ et 60 % de la chaîne $B$. La chaîne $A$ produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne $B$ en produit 3 %. On prélève au hasard un comprimé dan la production du laboratoire. On note :
   - $A$ l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne $A$ » ;
   - $B$ l'événement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne $B$ » ;
   - $C$ l'événement « Le comprimé est conforme ».

   (a) À partir de l'énoncé, préciser les probabilités des événements $A$ et $B$ ainsi que les probabilités conditionnelles de $C$ sachant $A$ et de $C$ sachant $B$, notées $p_A(C)$ et $p_B(C)$.
   (b) Calculer alors la probabilité $p(C)$ de l'événement $C$.
   (c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme.
   Déterminer, à $10^{-3}$ près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne $A$.

**PROBLÈME 7.5.**
Une entreprise fabrique en grande série des tubes de 2 m de longueur à utiliser lors d'une installation électrique. Si une plus grande longueur est nécessaire lors de l'installation, ces tubes sont prévus pour s'emboîter les uns dans les autres grâce à une forme évasée à l'une des deux extrémités.
*Dans ce problème, les résultats seront à arrondir à* $10^{-3}$.
Un tube fabriqué par cette entreprise est dit conforme lorsque le diamètre $d_1$ de l'extrémité de forme évasée du tube, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[17,5\,;\,18,5]$ **et** lorsque le diamètre $d_2$ de l'autre extrémité, exprimé aussi en millimètres, appartient à l'intervalle $[15,5\,;\,16,5]$.

1. On note $D_1$ la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire $D_1$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(18\,;\,0,2^2\right)$.
   Calculer $p(17,5 \leqslant D_1 \leqslant 18,5)$.
2. On note $D_2$ la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme non évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire $D_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(16\,;\,\sigma_2^2\right)$.
   On admet que $p(15,5 \leqslant D_2 \leqslant 16,5) = 0,97$.
   Déterminer une valeur approchée au centième près de l'écart-type $\sigma_2$.
3. On admet que : $p(\{17,5 \leqslant D_1 \leqslant 18,5\} \cap \{15,5 \leqslant D_2 \leqslant 16,5\}) = 0,98$.
   Interpéter ce résultat.

**PROBLÈME 7.6.**
Dans une population, la glycémie, taux de sucre dans la sang, exprimée en grammes par litre (g.L$^{-1}$), vérifie les résultats suivants :
- 15 % des individus présentent une glycémie inférieure à 0,82 g.L$^{-1}$ ;
- 20 % des individus présentent une glycémie supérieure à 0,95 g.L$^{-1}$.

On suppose que la glycémie de cette population suit une loi normale.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de cette loi.
2. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie *normal*, c'est-à-dire compris entre $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$.
3. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L$^{-1}$.
   Quelle est la probabilité pour un individu de cette population de souffrir d'une hyperglycémie ?

**PROBLÈME 7.7.**
Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité $X$ (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut-être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La machine peut être réglée pour modifier la valeur moyenne sans changer l'écart-type.
La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur minimum de la moyenne $\mu$ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance maximale des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de $\mu$ ?
   (b) Quelle est, dans les conditions de la question précédente, la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
   (c) Déterminer $\mu$ et $\sigma$ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins d'un litre **et** moins de 1 % de bouteilles qui débordent.

**PROBLÈME 7.8.**
Un appareil portatif multimédia fabriqué par la société Multisonic est garanti contre tout défaut de fabrication durant une période de 2 ans.
D'après l'expérience de la compagnie, il y a un appareil sur 1 000 qui présente une défectuosité majeure dans des conditions normales d'utilisation, 26 mois après l'achat.
D'autre part, les chances d'observer une défectuosité majeure durant les 52 mois suivant l'achat sont de 975 sur 1 000.
Supposons que le temps requis après l'achat pour qu'une défectuosité majeure survienne est distribué normalement.
Quelle est la probabilité qu'un appareil présente une défectuosité majeure avant la fin de sa période de garantie ?

# Devoir surveillé n° 8

## Lois à densité

**EXERCICE 8.1** (4,5 points)**.**
Olivier vient tous les matins entre 7 h et 7 h 45 min chez Karine prendre un café.
Soit $X$ la variable aléatoire correspondant à l'heure d'arrivée d'Olivier chez Karine.

1. Sachant qu'Olivier ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, à quelle loi de densité est associée à $X$ ?
2. Calculer les probabilités suivantes et donner à chaque fois une interprétation du résultat :
   - $p(X \geqslant 7\,\text{h}\,30\,\text{min})$ ;
   - $p(7\,\text{h}\,20\,\text{min} \leqslant X \leqslant 7\,\text{h}\,22\,\text{min})$ ;
   - $p(X \leqslant 7\,\text{h}\,10\,\text{min})$ ;
   - $p(X = 7\,\text{h}\,30\,\text{min})$.
3. À quelle heure Karine peut-elle espérer voir Olivier arriver ?

**EXERCICE 8.2** (5,5 points)**.**
1. Montrer que la fonction $F$ telle que $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$.
2. (a) Montrer que sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$ la fonction $f$ est positive.
   (b) Montrer que $\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
   (c) Expliquer alors pourquoi la fonction $f$ peut être une fonction de densité sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$.
3. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$.
   Calculer les probabilités des événements suivants (on donnera d'abord la valeur exacte puis une valeur approchée au centième) :
   - $A : \{X < 2\}$ ;
   - $B : \{X \geqslant 2\}$.

**EXERCICE 8.3** (4 points)**.**
Une entreprise produit des batteries pour véhicules électriques.
Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries soit en moyenne de 200 km mais les différents types de conduite et les conditions aléatoires de circulation font que l'autonomie $X$, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.
Une ville est située à 160 km.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier sa réponse.
3. Un conducteur prudent décide de ne pas prendre de risque : il ne fera que des trajets les plus courts dont il est sûr à 95 % que la batterie supportera le trajet sans recharge.
   On cherche donc $x$, le kilométrage maximum que ce conducteur se permet.
   (a) Montrer que $x$ est tel que $p(X \leqslant x) = 0,05$.
   (b) En déduire le kilométrage qu'il ne devra pas dépasser.

**EXERCICE 8.4** (6 points)**.**
Une enquête est effectuée auprès de familles de 4 personnes afin de connaître la quantité de lait achetée en 1 mois. Elle montre qu'environ 5 % des familles achètent moins de 10 litres par mois alors que 80 % en achètent plus de 15 litres.
On choisit une famille au hasard.
$X$ est la variable aléatoire qui donne le nombre de litres de lait acheté.
On admet que $X$ suit une loi normale.
On se propose de déterminer l'espérance et la variance de $X$.

1. D'après les données de l'énoncé, et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur minimale de l'espérance.
2. Si $X$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu ; \sigma^2\right)$, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ?
3. Exprimer en fonction de $\mu$ et de $\sigma$ les valeurs $a$ et $b$ de $Z$ correspondant respectivement à $X = 10$ et $X = 15$.
4. Traduire l'énoncé en termes de probabilités sur $X$, puis en termes de probabilité sur $Z$.
5. Utiliser la calculatrice pour trouver les valeurs de $a$ et de $b$.
6. En déduire que $\mu$ et $\sigma$ sont les solutions du système suivant *(les coefficients ont été arrondis au dixième)* :

$$\begin{cases} \mu - 1,6\sigma = 10 \\ \mu - 0,8\sigma = 15 \end{cases}$$

7. Déterminer les valeurs de $\mu$ et $\sigma$.
8. Quelle est la proportion de familles qui achètent entre 7,5 litres de lait et 32,5 litres de lait ?

# Chapitre 8

# Intervalles de fluctuation et de confiance

## Sommaire



## 8.1 Intervalle de fluctuation

### 8.1.1 Quelques rappels

#### Seconde

L'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95 % a été défini en Seconde de la façon suivante :

**Définition.** L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, relatif aux échantillons de taille $n$, est l'intervalle centré autour de $p$, proportion du caractère dans la population, où se situe, avec une probabilité égale à 0,95, la fréquence observée dans un échantillon de taille $n$.

Et la propriété suivante a alors été énoncée :

**Propriété.** *Dans le cas où $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, l'intervalle $I$ suivant contient l'intervalle de fluctuation, c'est-à-dire que la probabilité qu'il contienne la fréquence observée est* au moins *égale à 95 % :*

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

#### Première

En Première, nous avons vu que la loi binomiale nous permettait de calculer très exactement les probabilités des différentes fréquences observables dans un échantillon de taille $n$, à savoir les valeurs $\frac{k}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n$, même pour $n \leqslant 25$ et $p \notin ]0,2\,;\,0,8[$. La règle énoncée alors est la suivante :

**Propriété 8.1.** *L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$, où $a$ et $b$ sont les deux entiers naturels définis par :*

- *$a$ est le plus petit des entiers $k$ vérifiant $p(X \leqslant k) > 0,025$ ;*
- *$b$ est le plus petit des entiers $k$ vérifiant $p(X \leqslant k) \geqslant 0,975$.*

*Remarques.* • Lorsque $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$, il est proche de l'intervalle vu en Seconde.

- Lorsque $n$ est assez grand, il est quasiment centré sur $p$.
- Cet intervalle s'obtient grâce aux possibilités des calculatrices (ou des logiciels) par la lecture des probabilités cumulées croissantes.

### 8.1.2 Intervalle de fluctuation et loi normale

La détermination de l'intervalle de fluctuation associé à la loi binomiale est souvent fastidieuse, malgré l'apport des calculatrice ou des logiciels. On a vu dans le chapitre précédent que lorsque $n$ est assez grand, la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}^2)$ sont proches. Or, dans le cas d'une variable aléatoire suivant une loi normale, la calculatrice nous indique que $p(\mu-1{,}96\sigma \leqslant X \leqslant \mu+1{,}96\sigma) \approx 0{,}95 \Leftrightarrow p\left(\frac{\mu-1{,}96\sigma}{n} \leqslant \frac{X}{n} \leqslant \frac{\mu+1{,}96\sigma}{n}\right) \approx 0{,}95$ ce qui signifie que la probabilité que la fréquence $\frac{X}{n}$ soit comprise dans l'intervalle $\left[\frac{\mu-1{,}96\sigma}{n} ; \frac{\mu+1{,}96\sigma}{n}\right]$ est proche de 0,95, ce qui correspond à un intervalle de fluctuation.
Mais $\frac{\mu-1{,}96\sigma}{n} = \frac{np-1{,}96\sqrt{np(1-p)}}{n} = \frac{np}{n} - 1{,}96\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} = p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\mu+1{,}96\sigma}{n} = p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$. D'où la propriété suivante :

**Propriété 8.2.** *L'intervalle suivant, appelé* intervalle de fluctuation asymptotique *au seuil de 95 %, tend vers l'intervalle de fluctuation quand n devient grand :*

$$\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

*c'est-à-dire que la variable aléatoire $F_n$ qui, à tout échantillon de taille n associe la fréquence, prend ses valeurs dans cet intervalle de fluctuation avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n devient grand.*
*On convient que cet intervalle peut être considéré comme une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation dès lors que $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.*

### 8.1.3 Utilisation de l'intervalle de fluctuation

On utilise l'intervalle de fluctuation, comme en Seconde ou en Première, lorsque la proportion $p$ dans la population est connue ou bien si on fait une hypothèse sur sa valeur :

**Représentativité :** si la proportion $p$ d'un caractère dans une population est connue, il permet de décider si un échantillon de taille $n$ issu de cette population est représentatif de la population : si la fréquence $f$ du caractère dans l'échantillon appartient à cet intervalle, on considère, au seuil de 95 %, que l'échantillon est représentatif.

**Hypothèse sur $p$ :** si on émet une hypothèse sur la proportion $p$ d'un caractère dans une population, il permet de savoir si on doit rejetter cette hypothèse : si la fréquence $f$ observée dans un échantillon de taille $n$ appartient cet intervalle, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est $p$ dans la population n'est pas remise en question ; sinon on rejette l'hypothèse selon laquelle cette proportion vaut $p$.

## 8.2 Intervalle de confiance

On cherche à déterminer la proportion $p$ d'un caractère dans une population, par exemple la proportion d'individus atteint d'une maladie bénigne. Il est souvent difficile pour des raisons à la fois financières et logistiques de pouvoir recueillir des données sur la population toute entière. Le plus souvent on se contente de travailler sur un échantillon de la population, dont on peut parfois vérifier au préalable s'il est représentatif de la population entière (sur d'autres critères, comme la fréquence d'hommes et de femmes par exemple). On sait que d'un échantillon à l'autre la fréquence d'apparition du caractère fluctue autour de la proportion $p$ du caractère dans la population entière. Des simulations permettent d'obtenir qu'environ 95 % des intervalles de la forme $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contiennent la proportion $p$. Aussi à partir de la fréquence $f$ d'apparition du caractère dans notre échantillon défini-t-on l'intervalle suivant :

**Définition 8.1.** L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un *intervalle de confiance* de la proportion inconnue $p$ au niveau de confiance 0,95.

**Exemple.** On souhaite estimer la proportion de personnes en surpoids, selon les critères de l'OMS, dans une ville quelconque. Pour cela 460 personnes ont été sélectionnées de manière aléatoire et un enquêteur est allé recueillir des informations auprès de ces personnes. La proportion de personnes en surpoids dans cet échantillon étudié est de 29,5 %. L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}295 - \frac{1}{\sqrt{460}} ; 0{,}295 + \frac{1}{\sqrt{460}}\right] \approx [0{,}25 ; 0{,}34]$ est l'intervalle de confiance de la proportion de personnes en surpoids dans cette ville au niveau de confiance 0,95.

## 8.3 Exercices

**EXERCICE 8.1.**
*Cet exercice nécessite de disposer d'une calculatrice TI ou d'une calculatrice CASIO 35+* ***USB****.*
On dispose d'une partie de programme :

| TI | Casio |
|---|---|
| : PROMPT N | "N" ? → N ↩ |
| : PROMPT P | "P" ? → N ↩ |
| : 0 → I | 0 → I ↩ |
| : While binomFRép(N,P,I) ⩽ 0,025 | BinomCD(N,P) → List 1 ↩ |
| : I+1 → I | While List1[I+1] ⩽ 0,025 ↩ |
| : End | I+1 → I ↩ |
| : I → A | WhileEnd ↩ |
| | I → A ↩ |

binomFRép$(n,p,k)$ calcule $p(X \leqslant k)$, où $X$ est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ tandis que BinomCD$(n,p)$ → List 1 fait la même chose en stockant tous les résultats dans la liste 1.

1. (a) À quoi correspondent N et P demandés en début de programme ?
   (b) À quoi correspond A à la fin du programme ?
2. Comment modifier ce programme pour qu'il obtienne A **et** B à la fin du programme ?
3. Comment modifier ce programme pour qu'il calcule les deux bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ ?
4. On a exécuté ce programme avec $p = 0,4$ et on a obtenu les résultats suivants pour la borne inférieure :

| $n$ | 20 | 50 | 200 | 1 000 | 5 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| Borne | 0,2 | 0,26 | 0,335 | 0,37 | 0,3864 |

   (a) Comparer ce résultat avec la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation introduit en Seconde. Qu'observe-t-on ?
   (b) Comparer ce résultat avec la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique introduit cette année.

**EXERCICE 8.2.**
Le responsable de la maintenance des machines à sous d'un casino doit vérifier qu'un certain type de machine est bien réglé sur une fréquence de succès de 0,06. Il dispose du programme élaboré dans l'exercice 8.1.

1. Lors du contrôle d'une machine, le technicien constate qu'elle a fourni 8 succès sur 65 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?
2. Lors du contrôle d'une autre machine, il constate qu'elle a fourni 12 succès sur 100 jeux. Doit-il remettre en question le réglage de la machine ?

**EXERCICE 8.3.**
En 2005, il y avait en France, selon l'INSEE, 62 731 milliers d'habitants dont 30 366 milliers d'hommes et 32 365 milliers de femmes. Cette même année en Premières générales à Dupuy de Lôme il y avait 350 élèves dont 218 femmes et 132 hommes. L'échantillon étant très petit par rapport à la population générale, on peut considérer qu'il s'agit d'un tirage aléatoire sans remise et que la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille 350 associe le nombre de femmes dans cet échantillon suit une loi binomiale de paramètres $n = 350$ et $p = \frac{32\,365}{62\,731} \approx 0,52$.
Les élèves de Dupuy étaient-ils représentatifs de la population française ?

**EXERCICE 8.4.**
On fait l'hypothèse que tous les ans à Dupuy de Lôme il y a, en Seconde, deux élèves sur trois qui sont des femmes soit une proportion $p = \frac{2}{3}$. En Seconde 13, sur 36 élèves il y a 16 femmes. On supposera que la constitution d'une classe de 36 élèves peut être assimilée à un tirage aléatoire sans remise et que la variable aléatoire qui à chaque classe de 36 élèves associe le nombre de femmes dans cette classe suit une loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = \frac{2}{3}$.

1. Déterminer si on doit rejetter l'hypothèse de départ, au seuil de 95 %.
2. Après vérification auprès de l'administration, il s'avère que cette hypothèse est juste. Que peut-on dire alors de la Seconde 13 ?

**EXERCICE 8.5.**
Les enfants sont dits prématurés lorsque la durée gestationnelle est inférieure ou égale à 259 jours. La proportion de ces naissances est de 6 %. Des chercheurs suggèrent que les femmes ayant eu un travail pénible pendant leur grossesse sont plus susceptibles d'avoir un enfant prématuré que les autres. Il est décidé de réaliser une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de 400 naissances correspondant à des femmes ayant eu pendant leur grossesse un travail pénible.

Les chercheurs décident a priori que si la proportion d'enfants nés prématurés dans cet échantillon est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 alors leur hypothèse sera acceptée. Finalement le nombre d'enfants prématurés est de 50. Quelle est donc la conclusion ?

**EXERCICE 8.6.**
On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans leur vie est de 13 %.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthme et en informe les services sanitaires. Ceux-ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville.
La règle de décision prise est la suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de jeunes de 11 à 14 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.
2. L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?
3. Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus de jeunes ayant eu des crises d'asthme que dans le reste du dépertement.
   Combien faudrait-il prendre de sujets pour qu'une proportion observée de 19 % soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

**EXERCICE 8.7.**
Le 18 avril 2002, l'institut IPSOS effectue un sondage dans la population en âge de voter. On constitue un échantillon de 1 000 personnes (inscrites sur les listes électorales) que l'on suppose choisies ici de manière aléatoire. Les résultats partiels en sont les suivants : sur les 1 000 personnes

- 135 ont déclaré vouloir voter pour Jean-Marie Le Pen
- 195 ont déclaré vouloir voter pour Jacques Chirac
- 170 ont déclaré vouloir voter pour Lionel Jospin

1. Déterminer les trois intervalles de confiance au niveau de confiance de 95 % correspondant aux proportions d'intention de votes pour chacun des trois candidats.
2. Si on ne donne que le résultat brut du sondage et non l'intervalle de confiance, quel est le degré d'imprécision du résultat ?
3. À l'issue du premier tour Jean-Marie Le Pen, Jacques Chirac et Lionel Jospin ont obtenu, respectivement, 16,9 %, 19,9 % et 16,2 % des suffrages exprimés. Commenter.
4. L'institut CSA donnait en avril 14 % d'intention de votes pour Jean-Marie Le Pen pour un échantillon de taille identique. Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à ce nouveau sondage. Commenter.

**EXERCICE 8.8.**
Les sondages d'intention de vote s'effectuent en général sur des échantillons de taille $n = 1000$.

1. Déterminer l'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % des votants pour l'un des candidats quand le sondage indique des intentions de votes proches de 50 % (cas du second tour de l'élection présidentielle).
2. Déterminer l'amplitude de l'intervalle de confiance au seuil de 95 % des votants pour l'un des candidats quand le sondage indique des intentions de votes proches de 10 % (cas des « petits » candidats du premier tour de l'élection présidentielle).

**EXERCICE 8.9.**
Un test de diagnostic rapide effectué sur des sujets ictériques (coloration jaune de la peau, des muqueuses et du blanc de l'œil) doit permettre d'estimer si l'ictère est d'origine virale ou non, sans avoir besoin de faire des analyses longues et compliquées. Cependant il est important de pouvoir s'assurer que ce test est de bonne qualité, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir indiquer correctement si l'ictère est viral ou non. Il doit être capable d'identifier correctement le type d'ictère : il est positif chez les sujets dont l'ictère est viral et négatif sinon.
Une étude est effectuée sur 100 personnes ayant un ictère viral et 100 personnes ayant un ictère d'origine non virale.
Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 8.1 page ci-contre.

1. Déterminer la proportion de sujets ayant un test positif parmi ceux ayant un ictère viral.
2. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de tests positifs lorsque l'ictère est viral.
   *Cette proportion est appelée sensibilité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère viral réagisse au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la sensibilité est importante.*

TABLE 8.1: Tableau de l'exercice 8.9

| | Hépatite virale | Ictère d'origine non virale |
|---|---|---|
| Test positif | 85 | 20 |
| Test négatif | 15 | 80 |

3. Déterminer la proportion de sujets ayant un test négatif parmi celles ayant un ictère non viral.
4. Déterminer un intervalle de confiance à 95 % de la proportion de tests négatifs lorsque l'ictère est non viral.
   *Cette proportion est appelée spécificité du test diagnostic, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne ayant un ictère non viral ne réagisse pas au test. Un test diagnostic sera d'autant meilleur que la spécificté est importante.*

**EXERCICE 8.10.**
Dans le but d'évaluer la prise en charge de la bronchiolite dans un hôpital de la région Aquitaine, une étude rétrospective a été mise en place.

1. Il est recommandé de coucher l'enfant de manière très inclinée (couchage en proclive) dans le cadre de la prise en charge de la bronchiolite. On évalue cette pratique à partir d'un échantillon de 134 dossiers. 106 enfants ont été couchés en proclive.
   Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion d'enfants dont le couchage respecte la recommandation.
2. Une étude plus fine permet de comparer les pratiques entre les différents services ayant admis des enfants dont les résultats sont dans le tableau 8.2 de la présente page.

TABLE 8.2: Tableau de l'exercice 8.10

| Couchage proclive | En service des urgences | En service hospitalier | Total |
|---|---|---|---|
| Oui | 45 | 52 | 97 |
| Non | 29 | 8 | 37 |
| Total | 74 | 60 | 134 |

   (a) Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de couchage en proclive pour chaque type de service.
   (b) Peut-on conclure selon vous au seuil de 95 % que la pratique de couchage n'est pas identique selon le service ?

**EXERCICE 8.11.**
Un maraîcher achète un lot de semances de tomates pour produire ses plants de tomate. Il lui reste des semences de l'année passée, dont il doit contrôler le taux de germination pour pouvoir les utiliser avec les autres. En effet, des taux de germination trop différents provoquent des trous dans les plates bandes de production, ce qui génère un coût de manutention plus élevé (il faut enlever les pots non germés avant de les conditionner). Il faut donc comparer les taux de germination des semences des deux années.
Une stratégie consiste à calculer et à comparer les intervalles de confiance des taux de germination des plants de l'année et de l'année précédente. Si les deux intervalles ne se recoupent pas, on peut conclure à une différence de taux de germination entre les deux semances d'origines. Il faudra alors les semer séparément.
Pour faire cette compariason, le maraîcher prélève, aléatoirement dans les semences de l'année, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 185 graines germent.
Il prélève ensuite, aléatoirement dans les semences de l'année précédente, un échantillon de 200 graines qu'il met à germer. Il constate que 150 graines germent.

1. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, du taux de germination $p_a$ du lot de semences de l'année.
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau 95 % du taux de germination $p_b$ du lot de semences de l'année précédente.
3. Conclure.

# Annexe A

# Retour sur la notion de dérivation

## Sommaire

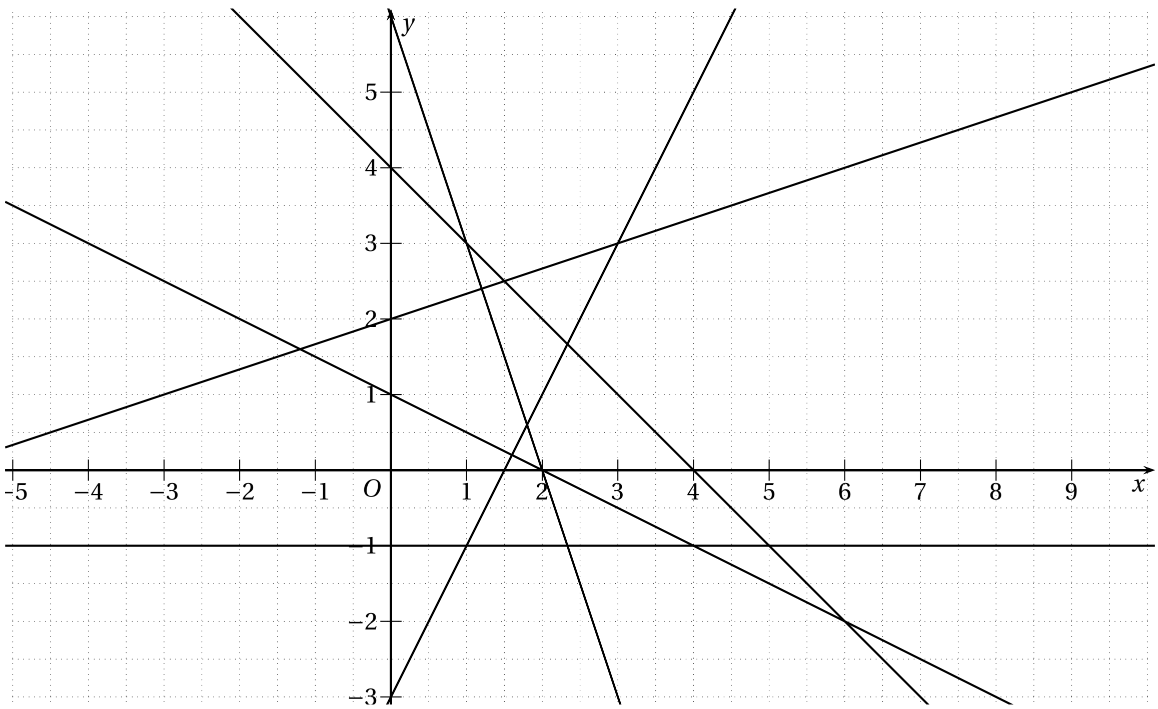


## A.1 Nombres dérivés

### A.1.1 Prérequis

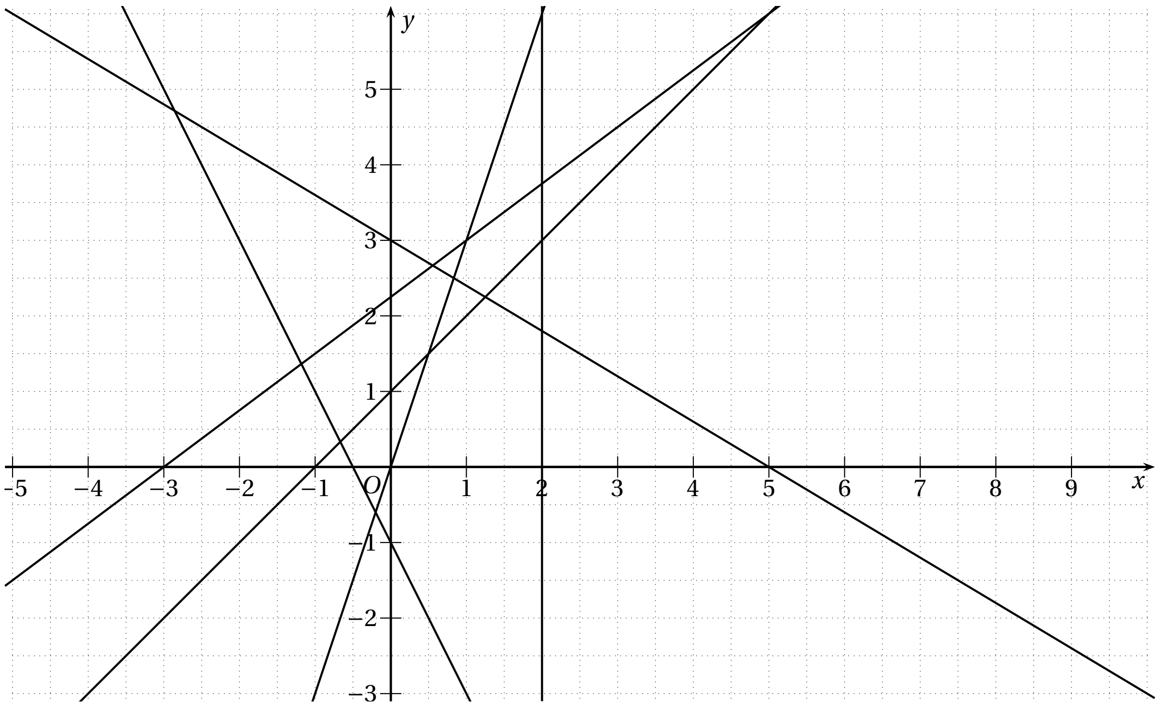
**ACTIVITÉ A.1.** 1. Déterminer graphiquement les coefficients directeurs $m$ des droites de la figure A.1 de la présente page (on les indiquera sur le graphique).

FIGURE A.1: Figure de l'exercice A.1



2. Même question pour les droites de la figure A.2 de la présente page.

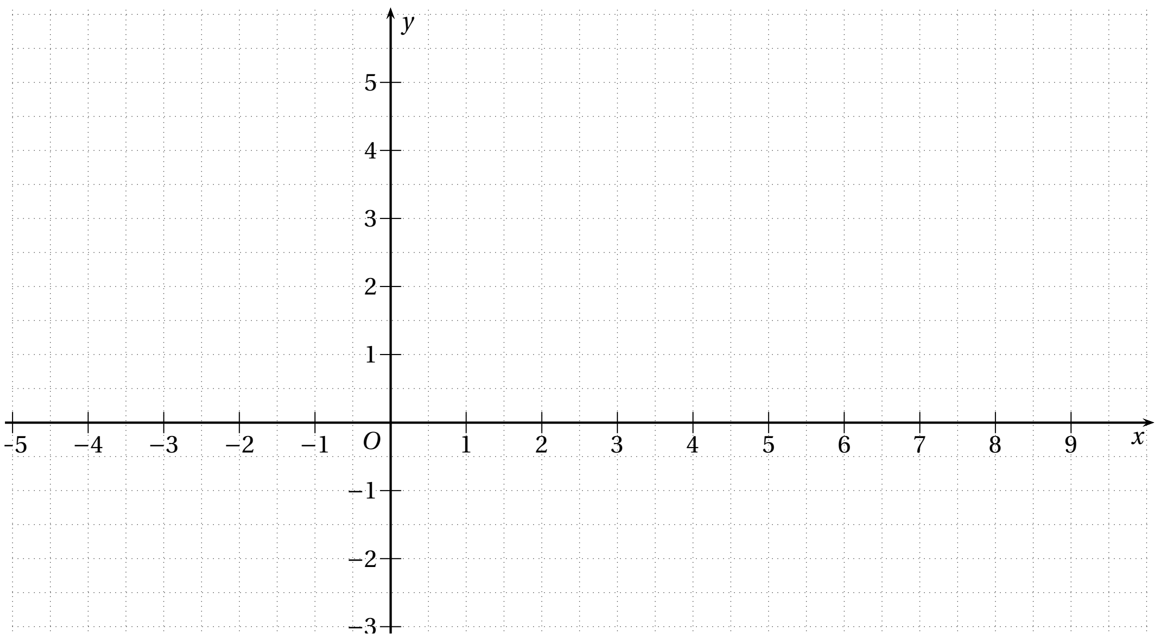
FIGURE A.2: Figure de l'exercice A.1




**ACTIVITÉ A.2.**
Dans le repère de la figure A.3 de la présente page, représenter les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(0;1)$ et de coefficient directeur $m=2$ ;
- $\mathscr{D}_2$ passant par le point $B(1;0)$ et de coefficient directeur $m=-1$ ;
- $\mathscr{D}_3$ passant par le point $C(-1;-1)$ et de coefficient directeur $m=\frac{1}{4}$ ;
- $\mathscr{D}_4$ passant par le point $D(1;2)$ et de coefficient directeur $m=-\frac{2}{3}$ ;
- $\mathscr{D}_5$ passant par le point $E(2;-3)$ et de coefficient directeur $m=\frac{3}{5}$ ;
- $\mathscr{D}_6$ passant par le point $A(0;3)$ et de coefficient directeur $m=0$ ;

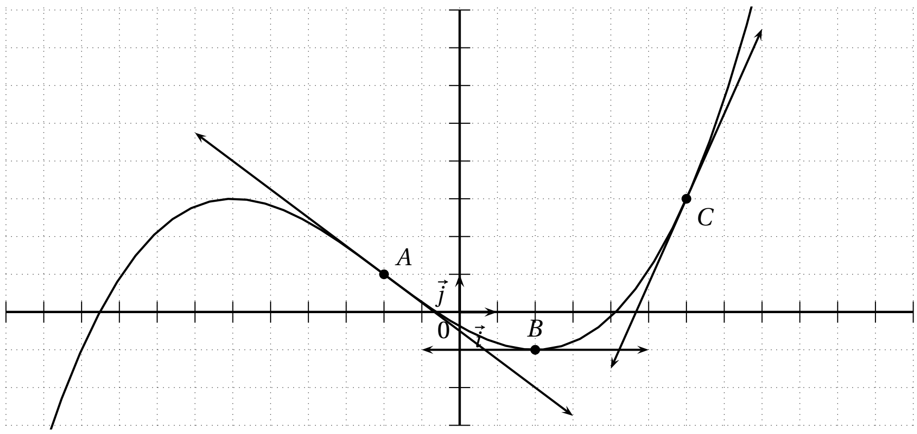
FIGURE A.3: Figure de l'exercice A.2



### A.1.2 Lectures graphiques de nombres dérivés

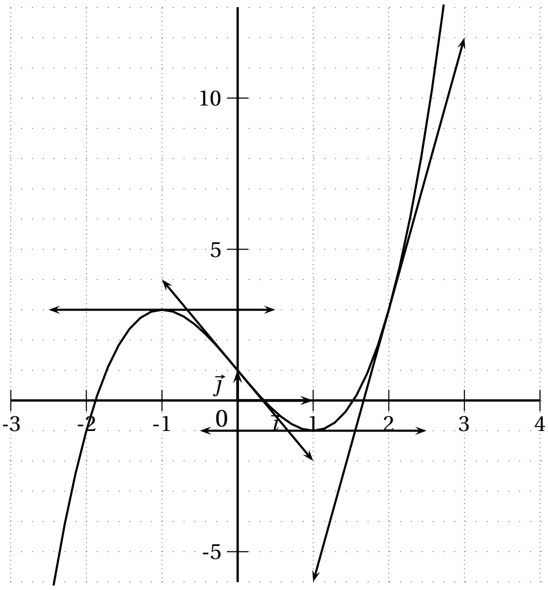
**EXERCICE A.1.**
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ en y indiquant les droites tangentes aux points $A$, $B$ et $C$.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$.

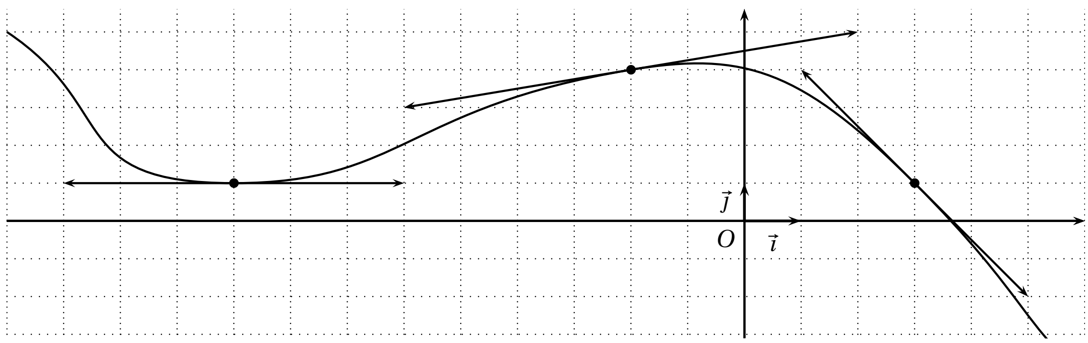



**EXERCICE A.2.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$ ;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$ ;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$ ;
   (d) L'équation de la tangente $T_{-1}$ au point d'abscisse $-1$ ;
   (e) L'équation de la tangente $T_2$ au point d'abscisse 0.
2. La droite $T$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$ et d'ordonnée $-1$ passe par le point $A$ de coordonnées $(1 ; 26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de $T$.
   (b) En déduire $f'(-2)$.




**EXERCICE A.3.**
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie $f$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.




1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de $T$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

**EXERCICE A.4.**
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-3\,;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f$ est décroissante sur $[-3\,;0]$ ;
- $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$ ;
- $f(3)=9$.

**EXERCICE A.5.**
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=0$ ;
- $f(1)=3$ et $f'(1)=2$ ;
- $f(3)=6$ et $f'(3)=1$ ;
- $f(5)=7$ et $f'(5)=0$ ;
- $f(6)=6$ et $f'(6)=-4$.

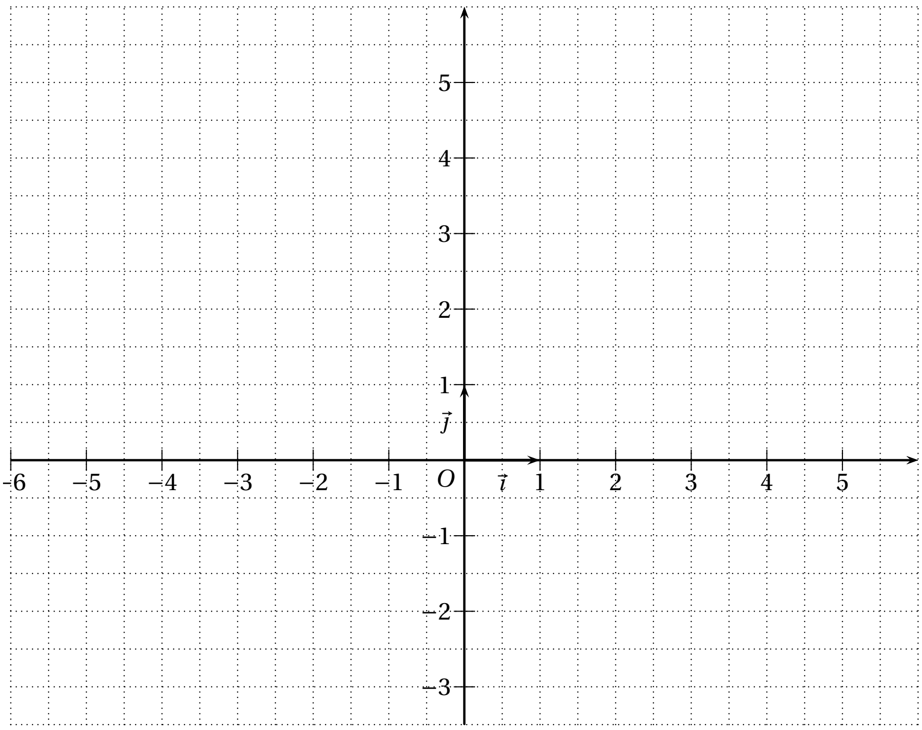
**EXERCICE A.6.**
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=1$ ;
- $f$ est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$ ;
- $f$ admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3)=-1$ et $f(5)=-1$ ;
- $f'(2)=0$, $f'(3)=1$ et $f'(5)=-1$ ;
- pour tout $x\in[2;5]$, $f(x)<0$.

**EXERCICE A.7.**
Tracer sur le repère ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ vérifiant les conditions suivantes :

- $f$ est définie sur $[-5\,;5]$ ;
- $f(0)=3$, $f(2)=1$ et $f(4)=2$ ;
- $f'(0)=0$, $f'(2)=-\frac{1}{2}$ et $f'(4)=3$.

*On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.*

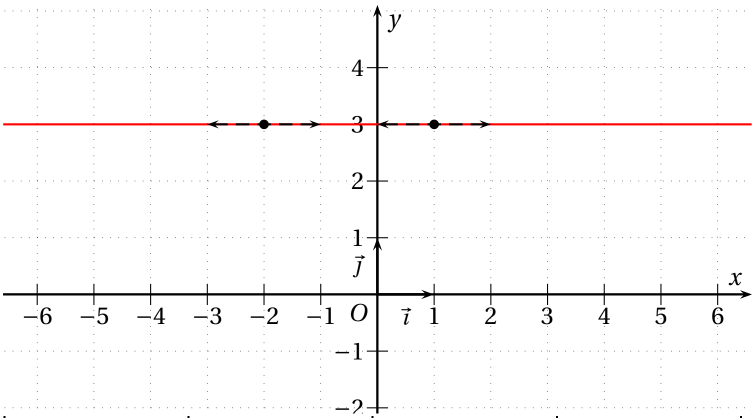



## A.2 Fonction dérivée

### A.2.1 Activités

**ACTIVITÉ A.3** (Fonctions dérivées des fonctions usuelles)**.**
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

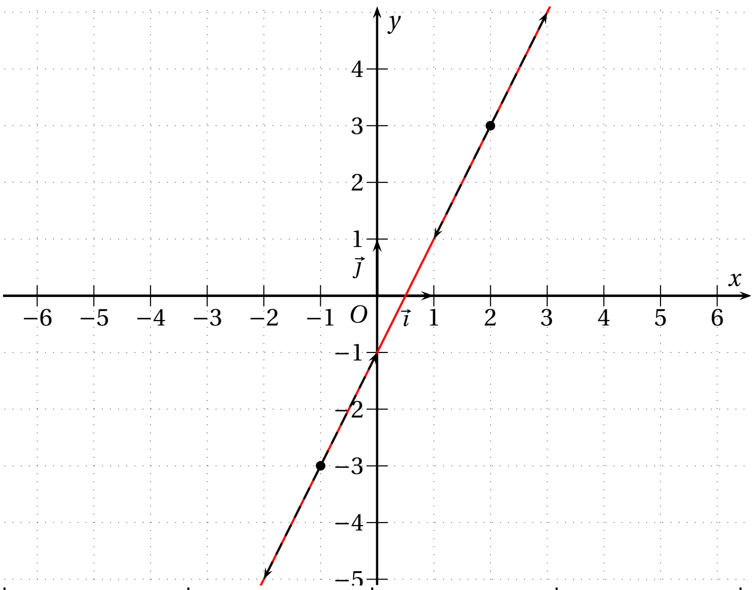
FIGURE A.4: Fonction constante : $f(x) = 3$




| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

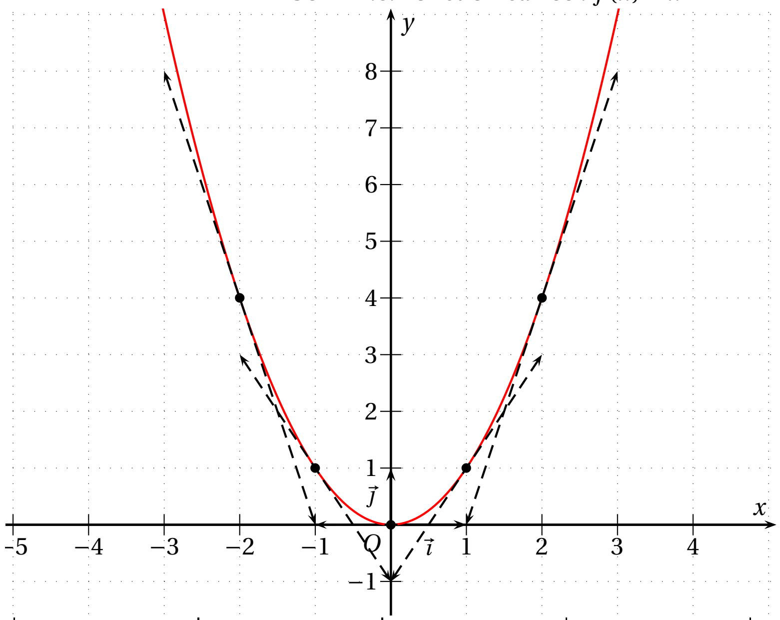
FIGURE A.5: Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$




| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

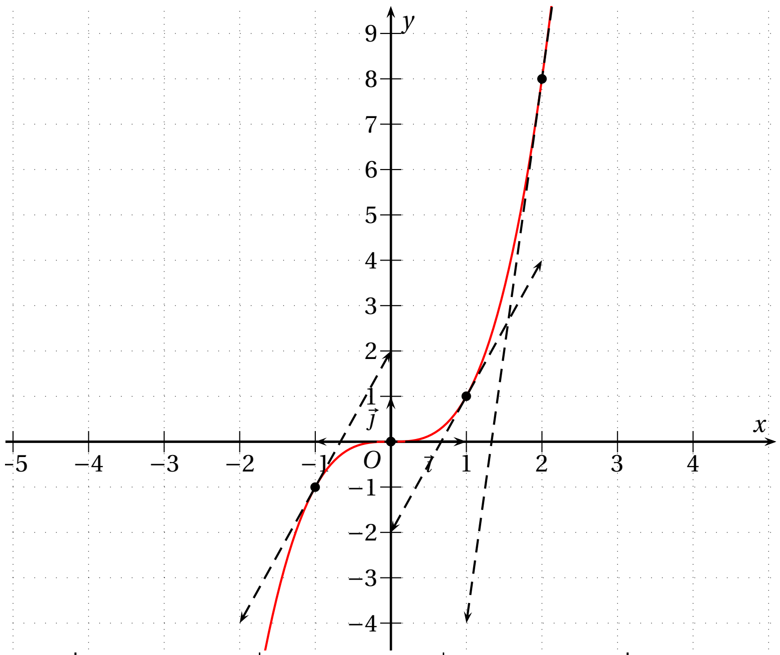
FIGURE A.6: Fonction carrée : $f(x) = x^2$




| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

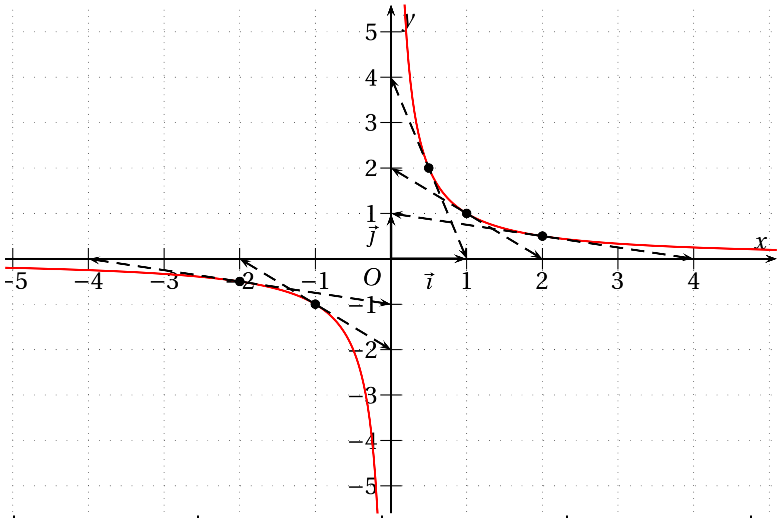
FIGURE A.7: Fonction cube : $f(x) = x^3$




| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIGURE A.8: Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$

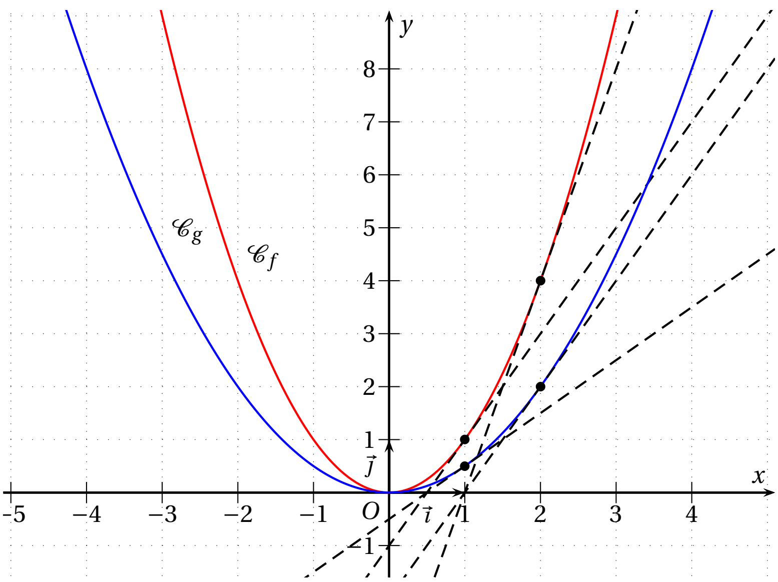



| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0,5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

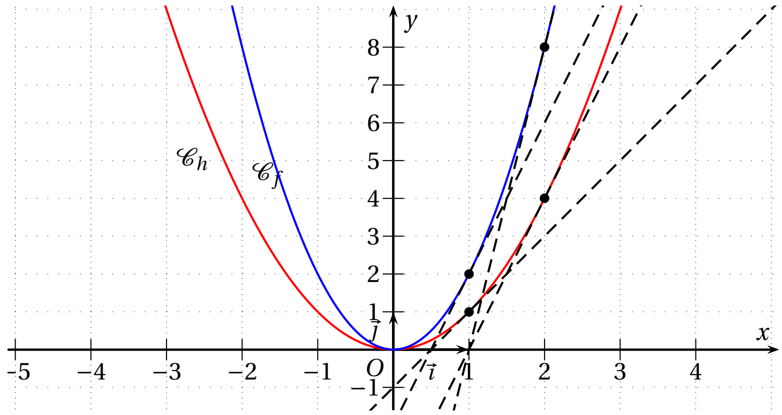
$\boxed{f'(x) = \ldots\ldots}$

**ACTIVITÉ A.4** (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante)**.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative. Sur la figure ci-dessous :
   (a) Déterminer par lecture graphique $f'(1)$ et $g'(1)$.
   (b) Déterminer par lecture graphique $f'(2)$ et $g'(2)$.
   (c) Conjecturer l'expression de $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$.



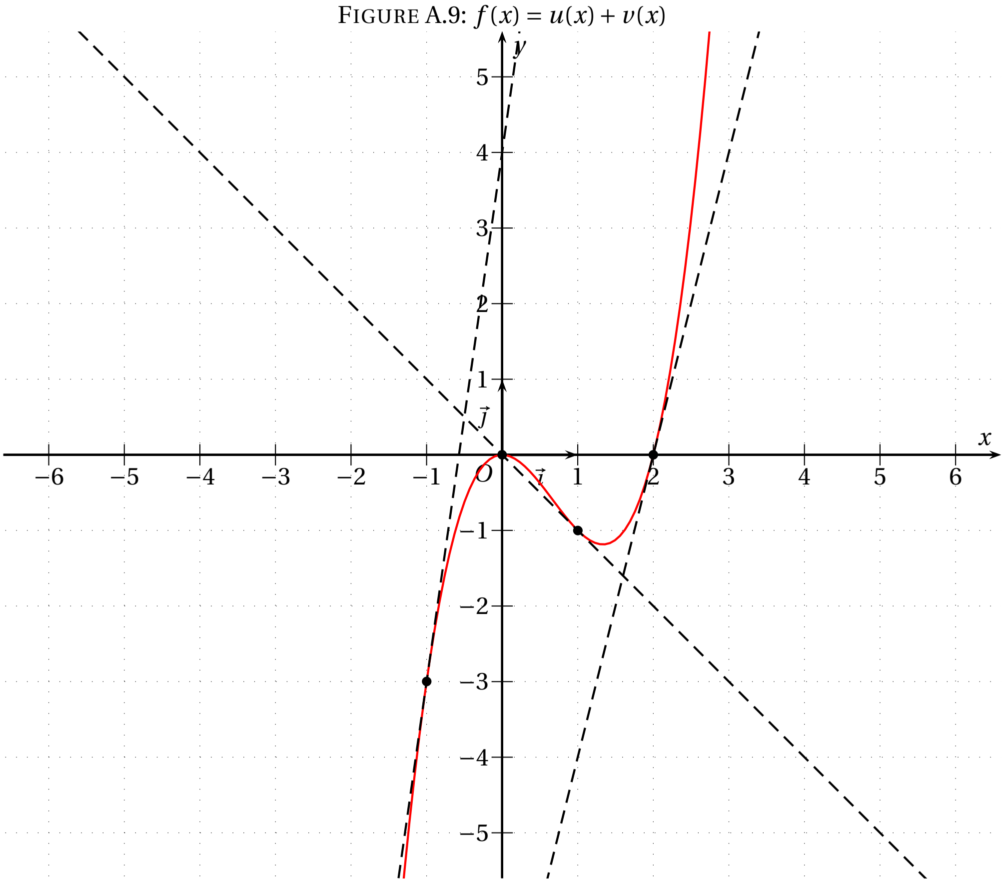

2. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.
   (a) D'après votre précédente conjecture, déterminer quelle devrait être $h'(x)$.
   (b) Vérifier votre conjecture sur le graphique de la figure suivante.




**ACTIVITÉ A.5** (Fonction dérivée d'une somme de fonction).

1. Soient $u$, $v$ et $f$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.
   (a) Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) On donne sur la figure A.9 de la présente page la courbe représentative de $f$ ainsi que quelques tangentes. À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

FIGURE A.9: $f(x) = u(x) + v(x)$




| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | | | |
| $v'(x)$ | | | | |
| $f'(x)$ | | | | |

   (c) Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

2. Soient $l$, $m$ et $g$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = x^2$, $m(x) = x-2$ et $g(x) = l(x) \times m(x)$.
   (a) Déterminer $l'(x)$ et $m'(x)$.
   (b) Montrer que $g(x) = f(x)$.
   (c) Compléter alors le tableau suivant :

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $l'(x)$ | | | | |
| $m'(x)$ | | | | |
| $g'(x)$ | | | | |

   (d) Quelle formule « intuitive » est fausse ?

### A.2.2 Bilan et compléments

**Fonctions dérivées des fonctions usuelles**

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

| **Fonction $f$** | **définie sur** | **Fonction dérivée $f'$** | **définie sur** |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ (constante) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = mx + p$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = m$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^{*+} = ]0\,;+\infty[$ |

**Opérations algébriques et dérivation**

Soient $u$ et $v$ définies et dérivables sur un même intervalle $I$. Les fonctions dérivées sont données dans le tableau ci-dessous :

| **Fonction** | **Fonction dérivée** |
|---|---|
| $ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ | $ku'$ |
| $u + v$ | $u' + v'$ |
| $u \times v$ | $u'v + uv'$ |
| $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ |
| $\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ |

**Variations et fonction dérivée**

**Propriété A.1.** *Soit $f$ une fonction dérivable et définie sur un intervalle $I$. On note $f'$ sa fonction dérivée. On a alors :*
- *$f$ est croissante sur $I$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ ;*
- *$f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.*

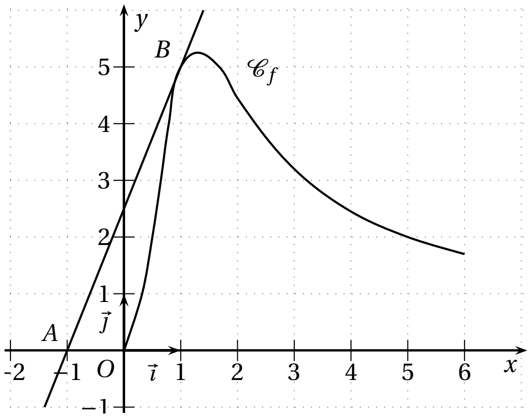
# A.3 Exercices

## A.3.1 Lectures graphiques et fonctions dérivées

**EXERCICE A.8.**

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$. Soit $A$ le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et $B$ le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point $B$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La droite $(AB)$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $B$.




1. Déterminer $f'(1)$, où $f'$ est la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 ci-dessousreprésente la fonction $f'$. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

Figure 1

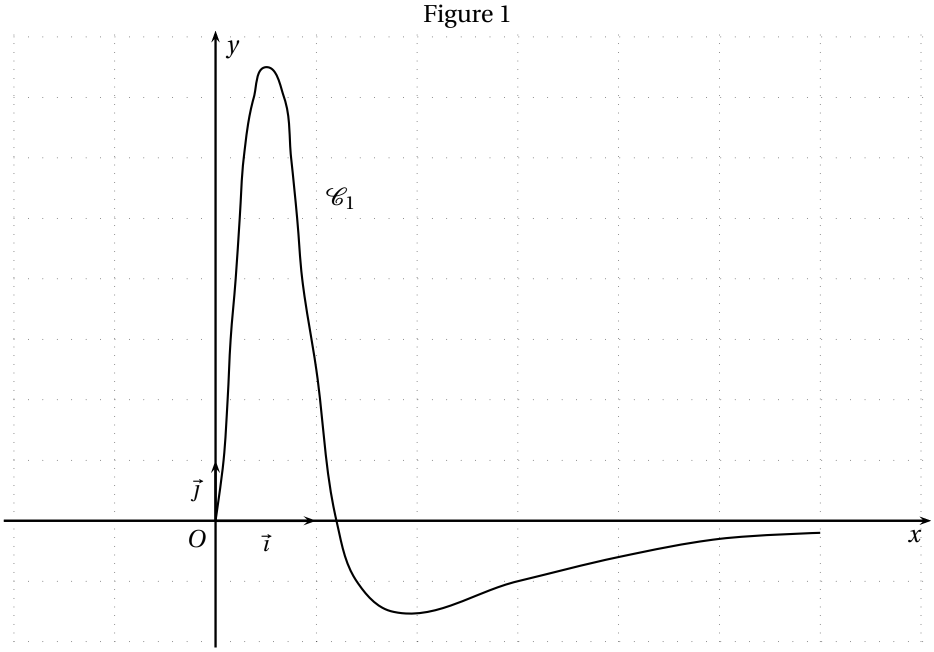



Figure 2

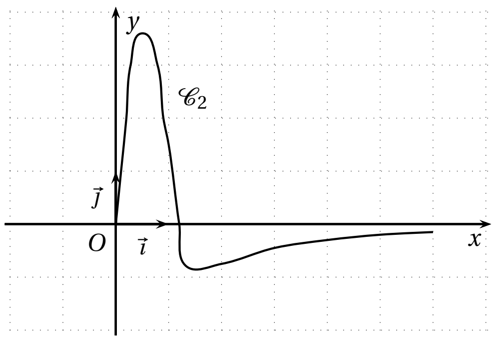
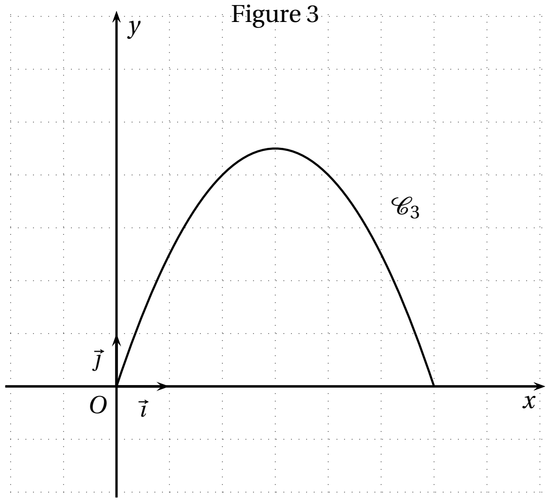
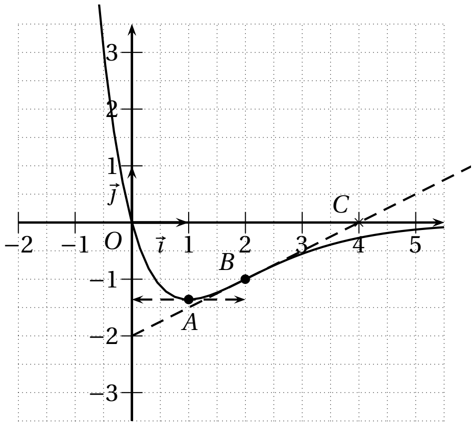



Figure 3



**EXERCICE A.9.**

La courbe ($\mathscr{C}$) de la figure ci-dessous est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

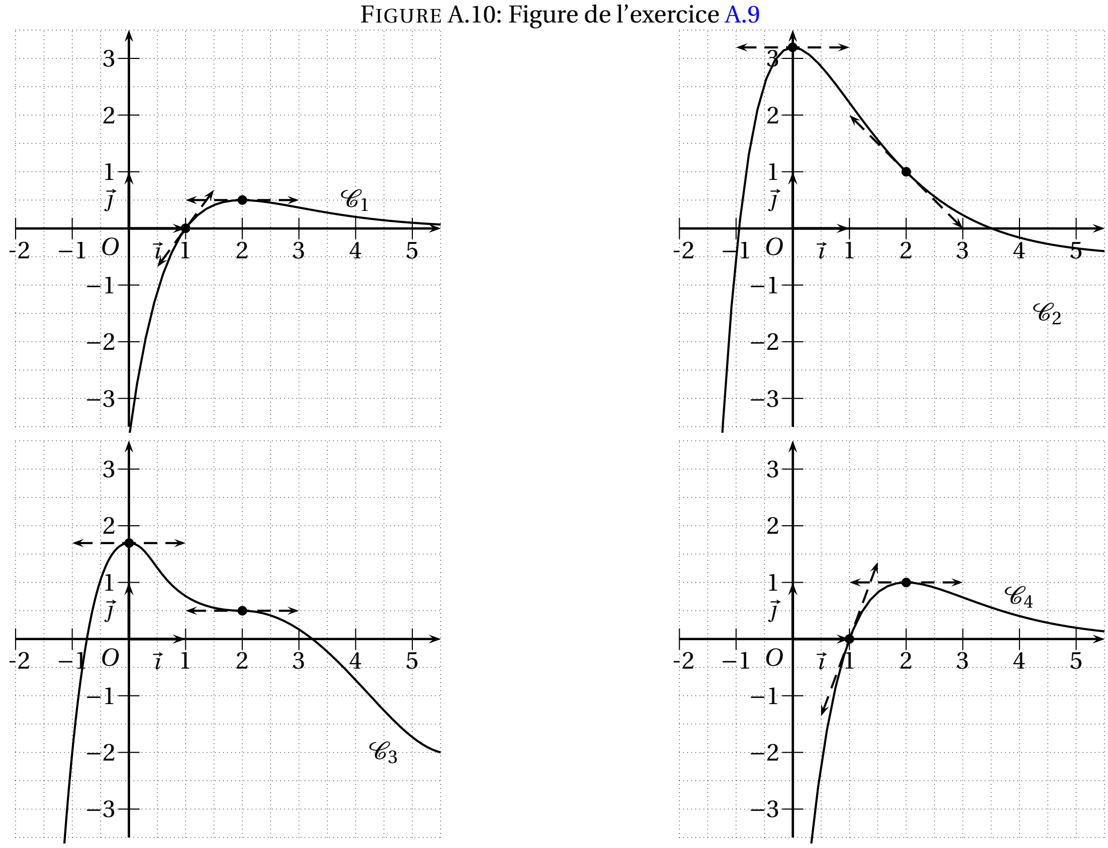



On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2;-1)$ appartient à ($\mathscr{C}$) ;
- la tangente à la courbe ($\mathscr{C}$) au point $B$ passe par le point $C(4;0)$ ;

1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques de la figure A.10 de la présente page, représente la fonction dérivée $f'$ de $f$, une autre représente une fonction $h$ telle que $h' = f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction $f'$.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction $h$.

FIGURE A.10: Figure de l'exercice A.9




## A.3.2 Calculs et dérivées

**EXERCICE A.10.**

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
6. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
7. $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$ ;

**EXERCICE A.11.**
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. En déduire les variations de $f$.
3. Dresser le tableau des variations de $f$ en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que $f$ admet un extremum.

**EXERCICE A.12.**
On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0;2]$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
2. En déduire les variations de $f$.
3. Dresser le tableau des variations de $f$.
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de $f$ aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de $f$.

**EXERCICE A.13.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée $f'$ de $f$. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de $f$ en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

**EXERCICE A.14.**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée $f'$ de $f$. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de $f$.
2. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer $T$ et $\mathscr{C}$.
4. (a) À l'aide du graphique, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner des valeurs approchées de ces solutions, à $10^{-1}$ près.

**EXERCICE A.15.**
On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée $g'$.
3. Dresser le tableau des variations de $g$.
4. Déterminer si $g$ admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction $g$

**EXERCICE A.16.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée $f'$ de $f$.
2. Soit $A$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de $A$, puis une équation de la tangente $T_A$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $A$.
3. Soit $B$ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de $B$, puis une équation de la tangente $T_B$ à la courbe $\mathscr{C}$ en $B$.
4. Tracer dans un même repère $T_A$, $T_B$ et $\mathscr{C}$.

**EXERCICE A.17.**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de $f$.
3. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ ?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur $-3$.

**EXERCICE A.18.**
$f$ est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère du plan.
On donne sur la figure A.11 page xiii un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
*On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).*

1. $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$ et établir le tableau de variation de la fonction $f$ (on indiquera les extremums locaux de $f$).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit $T$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de $T$.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE A.11: Annexe de l'exercice A.18