Mathématiques en Seconde

David ROBERT

2012–2013

Sommaire

Chapitre 1

Translation – Vecteurs

Sommaire

1.1 Translation

1.1.1 Définition

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

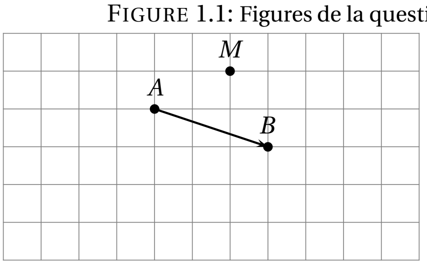
1.1.2 Activités

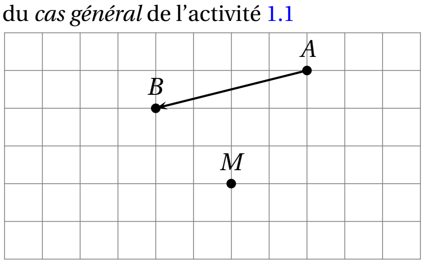
ACTIVITÉ 1.1 (Image d'un point par une translation)**.**

Cas général

1. Sur la figure 1.1 de la présente page, construire M', image de M par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 1.1: Figures de la question 1 du *cas général* de l'activité 1.1

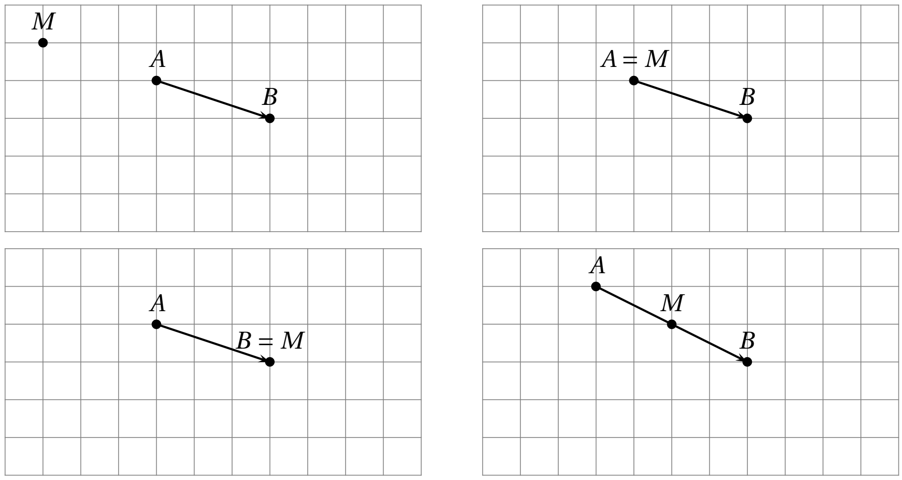




2. Dans chaque construction, on voit apparaître une figure familière. Laquelle ?
Démontrer que c'est toujours le cas.

Quelques cas particuliers Sur la figure 1.2 page suivante, construire M', l'image de M par la translation qui transforme A en B.

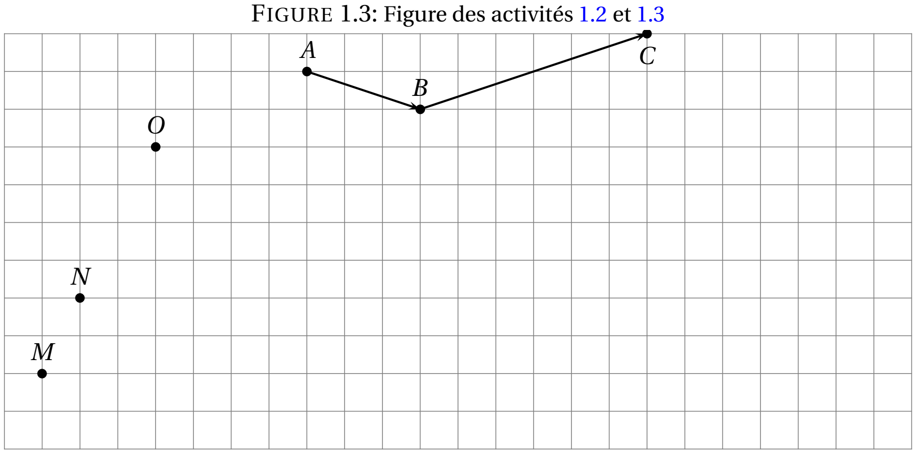
FIGURE 1.2: Figures de la question *cas particulier* de l'activité 1.1



ACTIVITÉ 1.2 (Quelques propriétés de la translation)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 1.3 de la présente page.

1. Construire M', N' et O', images respectives de M, N et O par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 1.3: Figure des activités 1.2 et 1.3



2. Construire P, image de O la translation qui transforme M en M'. Que constate-t-on ?
3. Les points M, N et O sont alignés. Cela semble-t-il être aussi le cas des points M', N' et O' ?
   Démontrons-le.
   (a) D'après la propriété obtenue dans le cas général, quels sont les parallélogrammes issus de la translation ?
   (b) Quelles sont alors les droites parallèles à (AB) ? Quelles sont les longueurs égales à AB ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les quadrilatères $MNN'M'$, $NOO'N'$?
   (d) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et $(M'N')$? Et pour les droites (ON) et $(O'N')$?
   (e) Conclure.
4. Construire l'image d'un autre point situé sur le segment $[OM]$. Sur quel segment est située cette image ?
   Conjecturer quelle est l'image du segment $[OM]$ et celle de la droite (OM).
5. Que peut-on dire des longueurs MN et $M'N'$? Et des longueurs ON et $O'N'$? *Justifier, en utilisant éventuellement un résultat de la démonstration de la question 3.*

ACTIVITÉ 1.3 (Enchaînement de deux translations)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 1.3 de la présente page.

1. Construire M'', N'' et O'', images respectives de M', N' et O' par la translation qui transforme B en C.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ONN''O''$? *Justifier.*
3. Quelle est la transformation qui permet de passer des points M, N et O aux points M'', N'' et O'' ?

1.1.3 Bilan et compléments

Définition 1.1 (Rappel)**.** Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Propriété 1.1. *Soient A et B deux points du plan et M ayant pour image M′ par la translation qui transforme A en B. Alors ABM′M est un* ....

Cela a été démontré dans l'activité.

Propriété 1.2. *Soient A et B deux points du plan et M, N et O ayant pour images respectives M′, N′ et O′ par la translation qui transforme A en B. Alors :*
- *Si M, N et O sont alignés alors* ....
- *L'image du segment* $[MN]$ *est* .... *de même* ....
- *Si O est le milieu du segment* $[MN]$ *alors* ....

On dit que la translation conserve ...., ... *et* ....

Le premier et le deuxième points ont été démontrés dans l'activité. Le troisième point est une conséquence triviale des deux premiers.

Propriété 1.3 (admise)**.** *L'image d'une droite par une translation est* ....
L'image d'un cercle par une translation est ....

Enfin, comme on l'a vu en activité :

Propriété 1.4. *L'enchaînement (on parle de la* composition*) de deux translations est une translation.*

1.2 Vecteurs

1.2.1 Définition – Égalité

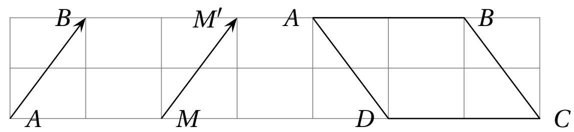
Définition 1.2. On appelle *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 1.3. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

On a vu précédemment que
- d'une part, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ parallélogramme (éventuellement aplati),
- d'autre part que les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Ce cas est général. Ainsi :

Propriété 1.5.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow$ ....
- $\overrightarrow{AB} =$ .... $\Leftrightarrow$ *ABDC est un parallélogramme*



Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Ainsi, on peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

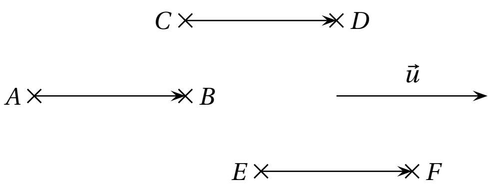
Définition 1.4. Un vecteur non nul est déterminé par :
- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 1.6. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

En effet, en appellant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ces deux vecteurs, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

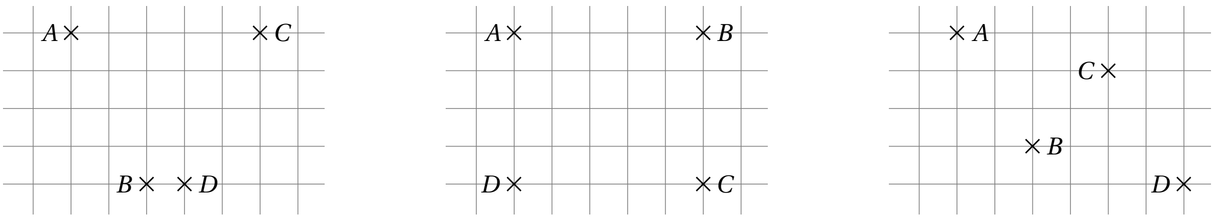
Notation $\vec{u}$



Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

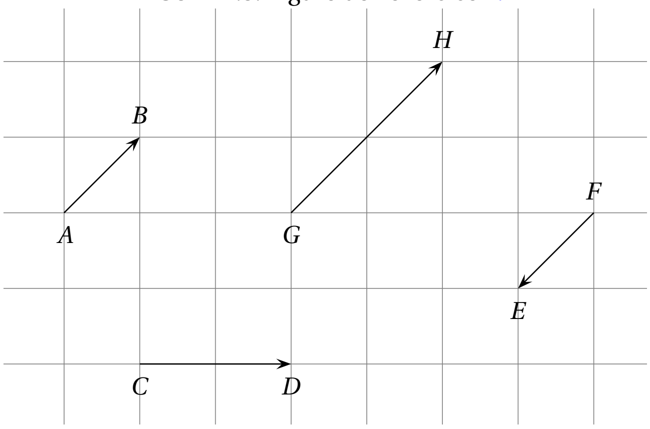
EXERCICE 1.1.
Sur chaque schéma de la figure 1.4, de la présente page, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?

FIGURE 1.4: Figure de l'exercice 1.1



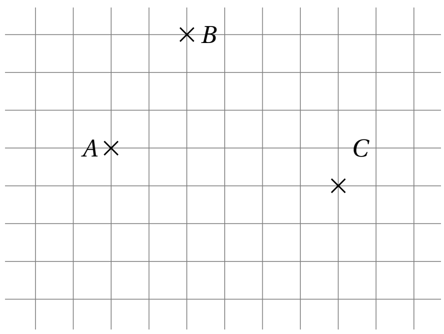
EXERCICE 1.2.
Sur la figure 1.5 de la présente page, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.

FIGURE 1.5: Figure de l'exercice 1.2



EXERCICE 1.3.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots = \ldots\ldots \quad \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \quad \overrightarrow{BF} = \ldots\ldots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?

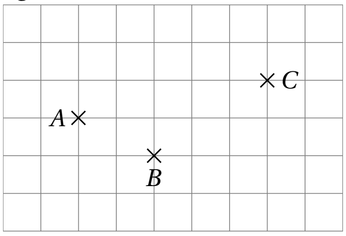


1.2.2 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

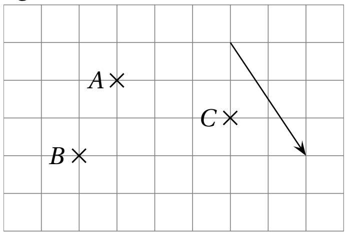
Définition 1.5. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

EXERCICE 1.4.

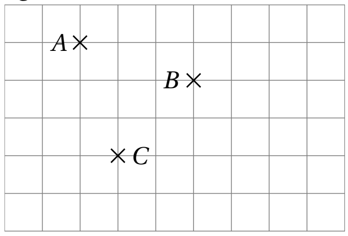
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



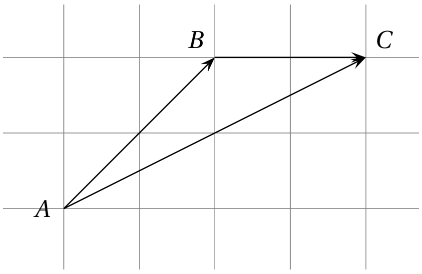
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$?

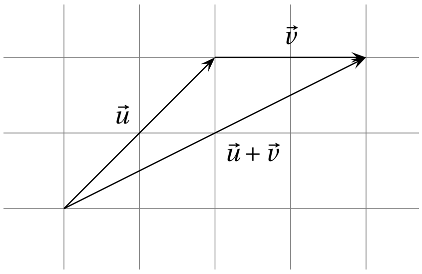


Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

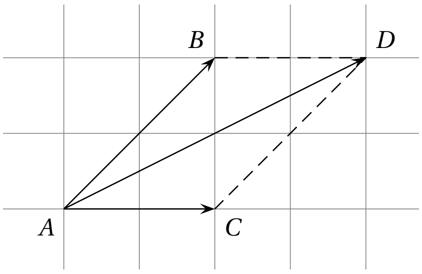


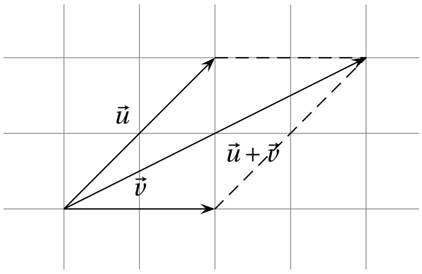
Propriété 1.7 (Relation de CHASLES)**.** *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$





Propriété 1.8 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ *ABCD parallélogramme.*



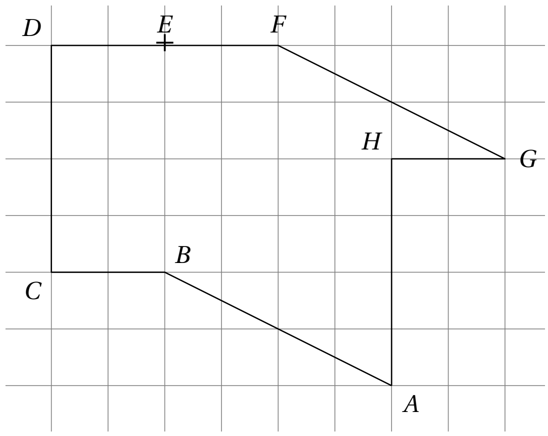


EXERCICE 1.5 (Relation de CHASLES)**.**
Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{XL}+\overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\ldots P}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E}=\overrightarrow{F\ldots}+\overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots}=\ldots\ldots+\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R\ldots}+\overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots C}+\overrightarrow{\ldots D}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y}=\overrightarrow{XJ}+\ldots\ldots+\overrightarrow{R\ldots}$

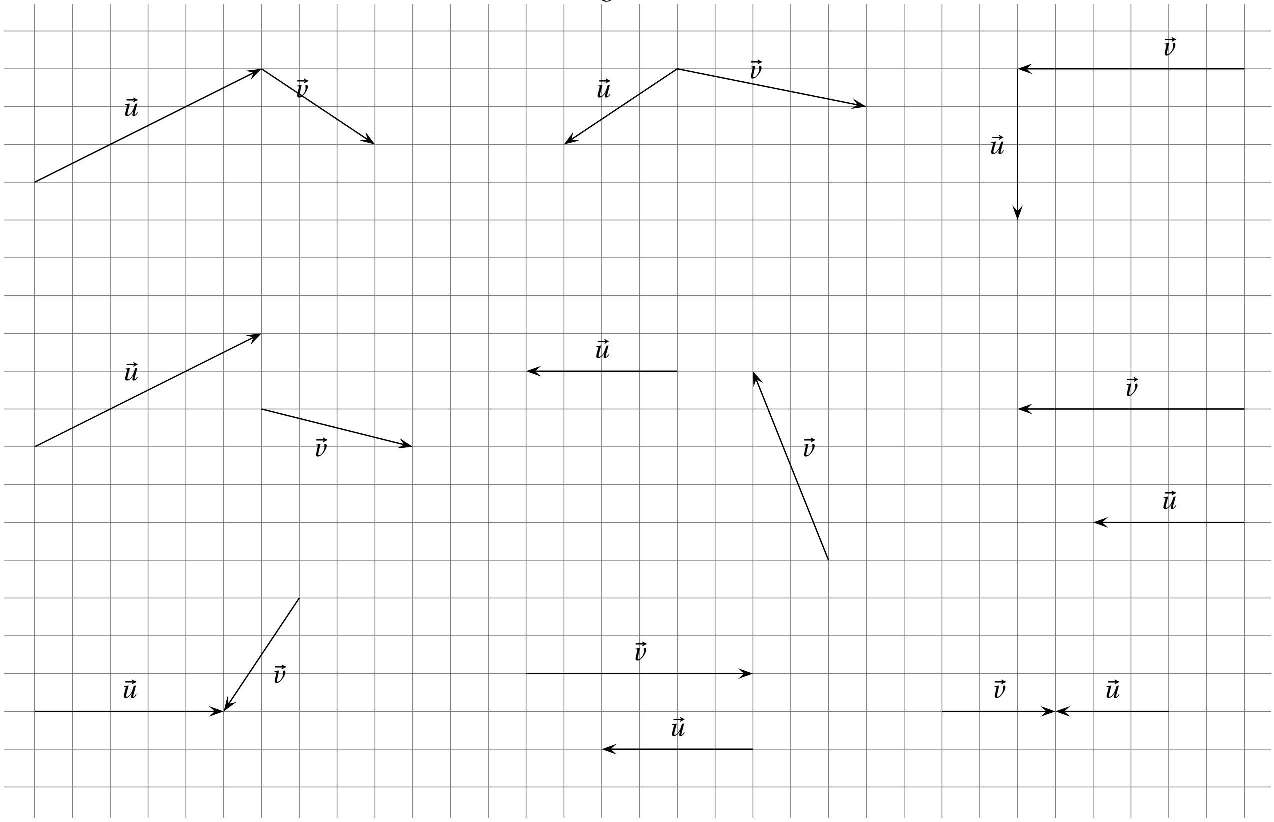
EXERCICE 1.6 (Vecteurs égaux, somme)**.**
On considère le motif représenté ci-contre.

1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif ;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$



EXERCICE 1.7 (Sommes)**.**
Dans chacun des cas de la figure 1.6 page suivante, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

FIGURE 1.6: Figure de l'exercice 1.7



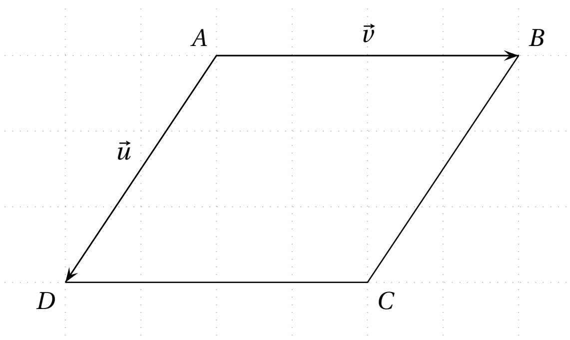
1.2.3 Vecteur nul – Vecteurs opposés

Définition 1.6. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. On a donc :

Propriété 1.9. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB}=$ .... et $\overrightarrow{BA}=$ ....*

EXERCICE 1.8 (Différence).
Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DA}=$ ....;
- $\overrightarrow{CB}=$ ....;
- $\overrightarrow{DC}=$ ....;
- $\overrightarrow{AC}=$ ....;
- $\overrightarrow{CD}=$ ....;
- $\overrightarrow{CA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DB}=$ ....;
- $\overrightarrow{BD}=$ ....;
- $\overrightarrow{BC}=$ ....;

Enfin on a la propriété suivante :

Propriété 1.10. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors* .... $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

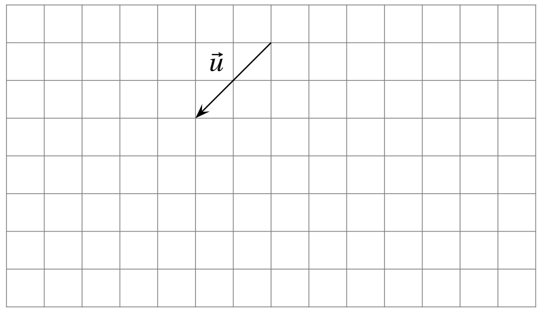
1.2.4 Produit d'un vecteur par un réel

ACTIVITÉ 1.4.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.

   Quelles propriétés géométriques partagent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Quelles sont leurs différences ?

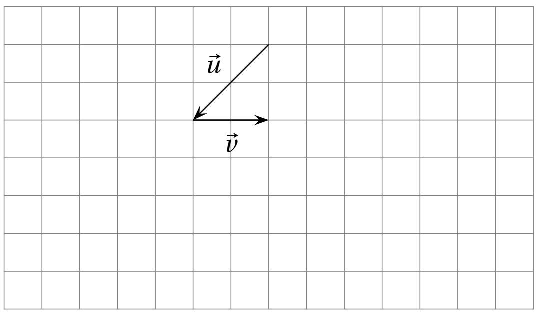
2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
   En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{\imath} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\jmath} = 1,5\vec{u}$.

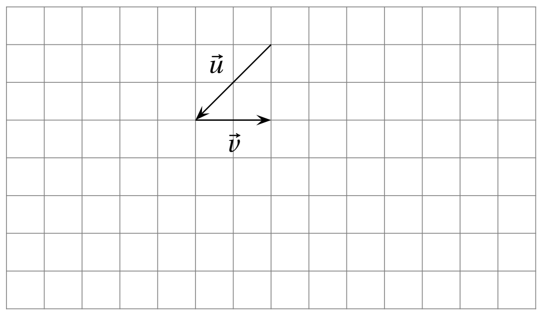


On a ainsi :

Définition 1.7. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :
- la direction est ....
- le sens est ....
- la norme est ....

ACTIVITÉ 1.5.
On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.
Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?





On a ainsi :

Propriété 1.11. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u} + \vec{v}) =$ .... et $k\vec{u} + k'\vec{u} =$ ....*

On a de plus :

Propriété 1.12. *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $0\vec{u} =$ .... et $k\vec{0} =$ ....*

Propriété 1.13. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan, alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \ldots\ldots\ldots\ \overrightarrow{AB}$.*

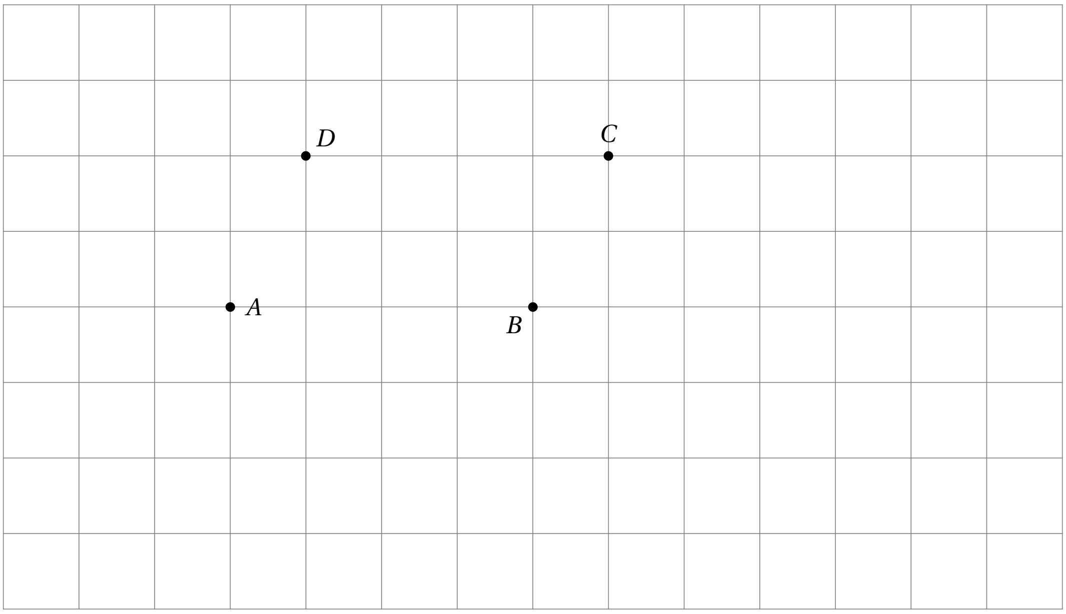
1.2.5 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 1.8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

ACTIVITÉ 1.6.
Sur la figure 1.7 de la présente page le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
On appelle E le symétrique de D par rapport à C et F le symétrique de D par rapport à A.

FIGURE 1.7: Figure de l'activité 1.6



1. Construire E et F.
2. Démontrer que les points F, B et E sont alignés.
3. Démontrer que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.
4. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ d'une part et $\overrightarrow{FE}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
5. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont-ils colinéaires ?

Ce résultat est général. Plus précisément :

Propriété 1.14. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

1.3 Exercices

EXERCICE 1.9.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

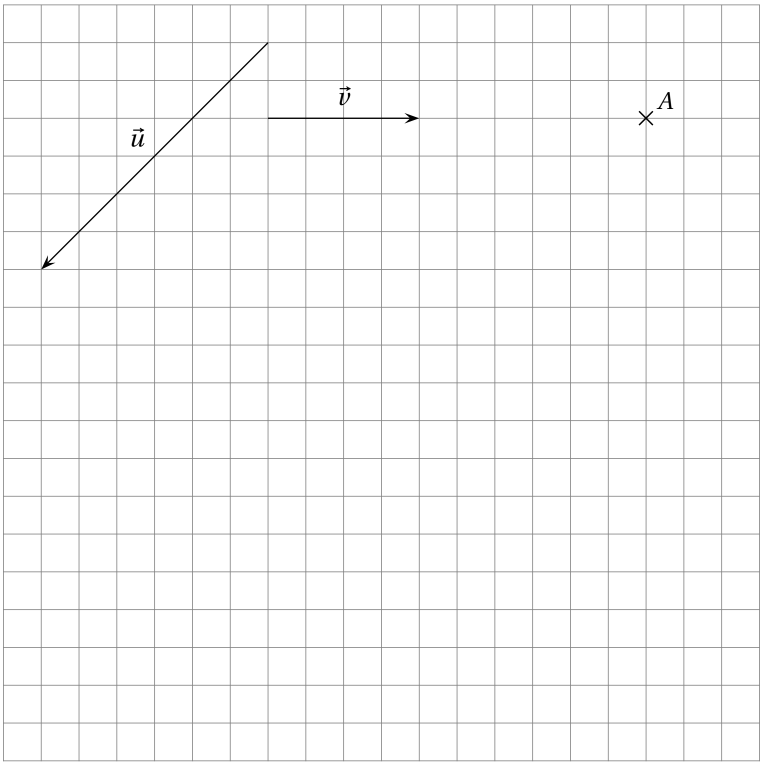
1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 1.10.
Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

EXERCICE 1.11.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné (voir la figure 1.8 de la présente page).

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{v}$ et $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on ? *Le justifier par un calcul sur les vecteurs.*

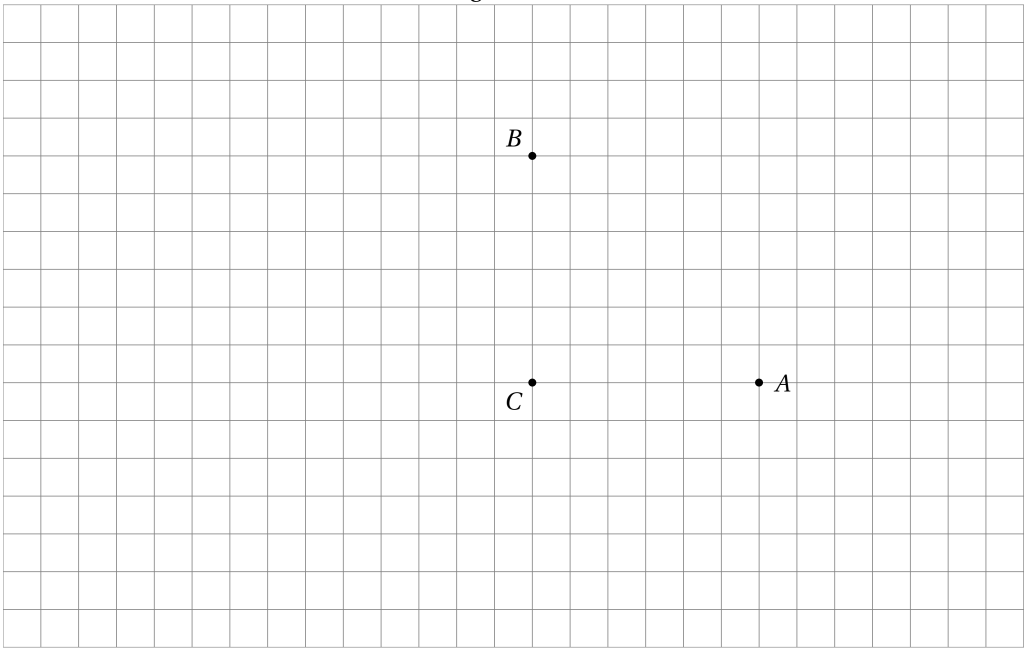
FIGURE 1.8: Figure de l'exercice 1.11



EXERCICE 1.12.
Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 1.9 page suivante).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
   En déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$.
   Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.

FIGURE 1.9: Figure de l'exercice 1.12



EXERCICE 1.13.
Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 1.14.
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 1.15.
Sur la figure 1.10 page ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Construire A' et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ d'une part et $\overrightarrow{DA'}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DA'}$?
4. Que peut-on en déduire pour les points A', E et D ?

EXERCICE 1.16.
Sur la figure 1.11 page suivante, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points B, F et J sont alignés.

FIGURE 1.10: Figure de l'exercice 1.15

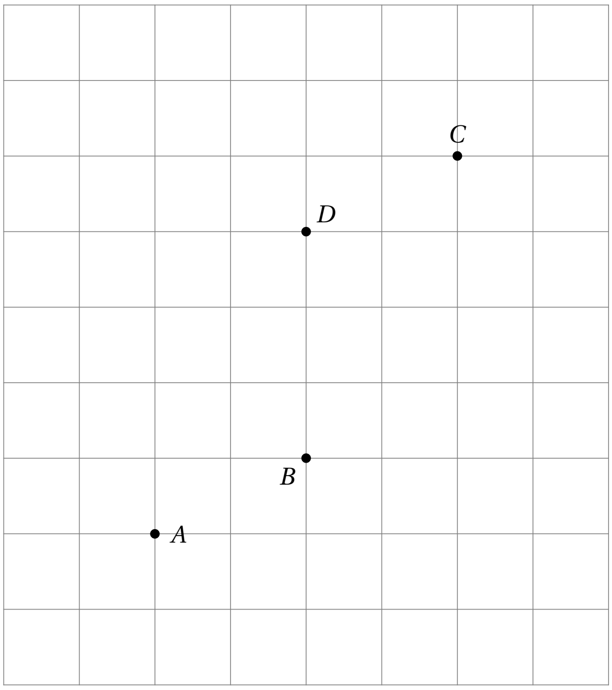
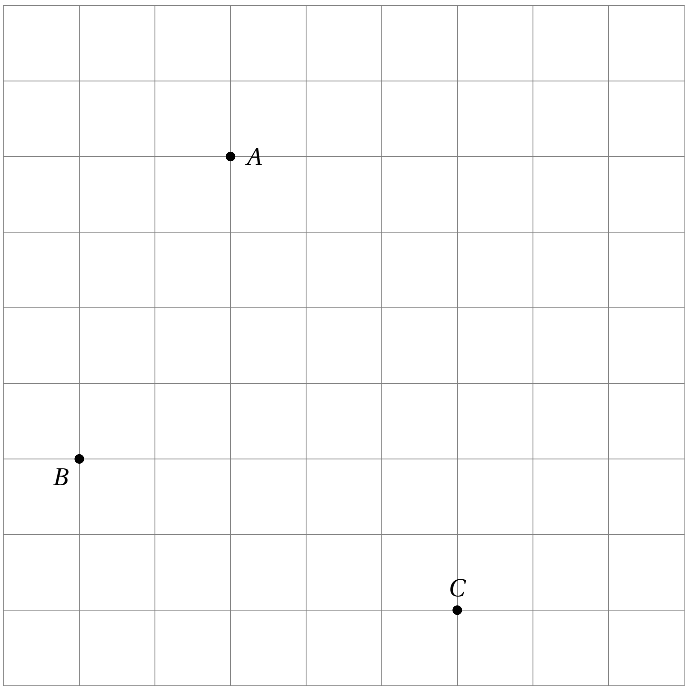


FIGURE 1.11: Figure de l'exercice 1.16



Devoir surveillé n°1

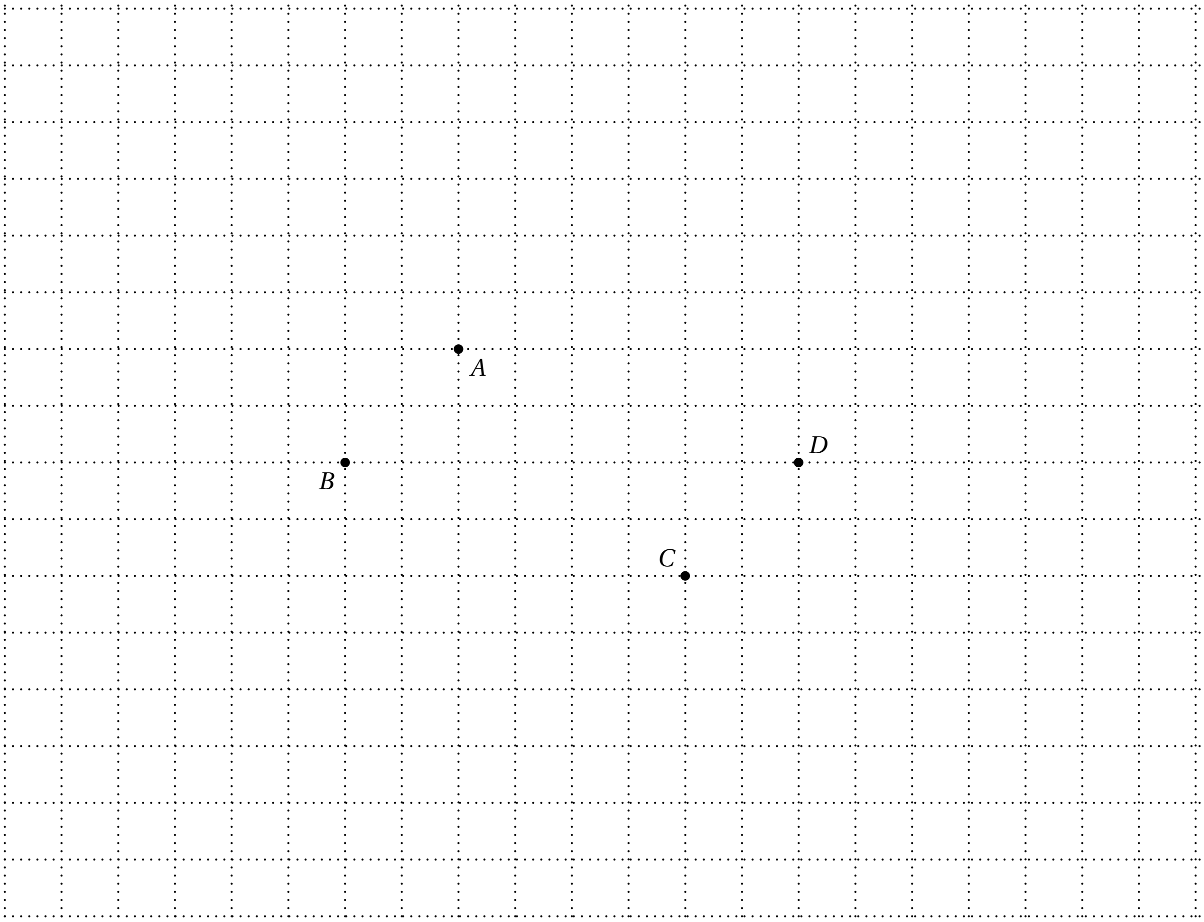
Calcul algébrique – Vecteurs

EXERCICE 1.1 (4 points).
Développer puis réduire les expressions suivantes :
- $A = (x-1)(2x^2+3)$
- $B = (x+1)^2 + (2x-1)^2$
- $C = (2x+1)^2 - (x-2)^2$
- $D = (ab-c)^2$

EXERCICE 1.2 (4 points).
Factoriser au maximum les expressions suivantes :
- $A = (x+1)(4x-3)+(x+1)(2x+1)$
- $B = (2x+1)^2 + (3x-1)(2x+1)$
- $C = 2x^3 + 5x^2$
- $D = (x-1)^2 - (2x-3)^2$

EXERCICE 1.3 (12 points).
On donne sur la figure ci-dessous le parallélogramme $ABCD$.
On donne les points suivants :
- A' est le symétrique de A par rapport à C
- E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BA}$
- F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA}$
- G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

1. Construire les points A', E, F et G.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
   (b) En déduire, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.
3. (a) À l'aide de la relation de CHASLES et de la question 2b, montrer que $\overrightarrow{DA'} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (c) Que peut-on conclure des questions 3a et 3b quant aux points A', D et E ?
4. (a) Exprimer $\overrightarrow{FD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (b) On rappelle qu'on a déjà obtenu que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.
   Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{FD}$? *Justifier.*
   (c) Que peut-on en déduire pour les droites (AA') et (FD) ?
5. (a) Montrer que $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (c) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{EC}$? *Justifier.*
   (d) Que peut-on conclure quant aux points C, E et G ?



Chapitre 2

Repérage

Sommaire

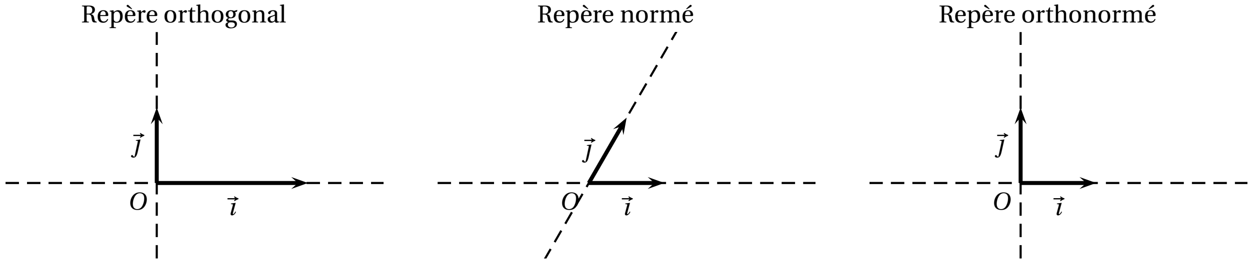
2.1 Repères et coordonnées

2.1.1 Repères

Définition 2.1. Soient O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes (non colinéaires), alors $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *repère* du plan.

Remarque. O est appelée *origine* du repère et le couple $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *base* du repère.

Définition 2.2. Soit un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.



2.1.2 Coordonnées de vecteur

Propriété 2.1 (admise)**.** *Le plan est muni d'une base* $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$*. Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x; y)$*, appelé* coordonnées de $\vec{u}$*, tel que* $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

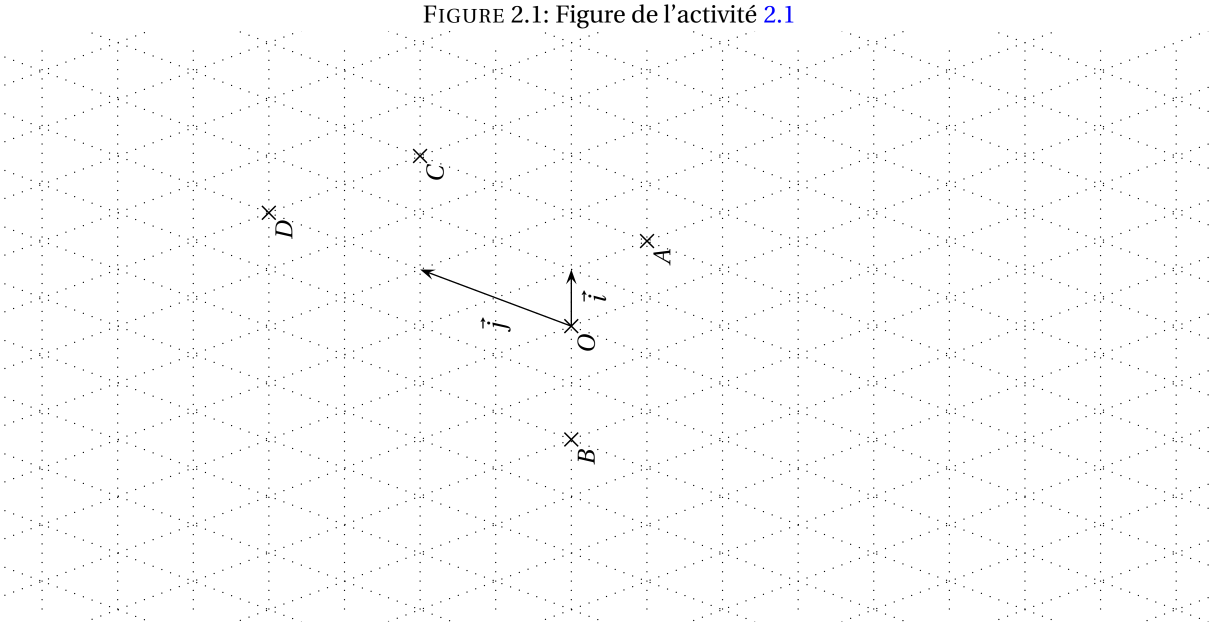
On notera indifférement $\vec{u}(x;y)$, ou $\vec{u}=(x;y)$, ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou $\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0;0)$.

ACTIVITÉ 2.1.
Sur la figure 2.1 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}$; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. (a) Soit E tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$. Construire E puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$.
   (b) Soit F tel que $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OC}$. Construire F puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$.
3. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?
4. (a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{DB}$. Que remarque-t-on ?
   (b) Construire un représentant du vecteur $\vec{v}=2\overrightarrow{OA}$. Déterminer ses coordonnées et les comparer à celles de $\overrightarrow{OA}$.
   (c) Soit K le milieu de $[AD]$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que remarque-t-on ?

FIGURE 2.1: Figure de l'activité 2.1



Plus généralement, on a les propriétés suivantes :

Propriété 2.2. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}=\left(x;\,y\right)$ et $\vec{v}=\left(x';\,y'\right)$ deux vecteurs et k un nombre.*
- *$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow$ .... = ... et .... = ...*
- *Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées (......... ; ....).*
- *Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées (......... ; ....).*

Elles seront démontrées en classe.

2.1.3 Coordonnées de point

Définition 2.3. Le plan étant muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M.

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

2.2 Propriétés

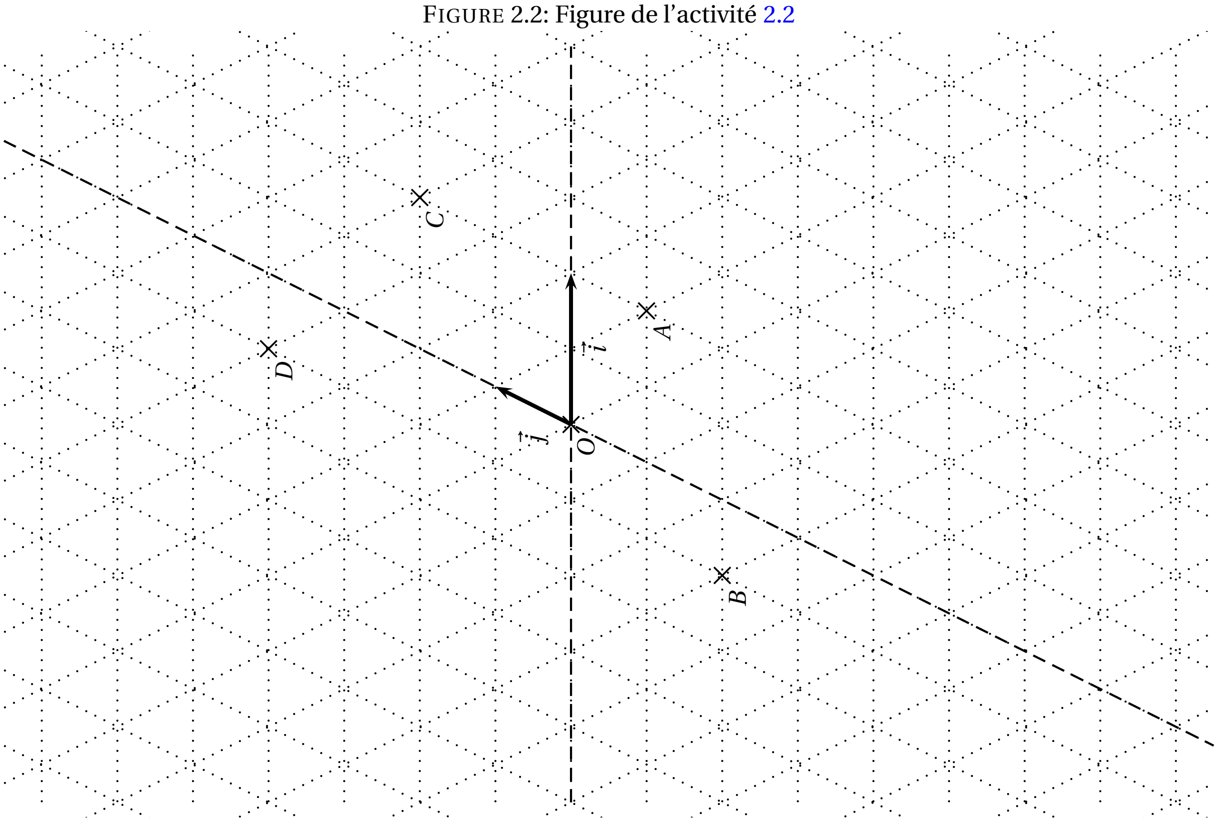
ACTIVITÉ 2.2.
Sur la figure 2.2 de la présente page ci-dessous, où le plan est muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

1. Placer les points $M(3;1)$, $N(-1;1,5)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-1)$.
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Par lectures graphiques, compléter le tableau suivant :

Point X	Coordonnées de X	Point Y	Coordonnées de Y	Coordonnées de $\overrightarrow{XY}$
A		B		
A		C		
A		D		
B		A		
B		C		
B		D		

Quel lien peut-on conjecturer entre les coordonnées des points X et Y et celles du vecteur $\overrightarrow{XY}$?

FIGURE 2.2: Figure de l'activité 2.2



ACTIVITÉ 2.3.
En faisant quelques essais sur la figure de l'activité précédente, conjecturer le lien existant entre les coordonnées de deux points et les coordonnées du milieu de ces deux points.

Bilan et compléments

Les propriétés suivantes seront démontrées en classe :

Propriété 2.3. *Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (.......... ; ....).

Propriété 2.4. *Soit P un plan muni d'un repère quelconque.*
Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $I(x_I;y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors $x_I = \ldots\ldots\ldots\ldots$ *et* $y_I = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété 2.5. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. Alors :*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 2.6. *Soit P un plan muni d'un repère* ***orthonormé***.
Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

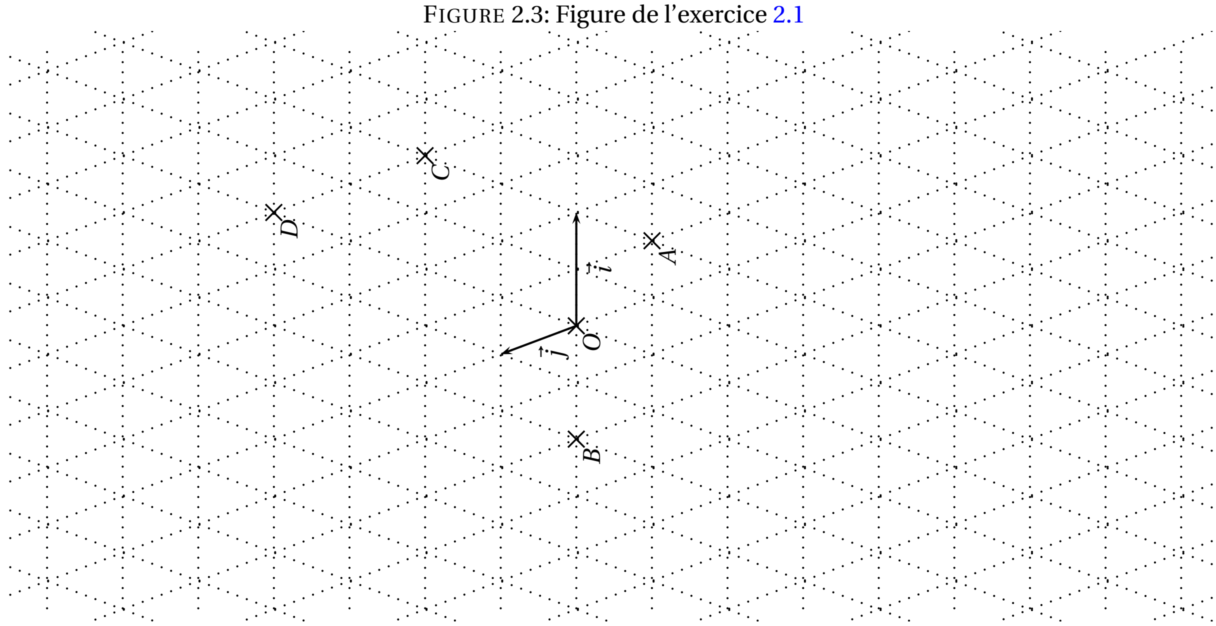
2.3 Exercices

2.3.1 Repère donné

EXERCICE 2.1.
Sur la figure 2.3 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $M(2;1)$, $N(-1,5;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(1,5;-1)$;
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;

FIGURE 2.3: Figure de l'exercice 2.1



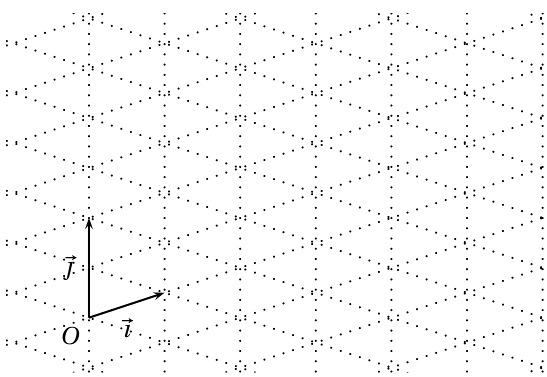
EXERCICE 2.2.
Le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(2\,;-4)$, $B\,(-1\,;3)$, $C\,(-3\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$, du vecteur $\overrightarrow{CB}$ et du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD} = \vec{u}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$?
4. Montrer que F milieu de $[OA]$.

EXERCICE 2.3.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(2\,;3)$ et $I\,(-4\,;1)$.
On sait que I est le milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées de B.

EXERCICE 2.4.
Sur le schéma ci-dessous où le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;1,5)$, $C(4\,;0,5)$ et $D(2\,;1)$;
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXERCICE 2.5.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(-5\,;3)$, $B\,(-4\,;1)$ et $C\,(1\,;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2.6.
Le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(-9\,;-10)$, $B\,(2\,;9)$, $C\,(5\,;3)$, $D\,(-1\,;-8)$ et $E\,(3\,;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 2.7.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

EXERCICE 2.8.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle ABC.

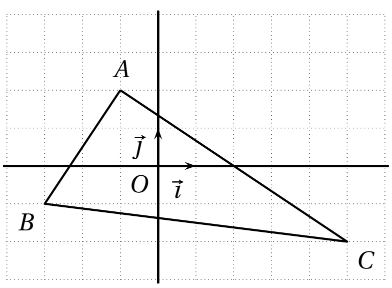
1. $A\,(-4\,;-1)$, $B\,(4\,;-2)$ et $C\,(-2\,;2)$
2. $A\,(-5\,;0)$, $B\,(3\,;-4)$ et $C\,(2\,;4)$
3. $A\,(0\,;0)$, $B\,(4\,;2\sqrt{3})$ et $C\,(-1\,;3\sqrt{3})$

EXERCICE 2.9.
Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne $A\,(1\,;1)$, $B\,(4\,;5)$ et $C\,(10\,;13)$.

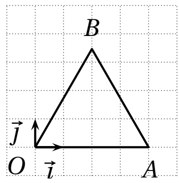
1. Déterminer les longueurs AB, AC et BC.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

EXERCICE 2.10.
Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne $A\,(-1\,;2)$, $B\,(-3\,;-1)$ et $C\,(5\,;-2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Montrer que :
   (a) Le périmètre p de ABC vaut $\sqrt{13}(3+\sqrt{5})$;
   (b) L'aire a de ABC est un nombre entier.



EXERCICE 2.11.
Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, A a pour coordonnées $(4\,;0)$ et le triangle OAB est équilatéral.
Démontrer que B a pour coordonnées $(2\,;2\sqrt{3})$.



EXERCICE 2.12.
Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on a appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3.
Pour chacun des points suivants, déterminer, par le calcul, s'il est sur le cercle $\mathscr{C}$ et, sinon, s'il est sur le disque délimité par $\mathscr{C}$.

- $B\,(-1\,;-2{,}8)$
- $C\,(2{,}5\,;-1{,}7)$
- $D\,(-1{,}5\,;2{,}5)$

EXERCICE 2.13.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$:

1. $A\,(1\,;0)$, $B\,(1\,;3)$, $C\,(2\,;3)$ et $D\,(3\,;1)$;
2. $A\,(1\,;2)$, $B\,(4\,;7)$, $C\,(1\,;6)$ et $D\,(-2\,;1)$;
3. $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;2)$, $C\,(4\,;4)$ et $D\,(5\,;2)$;
4. $A\,(-4\,;-1)$, $B\,(4\,;-2)$, $C\,(8\,;5)$ et $D\,(0\,;6)$;
5. $A\,(0\,;-2)$, $B\,(3\,;-1)$, $C\,(2\,;2)$ et $D\,(-1\,;1)$.

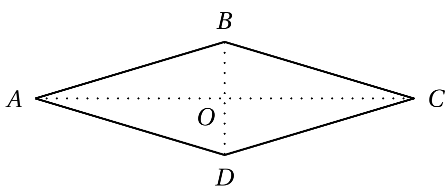
EXERCICE 2.14.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points $A\,(-3\,;-4)$, $B\,(3\,;2)$, $C\,(7\,;-2)$ et $D\,(1\,;-8)$.

1. Montrer que :
   (a) $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ;
   (b) $AC = BD$.
2. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
   (b) Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

2.3.2 Repère à choisir

EXERCICE 2.15.
Le quadrilatère $ABCD$ donné ci-dessous est un losange de centre O.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire de quel type est le repère et donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.

- $\left(A\,;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$
- $\left(O\,;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$
- $\left(O\,;\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$
- $\left(D\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}\right)$



EXERCICE 2.16.
$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AD]$, E est le symétrique de B par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et montrer que D est le milieu de $[EC]$

EXERCICE 2.17.
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $AD = 5$ cm.
J est le point de $[AD]$ tel que $AJ = 3$ cm.
M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer la nature du triangle MJC.

EXERCICE 2.18.
$BOIS$ est un carré de côté 12 cm.
P est le milieu de $[BS]$ et N est le point de $[BO]$ tel que $BN = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer si le triangle PIN est rectangle.

EXERCICE 2.19.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm.
E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[OD]$.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et démontrer que le triangle CFE est rectangle et isocèle.

2.3.3 Algorithmique

EXERCICE 2.20.
Que fait l'algorithme suivant qui pourrait être en rapport avec ce chapitre ?

```
ENTREES
  a, b, c, d
INSTRUCTIONS
  e PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
  f PREND_LA_VALEUR (b+d)/2
SORTIES
  AFFICHER e, f
```

EXERCICE 2.21.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de deux points et affichant la distance entre ces deux points dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2.22.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de trois points A, B et C et dessinant le triangle ABC dans un repère.

EXERCICE 2.23.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de trois points A, B et C, et calculant les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme et dessinant $ABCD$ dans un repère.

EXERCICE 2.24.
Écrire les algorithmes prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé et

- pour le premier : indiquant si le triangle est isoèle.
- pour le deuxième : indiquant si le triangle est équilatéral.
- pour le troisième : indiquant si le triangle est rectangle.
- pour le dernier : indiquant la nature du triangle.

Devoir surveillé n°2

Calcul algébrique – Repérage

EXERCICE 2.1 (3 points).
On donne l'algorithme suivant :
- Choisir un nombre entier n
- Multiplier ce nombre entier par le nombre entier suivant
- Retrancher au résultat obtenu le nombre entier choisi au départ
- Donner le résultat

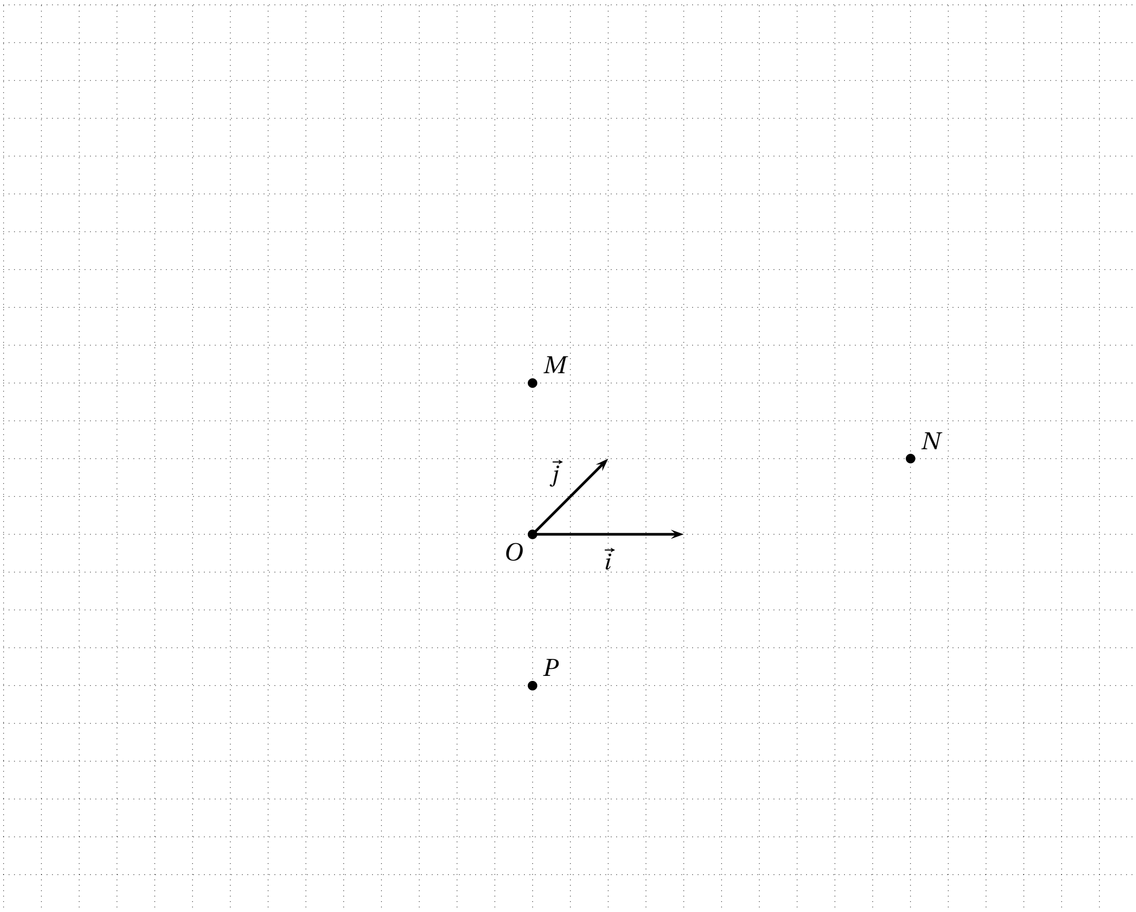
1. Appliquer cet algorithme en prenant :
   - $n = 2$;
   - $n = 5$;
   - $n = -3$.

   Quel semble être le résultat de cet algorithme ?
2. Prouver que c'est toujours vrai.

EXERCICE 2.2 (5 points).
On donne la figure 2.1 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P
2. Placer les points $A(-2;0)$, $B(-1;4)$ et $C(1;3)$.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de I, sachant que I est le milieu du segment $[AC]$.
4. Déterminer, par le calcul, quelles sont les coordonnées de D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

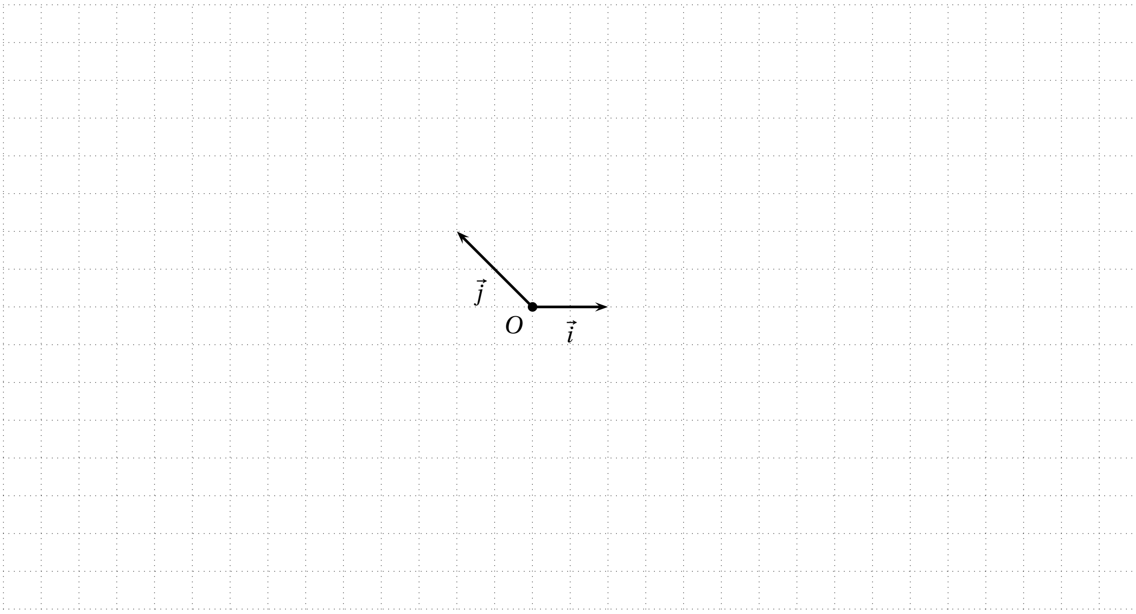
FIGURE 2.1: Figure de l'exercice 2.2



EXERCICE 2.3 (6,5 points).
On donne la figure 2.2 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points $A(-4;-1)$, $B(2;2)$, $C(4;3)$, $D(5;1)$ et $E(1;-1)$.
2. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3. Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

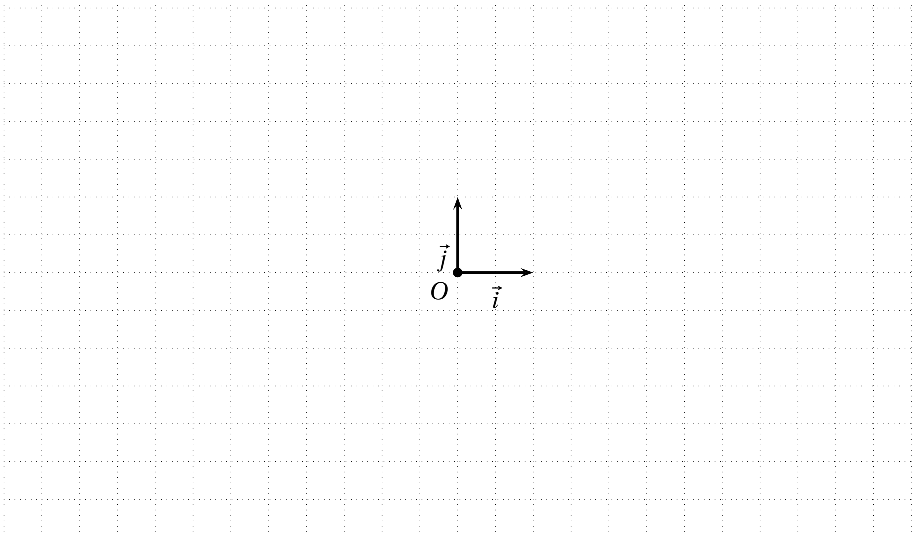
FIGURE 2.2: Figure de l'exercice 2.3



EXERCICE 2.4 (5,5 points).
On donne la figure 2.3 de la présente page où le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé.

1. Placer les points $A(2;-2)$, $B(3;1)$ et $C(-1;-1)$.
2. (a) Quelle semble être la nature du triangle ABC ?
   (b) Prouver, par le calcul, que c'est bien le cas.

FIGURE 2.3: Figure de l'exercice 2.4



Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Activité d'introduction

3.1.1 Le contexte

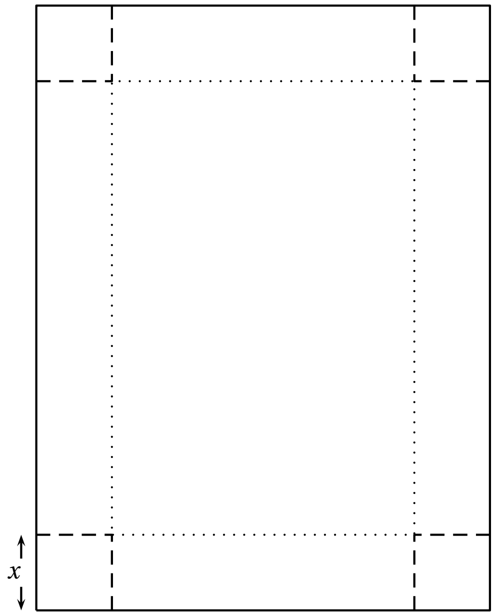
On dispose d'une feuille cartonnée de dimensions $\ell \times L$ avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela, on découpe à chaque coin de la feuille un carré de côté x comme indiqué sur la figure 3.1 page suivante. On obtient le patron de la boîte (qu'on plie suivant les pointillés pour obtenir la boîte).
Le problème est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le volume de la boîte est maximal.

3.1.2 Travail préparatoire

Avec votre voisin prendre une feuille A4 et :
- choisir une valeur pour x ;
- découper un carré de côté x à chacun des coins pour réaliser le patron de la boîte ;
- reconstituer la boîte ;
- calculer le volume de la boîte.

Faire de même avec une autre feuille en choisissant une autre valeur de x.

FIGURE 3.1: Figure du problème



3.1.3 Formules

Pour la suite et pour simplifier les calculs, nous considèrerons que la feuille de départ à comme dimensions 24×32.

1. Entre quelles valeurs peut alors varier x ?
2. Calculer le volume de la boîte pour $x = 2$ cm puis pour $x = 3$ cm puis pour $x = 5$ cm.
3. Déterminer les formules qui donnent, en fonction de x, la longueur et la largeur de la base de la boîte et sa hauteur.
   En déduire la formule qui donne le volume de la boîte en fonction de x.
   Faire contrôler votre formule par le professeur.

3.1.4 Utilisation de la calculatrice

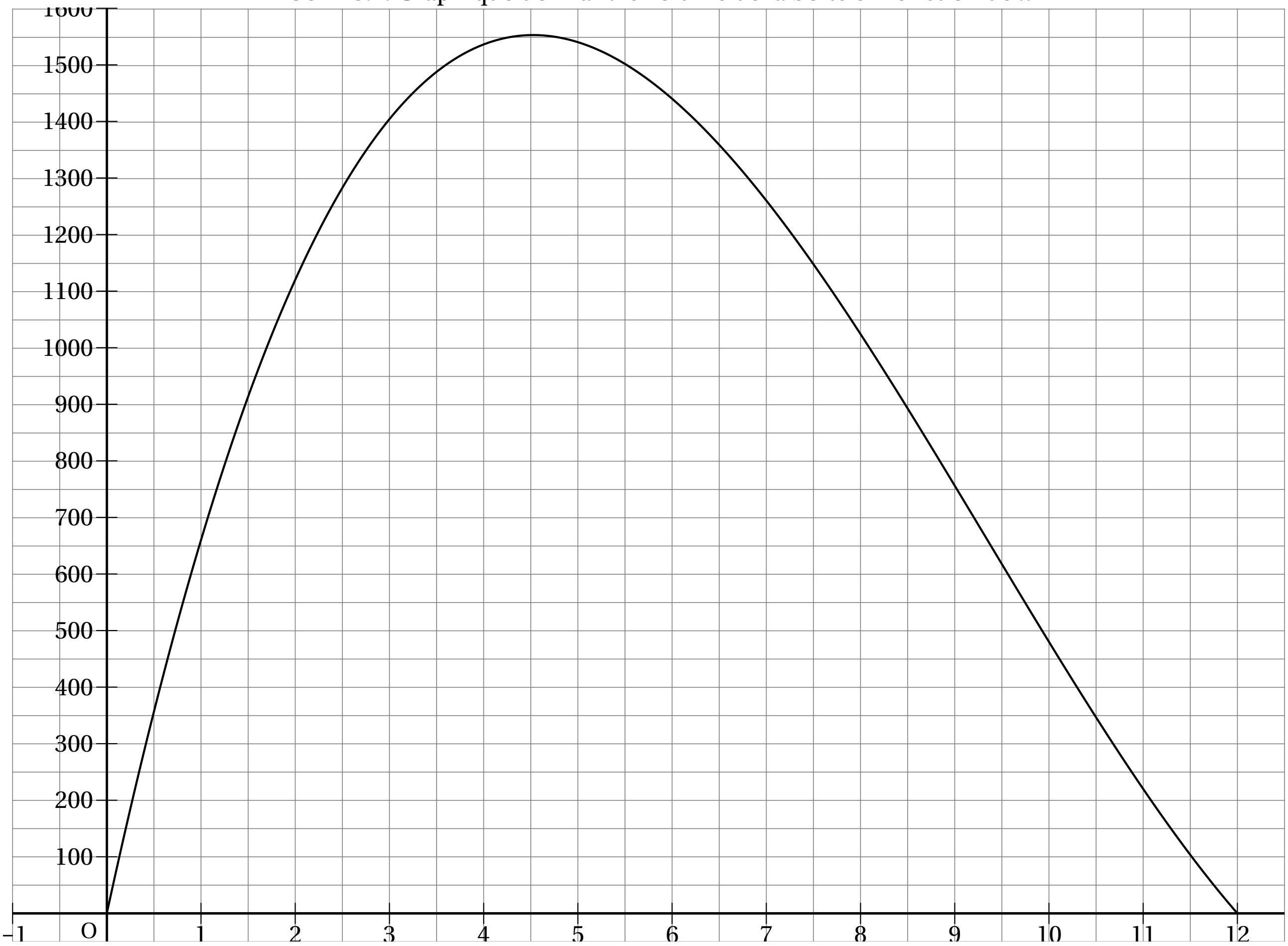
Nous allons obtenir un graphique qui indique en fonction des valeurs de x, en abscisses, les valeurs du volume, en ordonnées, puis nous allons obtenir un tableau de valeurs.

- **Le graphique**
  Sur les Casio il faut d'abord choisir *graphique* (ou *Graph*) puis entrer la formule tandis que sur les TI il faut d'abord entrer la formule ($Y =$ ou $f(x) =$) puis choisir *graphique*.
  Dans tous les cas entrer la formule trouvée au paragraphe 3.1.3 à la question 3 et afficher le graphique. *Régler la fenêtre d'affichage au besoin (*V-Windows *ou* Def-Fenêtre*) afin de voir entièrement la courbe pour les valeurs de x trouvées au paragraphe 3.1.3 à la question 1.*
  Par lecture graphique, parmi les valeurs de x, déterminer celle pour laquelle le volume de la boîte semble être le plus grand.
- **Le tableau de valeurs**
  Sur les Casio il faut d'abord choisir *tableau* (ou *Tabl*) puis entrer la formule tandis que sur les TI il faut d'abord entrer la formule ($Y =$ ou $f(x) =$) puis choisir *tableau*.
  Dans tous les cas, la formule entrée précédemment est gardée en mémoire donc afficher directement le tableau. *Modifier les paramètres du tableau (en choisissant* Range *ou* Def.Tabl*) pour que les valeurs de x varient entre les valeurs trouvées au paragraphe 3.1.3 à la question 1, le pas (ou* Picth*) étant égal à 1.*
  Noter ces résultats sur votre cahier. Contrôler les résultats trouvés au paragraphe 3.1.3 à la question 2.
  Parmi les valeurs de x, déterminer celle pour laquelle le volume de la boîte semble être le plus grand.
  À l'aide de ce tableau, reconstituer sur son cahier le graphique.

3.1.5 Exploitation de la courbe représentative ou du tableau

Vous trouverez sur la figure 3.2 de la présente page le graphique qui donne le volume de la boîte en fonction de x et vous disposez du tableau de valeurs obtenu au paragraphe précédent.

FIGURE 3.2: Graphique donnant le volume de la boîte en fonction de x



On note $V(x)$ ce volume. Ainsi $V(2) = 1120\,\text{cm}^3$ car pour $x = 2\,\text{cm}$, on peut lire graphiquement ou dans le tableau de valeurs que le volume est de $1120\,\text{cm}^3$.
À l'aide du graphique ou du tableau de valeurs, répondre aux questions suivantes.

1. Pour quelle valeurs de x, peut-on déterminer $V(x)$?
   L'ensemble des valeurs possibles pour x est appelé *ensemble de définition* de V.
2. Quel est le volume pour $x = 5$ cm ?
   Compléter $V(5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   On dit que :
   - 5 *a pour image* ………… par la fonction V ;
     ………… *est l'image de* 5 par la fonction V ;
   - ………… *a pour antécédent* 5 par la fonction V ;
     5 *est un antécédent* de ………… par la fonction V.
3. Pour quelles valeurs de x, le volume est-il de 1000 cm^3 ?
   Compléter :
   - 1000 a pour antécédent(s) ………… par la fonction V ;
4. Peut-on déterminer l'image de 13 par la fonction V ? Pourquoi ?
   Peut-on déterminer les antécédents de 1600 par la fonction V ? Pourquoi ?

3.2 Premières notions

3.2.1 Notion de fonction

Définition 3.1. Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe au plus un élément y d'un ensemble d'arrivée.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f(x) = y$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y »..
On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.

Un élément de l'ensemble de départ a *au plus* une image : certains éléments n'ont pas d'image et ceux qui en ont n'en ont qu'une.
Un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir *aucun*, *un* ou *plusieurs* antécédents.
x sera parfois appelé *la variable* et y sera parfois appelé *la grandeur* qui est fonction de x.
Si l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$, la fonction est dite *fonction numérique*, ce qui sera le cas de presque toutes les fonctions que nous étudierons en Seconde.

3.2.2 Ensemble de définition

Définition 3.2. L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction f*. On le note souvent D_f.

En Seconde, la plupart des fonctions numériques définies par une expression algébrique seront définies sur $\mathbb{R}$ sauf dans les cas suivants :
- un quotient n'est défini que lorsque son dénominateur est différent de 0 (on ne divise pas par 0) ;
- on ne peut prendre la racine carrée d'une quantité que si elle est positive.

3.2.3 Tableau de valeurs

On peut associer à une fonction un tableau de valeurs. Il comporte deux lignes : la première regroupe des antécédents et la seconde leurs images respectives par cette fonction.
Un tableau de valeurs peut aussi définir une fonction.

Exemple. Fonction donnant un tableau de valeurs.
À la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ on peut associer, par exemple, le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3	9	17

Exemple. Tableau de valeurs définissant une fonction.
Le tableau suivant donne le nombre de titulaires du R.M.I. tous les deux ans :

Année	1989	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005
Nombre de titulaires du R.M.I.	396 160	567 556	774 803	925 286	1 045 303	1 120 251	1 051 725	1 120 844	1 266 400

On peut définir la fonction f qui à chaque année associe le nombre de titulaires du R.M.I.
Ainsi $f(1989) = 396160$, $f(1991) = 567556$, etc.

3.2.4 Représentation graphique

On peut associer à une fonction une représentation graphique et l'on peut définir une fonction à partir d'une représentation graphique.

Définition 3.3 (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :
- L'abscisse x de M décrit l'ensemble de définition D_f ;
- L'ordonnée y est l'image de x par f. $y = f(x)$.

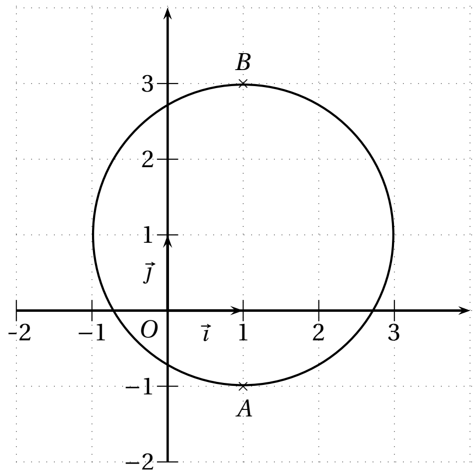
On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction f.

Remarque. L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

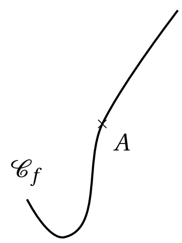
Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on utilise souvent un tableau de valeurs.

Remarque. Une courbe ne représente pas toujours une fonction. Sur le schéma ci-dessous, par exemple, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1,-1)$ et $B(1,3)$. Ce n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction car alors 1 aurait plusieurs images.

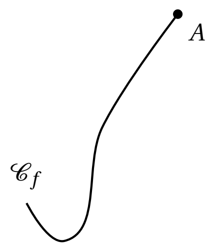


Quelques conventions graphiques

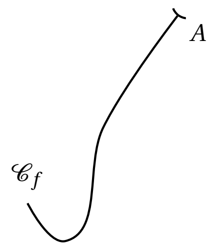
Lorsqu'un point A sur la courbe est connu avec précision, il est noté par une croix.



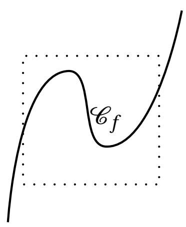
Lorsqu'un point A est l'extrémité de la courbe, il est noté par un gros point.



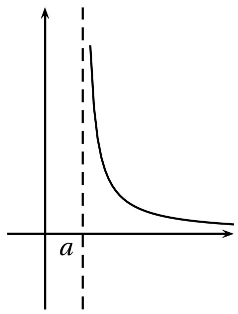
Lorsqu'un point A à l'extrémité de la courbe n'appartient pas à la courbe, il est noté par une « encoche ».



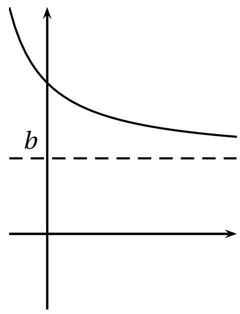
Une courbe est donnée dans une fenêtre ; s'il n'y a pas d'extrémités, la courbe garde la même allure quand on la prolonge.



Une droite verticale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite. Sur l'exemple ci-dessous, a n'appartient pas à D_f.



Une droite horizontale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite.

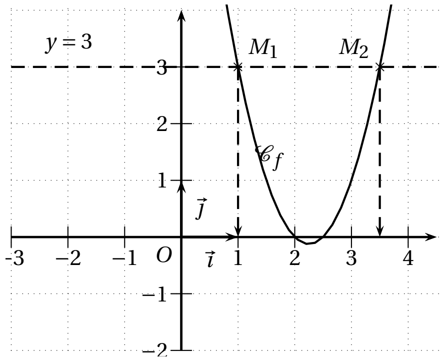


3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$

Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément k de l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction f.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de f et on obtient :



On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3. Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.
On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $x = 1$ ou $x = \frac{7}{2}$ car les points de la courbe de f d'ordonnée 3 ont pour abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ ».

3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

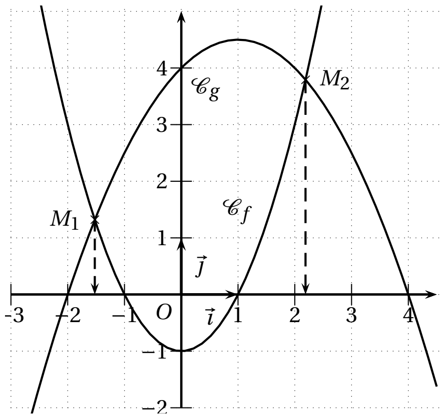
Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{5}{2}\right]$.

Remarque. • On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.
On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.
Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.
Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{5}{2}\right[$.

3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$

Cela revient à chercher les éléments de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g.
Une telle recherche peut se faire graphiquement. On recherche alors les points des deux courbes représentatives ayant même abscisse et même ordonnée, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 + x + 4$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
On commence par tracer soigneusement les deux courbes représentatives et on obtient :



On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1,5$ et $2,2$.
Les solutions sont donc $x \approx -1,5$ et $x \approx 2,2$.

3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1,5$ et 2,2.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5;2,2]$. Ou bien $S = [-1,5;2,2]$.

Remarque. • On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.
On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.
Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1,5] \cup [2,2;+\infty[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5;2,2[$.

3.4 Variations, extremums

3.4.1 Sens de variation

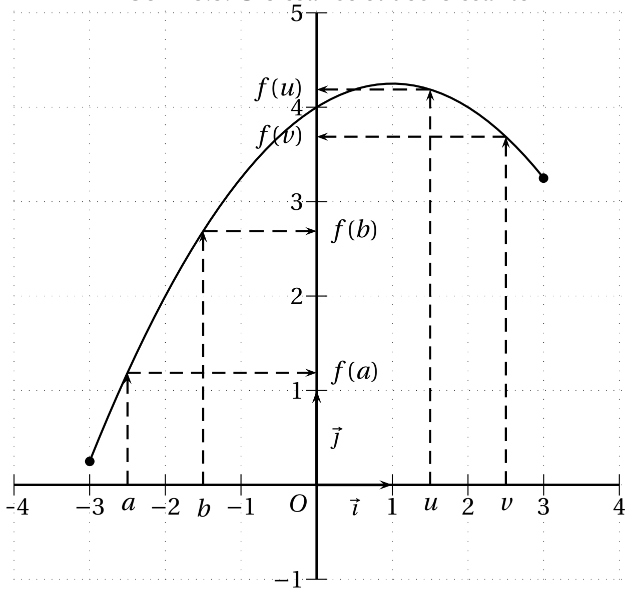
Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

Exemple. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure 3.3 page suivante. On constate que lorsque $x \in [-3;1]$, si x augmente, $f(x)$ augmente aussi alors que lorsque $x \in [1;3]$, si x augmente, $f(x)$ diminue.
C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction f.

Définition 3.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est
- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- *monotone* si elle n'est que croissante sur I ou si elle n'est que décroissante sur I.
- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarque. • Ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** et pas sur une réunion d'intervalles disjoints.
- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- On obtient les définitions d'une fonction *strictement* croissante ou *strictement* décroisante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. Ainsi on dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I on a :
Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I

FIGURE 3.3: Croissance et décroissante



3.4.2 Tableau de variations

Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau de variation, qui est une forme stylisée de courbe représentative où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f.

Exemple. Dans l'exemple précédent on obtient

x	-3		1		3
f			$\approx 4{,}25$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\approx 0{,}25$				$\approx 2{,}25$

Exemple. Le tableau ci-contre indique que la fonction f est croissante lorsque $x \in [-2;-1]$, décroissante lorsque $x \in [-1;1]$ et constante lorsque $x \in [1;2]$.
Il indique aussi que $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $f(x) = -2$ pour tout $x \in [1;2]$.

x	-2		-1		1		2
f			3				
		$\nearrow$		$\searrow$			
	-1				-2	$\longrightarrow$	-2

3.4.3 Extremums

Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément :

Définition 3.5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que
- f admet un *maximum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- f admet un *minimum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Les maximum et minimum sont appelés les *extremums*.

Remarque. Un extremum doit être atteint par une valeur x_0.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'admet pas -1 comme minimum.
En effet, si on a bien $f(x) \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de x_0 tel que $f(x_0) = -1$.
Par contre 1 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ car
- $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **ET**
- $f(0) = 1$

On dira donc : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 et il est atteint pour $x_0 = 0$.

3.5 Exercices et problèmes

3.5.1 Premières notions

EXERCICE 3.1.
Dire dans chacun des exemples ci-dessous quel est l'ensemble de définition, quelles sont les images possibles et si la fonction est numérique.

1. À chaque élève de la classe on associe la couleur de ses cheveux.
2. À chaque élève de la classe on associe le nombre de ses frères et soeurs.
3. Pour un élève donné, à chaque moment de sa vie on associe la taille qu'il mesurait.
4. Soit $ABCD$ un rectangle dont un des côtés est fixe et mesure 6 cm et l'autre est variable et mesure x cm. On définit la fonction f de la façon suivante : à chaque x possible, on associe $f(x)$, l'aire du rectangle $ABCD$.
5. La fonction g définie par $g(x) = x^2 + 2x + 3$.
6. La fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.
7. La fonction i définie par $i(x) = \sqrt{x+2}$.

EXERCICE 3.2.
On définit f et g, deux fonctions :

- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6.
- $g : x \mapsto x^2 - 4$.

1. Donner l'expression correspondant à f puis simplifier cette expression.
2. Quel réel n'a pas d'image par f ?
3. Quelle est l'image de 3 par g ?
4. Quelle est l'image de -1 par g ?
5. Quels sont les antécédents éventuels de 12 par g ?
6. Quels sont les antécédents éventuels de -5 par g ?

EXERCICE 3.3.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*

1. $f(-2) = 0$ signifie que l'image de 0 est -2
2. $f(0) = 3$ signifie que la courbe de f passe par le point $(0;3)$
3. $f(1) = 2$ signifie que l'antécédent de 1 est 2
4. L'image de 2 par f est -3 s'écrit $f(2) = -3$
5. Dire que $(5;1)$ est un point de la courbe de f s'écrit $5 = f(1)$
6. Par la fonction g, -5 est l'image de 3 s'écrit $g(-5) = 3$
7. 2 a pour image 0 par f signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses en 2
8. $f(4) = 0$ signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point $(4;0)$
9. 3 a pour image 5, signifie que 3 est l'image de 5
10. 4 a pour antécédent 5 signifie que 5 est l'image de 4

EXERCICE 3.4 (Variable, grandeur)**.**
Dans chacune des situations de la figure 3.4 page suivante, indiquer quelle est la variable et quelle est la grandeur qui en dépend.

EXERCICE 3.5.
Vrai ou faux ? *Justifier la réponse lorsque c'est faux.*
Les courbes de la figure 3.5 page suivante représentent des fonctions de la variable x.

EXERCICE 3.6.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure 3.6 page 33.

1. La fonction f est définie entre -2 et 6 inclus
2. Les images par la fonction f sont comprises entre -1 et 4 inclus
3. La fonction g est définie entre -2 exclu et 6 inclus
4. Les images par la fonction g sont comprises entre 0 exclu et 3 inclus

EXERCICE 3.7.
Vrai ou faux ? *Corriger la proposition lorsqu'elle est fausse.*

- D'après la représentation graphique de la figure 3.7 page 33 $D_f = [-4;2]$
- D'après la représentation graphique de la figure 3.7 page 33 $D_g =]-\infty;3[\cup]3;5]$

EXERCICE 3.8 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-1,5;2]$ par : $f(x) = 2x^3 - 1,5x^2 - 3x$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f.

EXERCICE 3.9 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Après avoir dressé un tableau de valeurs de la fonction, tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3.10.
Tracer une représentation graphique possible d'une fonction f sachant que :

- $D_f = [-2;2]$;
- $f(1) = 3$;
- 0 admet deux antécédents ;
- $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

FIGURE 3.4: Schémas de l'exercice 3.4

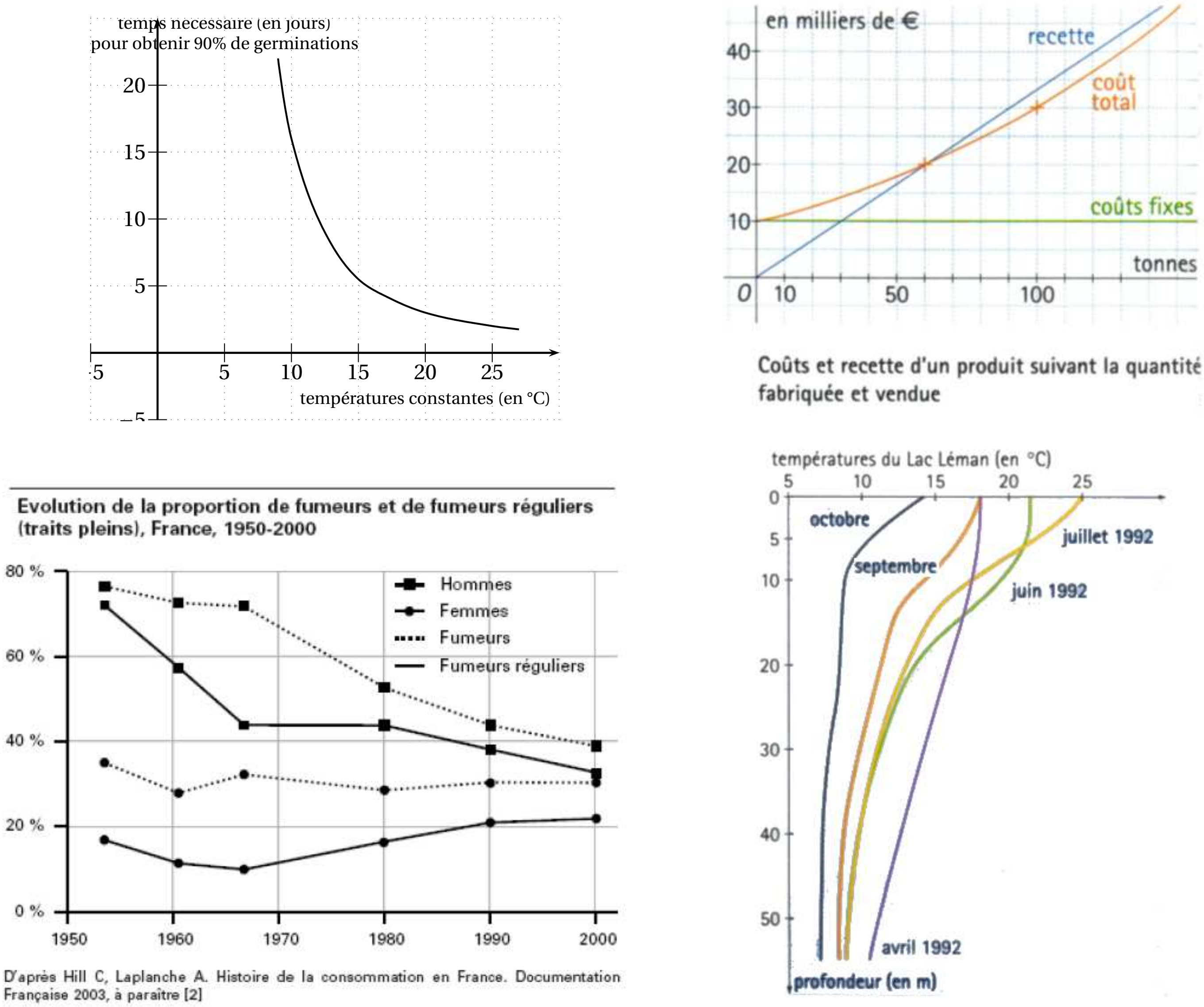


FIGURE 3.5: Courbes de l'exercice 3.5

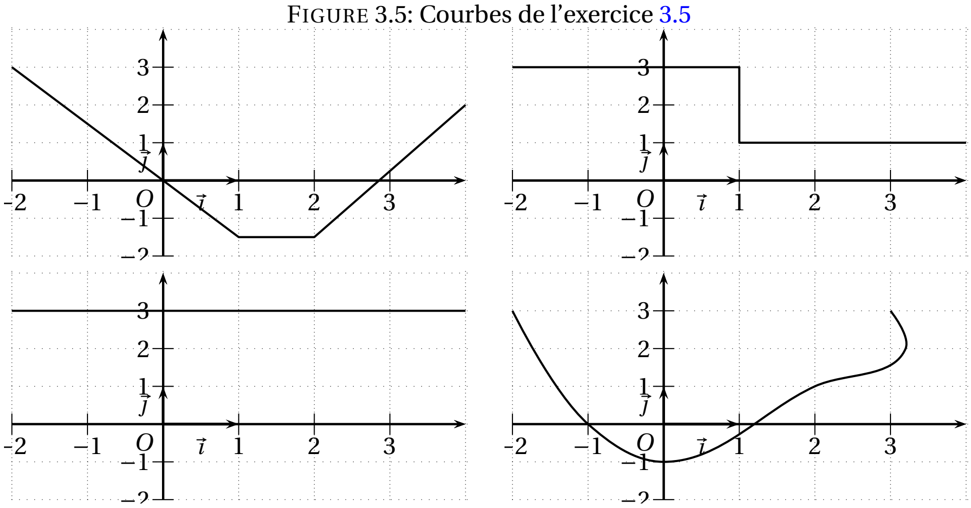


FIGURE 3.6: Courbes de l'exercice 3.6

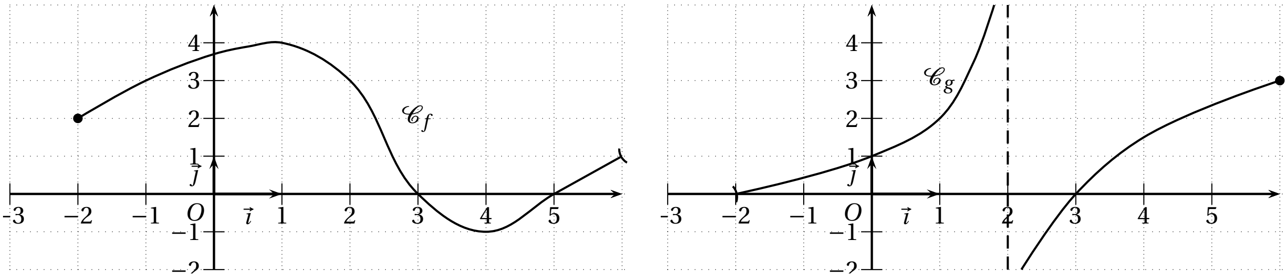
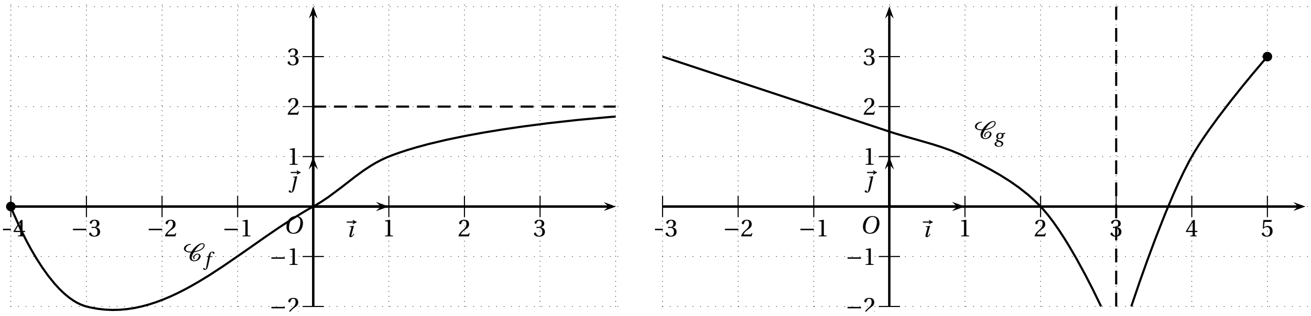


FIGURE 3.7: Courbes de l'exercice 3.7

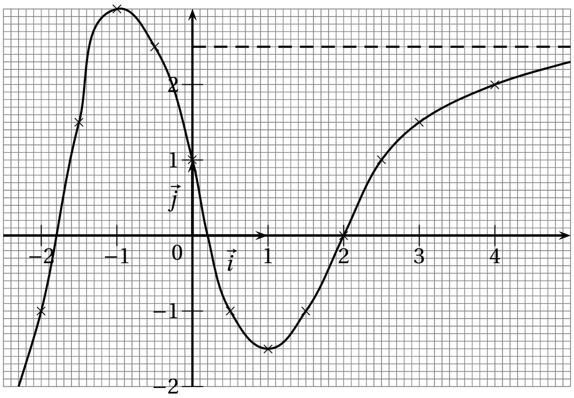


3.5.2 Résolutions graphiques

EXERCICE 3.11.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
$\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f a déjà été obtenue dans l'exercice 3.9.

1. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$, avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :
   (a) Quelle est l'image de 2 ?
   (b) Quelle est l'image de 3 ?
   (c) Quelle est l'image de 4 ?
   (d) Quels sont les antécédents de 1 ?
   (e) Quels sont les antécédents de 2 ?
   (f) Quels sont les antécédents de −2 ?
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -1,5$;
   (c) $f(x) \geqslant -1$;
   (d) $f(x) < 4$;
   (e) $f(x) > -3$;
   (f) $f(x) < -2$.

EXERCICE 3.12.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:

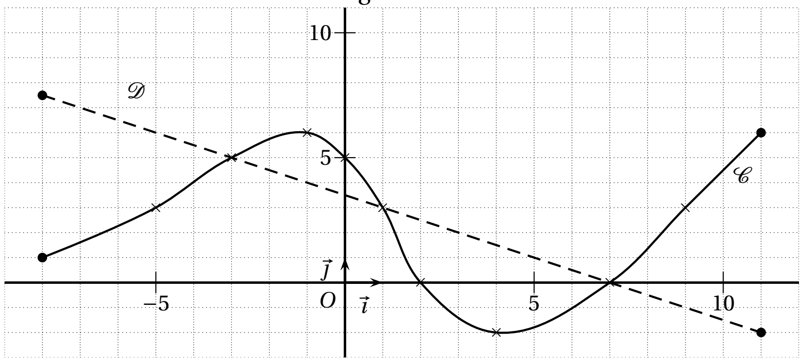


Avec la précision permise par le graphique, résoudre :

1. Les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$;
   (b) $f(x) = 0$;
   (c) $f(x) = -1$;
   (d) $f(x) = 2$.
2. Les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 1$;
   (b) $f(x) \geqslant 0$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) > 2$.

EXERCICE 3.13.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.8 de la présente page représente une fonction f et le segment de droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.

FIGURE 3.8: Figure de l'exercice 3.13



1. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -2$;
   (c) $f(x) = 0$;
   (d) $f(x) = 6$.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant 3$;
   (c) $f(x) > 5$.
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
4. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 3.14 (Avec la calculatrice)**.**
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$.

1. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 3.15 (Avec la calculatrice)**.**
Les fonctions f et g sont définies sur $[-2;2]$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 1 - x$.

1. Tracer sur une calculatrice graphique les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

3.5.3 Variations, extremums

EXERCICE 3.16.
On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ sur la figure 3.9 page suivante (en deux parties).
Indiquer son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.

EXERCICE 3.17.
Soit la fonction f représentée sur la figure 3.10 page ci-contre ; sa courbe représentative est en trois parties.
Dresser le tableau de variations de f.

EXERCICE 3.18 (Avec une calculatrice)**.**
On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$.
À l'aide d'une calculatrice graphique :

1. conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. conjecturer quels sont les extremums de f sur son ensemble de définition ;
3. dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 3.19.
Tracer une courbe représentative d'une fonction f sachant que :

- le tableau des variations de f est le suivant :

x		0		3	
f	1 ↗		↘		↗

- 1 a pour antécédents, par la fonction f, -2 et $1{,}5$;
- $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 2$ ou $x = 4$;
- $f(-1) = 2$;
- -1 est l'image de 3 ;
- $D_f = [-2;4]$;
- le maximum de f est 3 ;

FIGURE 3.9: Figure de l'exercice 3.16

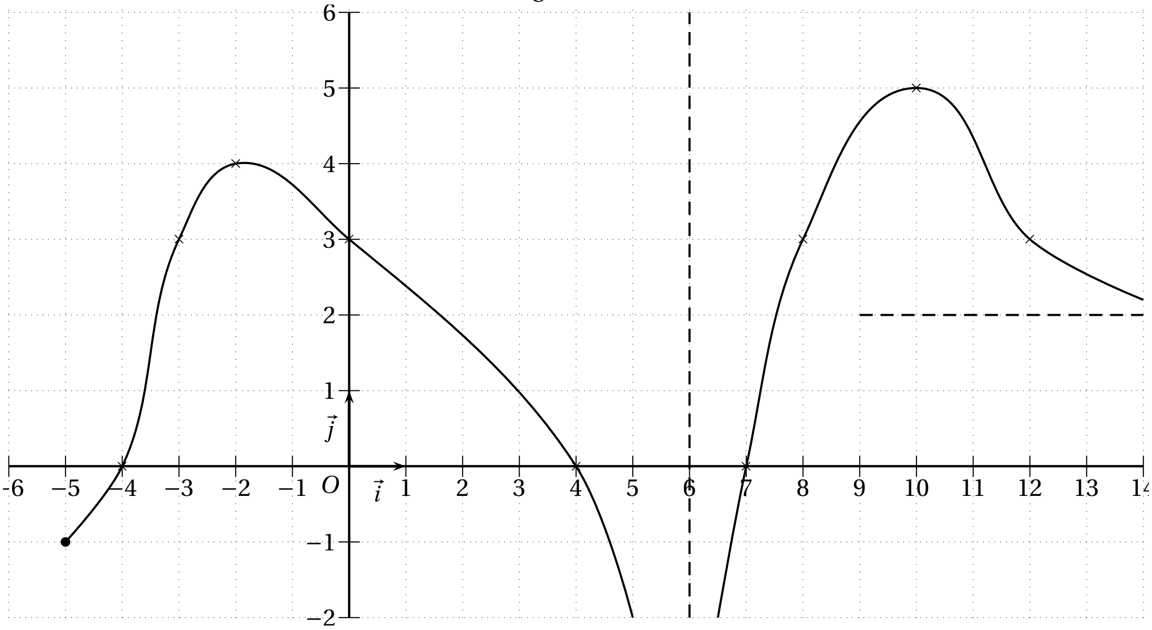
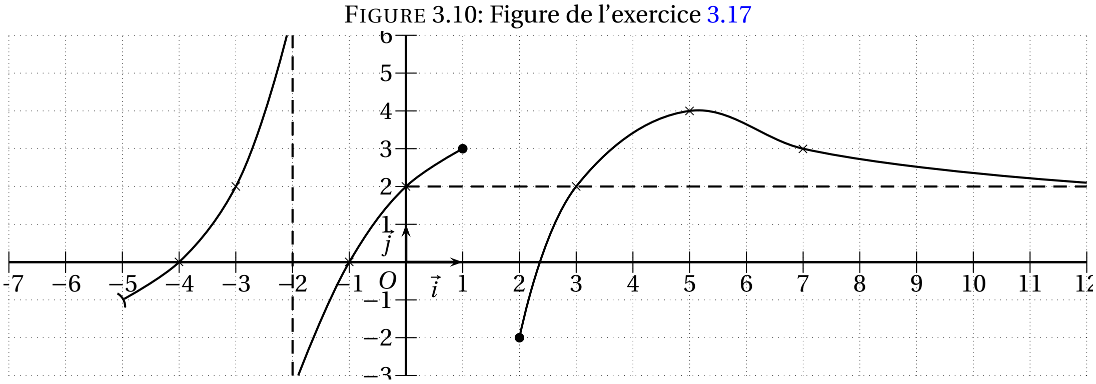


FIGURE 3.10: Figure de l'exercice 3.17



EXERCICE 3.20.
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-3		0		1		8
f	3	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-2

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.
   - $f(-1) \ldots\ldots f(-2)$
   - $f(-3) \ldots\ldots f(1)$
   - $f(-1) \ldots\ldots 1$
   - $f(-2) \ldots\ldots f(0,5)$
   - $f(-2) \ldots\ldots f(1,5)$
   - $f(4) \ldots\ldots f(2)$
   - $4 \ldots\ldots f(-4)$

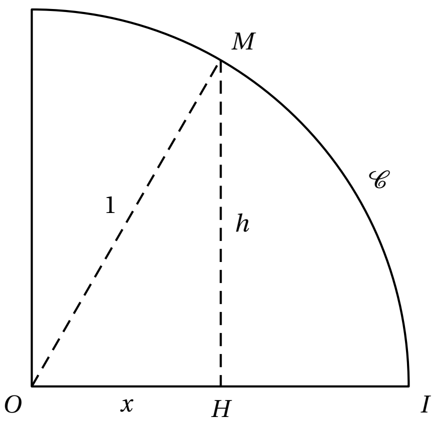
2. Résoudre, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 0$;
   (b) $f(x) = 1$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) < 0$.

3. Dire, si c'est possible, quel est le maximum de la fonction et quel est son minimum.

Devoir maison n°1

Un problème – Une fonction

On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de rayon $OI = 1$.
M est un point quelconque de ce quart de cercle. H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.
Le problème consiste à déterminer où placer M pour avoir l'aire du triangle OHM maximale.
On note x la longueur OH et h la longueur HM.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Exprimer la longueur h en fonction de x.
3. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.
   Démontrer que :
   $$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
4. Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
$f(x)$												

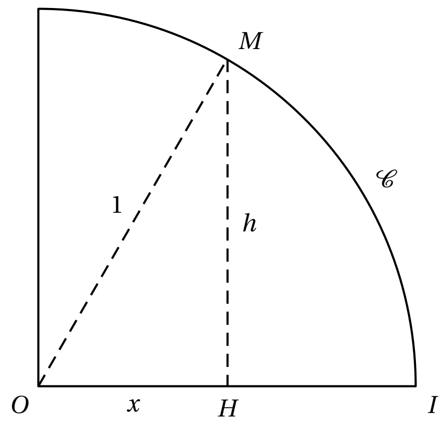
On arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère (unités graphiques : en abscisse 10 cm pour une unité ; en ordonnée 20 cm pour une unité).
6. Déterminer graphiquement le maximum de f. Interpréter cette valeur.

Devoir maison n°1

Un problème – Une fonction

On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de rayon $OI = 1$.
M est un point quelconque de ce quart de cercle. H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.
Le problème consiste à déterminer où placer M pour avoir l'aire du triangle OHM maximale.
On note x la longueur OH et h la longueur HM.



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Exprimer la longueur h en fonction de x.
3. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.
   Démontrer que :
   $$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
4. Recopier puis compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
$f(x)$												

On arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près.

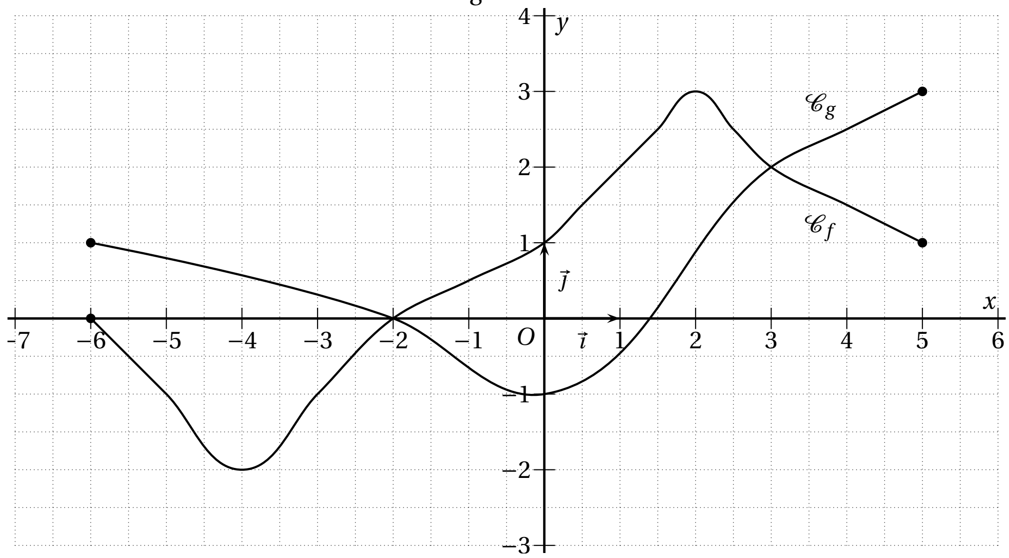
5. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère (unités graphiques : en abscisse 10 cm pour une unité ; en ordonnée 20 cm pour une unité).
6. Déterminer graphiquement le maximum de f. Interpréter cette valeur.

Devoir surveillé n°3

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 3.1 (11 points).
On donne sur la figure 3.1 de la présente page les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

FIGURE 3.1: Figure de l'exercice 3.1



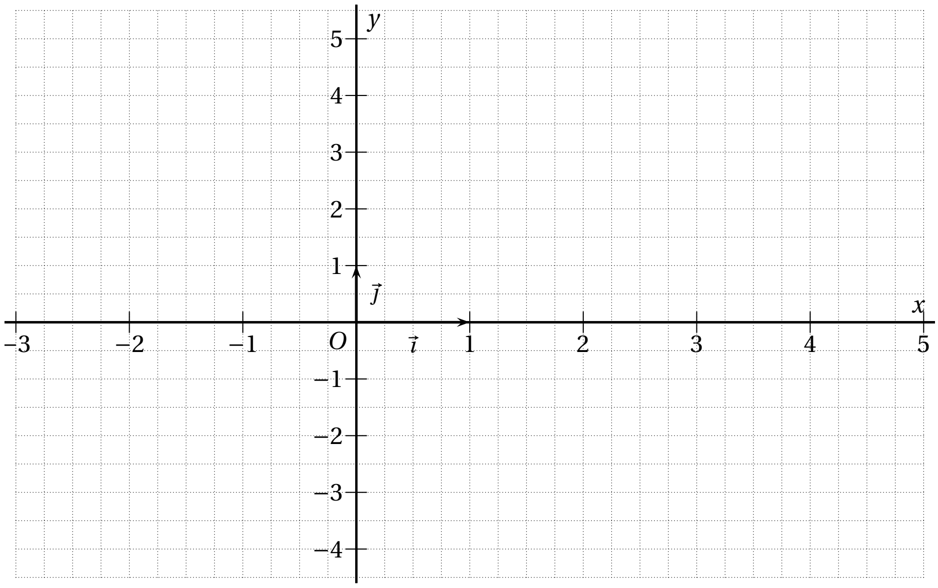
1. Compléter :
   (a) $f(2) =$ .... (b) $f(-3) =$ ....
   (c) L'ensemble de définition de f est ....
2. Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et, **si elle est fausse** *la corriger* pour qu'elle soit vraie, **si elle est vraie** *la formuler* d'une autre manière.
   (a) L'image de 1 par la fonction f est 5 ❒Vrai ❒Faux
   ....
   (b) Les antécédents de 0 par la fonction f sont -2 et -6 ❒Vrai ❒Faux
   ....
   (c) -2 a pour image 0 par la fonction f ❒Vrai ❒Faux
   ....
   (d) -3 a pour antécédent -1 par la fonction f ❒Vrai ❒Faux
   ....
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = 2$ .... (d) $f(x) \geqslant -1$ ....
   (b) $f(x) < 1$ .... (e) $f(x) = g(x)$ ....
   (c) $f(x) < 2$ .... (f) $f(x) > g(x)$ ....
4. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
5. Donner les variations de f.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

EXERCICE 3.2 (2 points)**.**
La fonction f est définie sur $[-2\,;4]$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5						

2. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.



EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
On donne le tableau de variations de fonction f définie sur $[-5\,;8]$:

x	-5		-3		1		4		8
f	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-3

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.
   (a) $f(0)$ .... $f(-1)$
   (b) $f(2)$ .... $f(3)$
   (c) $f(-4)$ 5
   (d) $f(-2)$ .... $f(3)$
   (e) $f(-1)$ .... $f(5)$
   (f) $f(7)$ .... -1
2. Donner les extremums de $f(x)$:
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

EXERCICE 3.4 (2 points)**.**
L'algorithme suivant est conçu pour indiquer si un triangle dont les sommets ont pour coordonnées $(x_A\,; y_A)$, $(x_B\,; y_B)$ et $(x_C\,; y_C)$ est isocèle mais il est incomplet. Le compléter.

Entrées x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C : Nombres
Instructions
AB prend la valeur $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
AC prend la valeur $\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
BC prend la valeur $\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$
Si ....
Alors ....
Sinon ....

Chapitre 4

Statistiques discrètes

Sommaire

4.1 Vocabulaire

Définition 4.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres et *qualitative* sinon ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.

Exemples.

- On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, … (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.
- On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.
- On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 4.2. On a aussi :

- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

4.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

4.2.1 Mode

Définition 4.3 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques. • S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

4.2.2 Moyenne arithmétique

Définition 4.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le nombre, noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Remarques. • De la définition, on peut déduire que $n\overline{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, ce qui peut s'interpréter de la manière suivante : « La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$ ».
- Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{\underbrace{n_1+n_2+\dots+n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

4.2.3 Médiane

Définition 4.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques. • Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété 4.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$.*
- *Si n est impair, la $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ donnée de la série est la médiane.*
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série et le suivant est **une** médiane ; dans la pratique on prend la moyenne des deux données centrales de la série :*

$$m = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}}{2}$$

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

4.3 Mesures de dispersion

Elles visent à indiquer comment les données de la série statistique sont dispersées par rapport aux mesures centrales.

4.3.1 Valeurs extrêmes

Définition 4.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs *minimale* et *maximale* et l'*étendue* est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

4.3.2 Quartiles

Définition 4.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.
On convient de prendre systématiquement comme premier et troisième quartiles les nombres suivants :

Propriété 4.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_n$. Alors :*
- *La donnée de rang $\frac{1}{4}n$ (arrondi au supérieur si ce n'est pas un entier) convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang $\frac{3}{4}n$ (arrondi au supérieur si ce n'est pas un entier) convient toujours comme troisième quartile.*

On l'admettra.

Exemple 4.1. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $\frac{1}{4} \times 29 = 7,25 \approx 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $\frac{3}{4} \times 29 = 21,75 \approx 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile.

S'il y a $n = 64$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ donc la seizième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ donc la quarante huitième donnée de la série convient comme troisième quartile.

Propriété 4.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ avec $n \geqslant 5$. On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 par n'importe quel nombre de l'intervalle $]-\infty ; x_1]$ et x_n par n'importe quel nombre de l'intervalle $[x_n ; +\infty[$.*

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ♢

4.4 Représentations graphiques

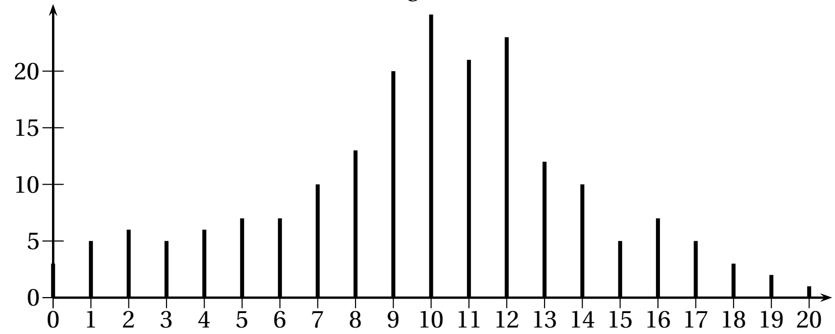
4.4.1 Diagramme à bâtons

On considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

On obtient le diagramme à bâtons (figure 4.1).

FIGURE 4.1: Diagramme en bâtons



4.4.2 Diagrammes basés sur la fréquence

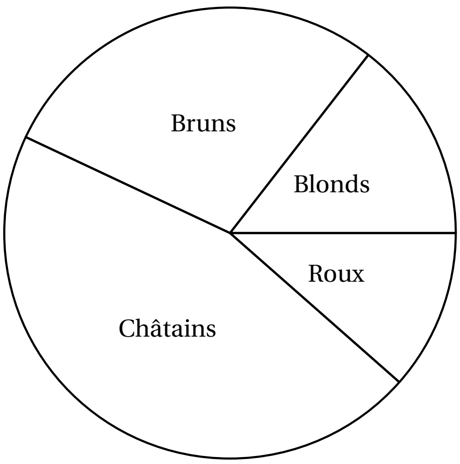
Les séries statistiques peuvent aussi être représentées en diagrammes circulaires, semi-circulaires, rectangulaires, etc. L'aire de chaque modalité devra être proportionnelle à l'effectif de cette modalité. Les fréquences permettent d'obtenir assez facilement la part du diagramme qui devra être consacrée à chaque modalité.
Ainsi si on considère la série suivante :

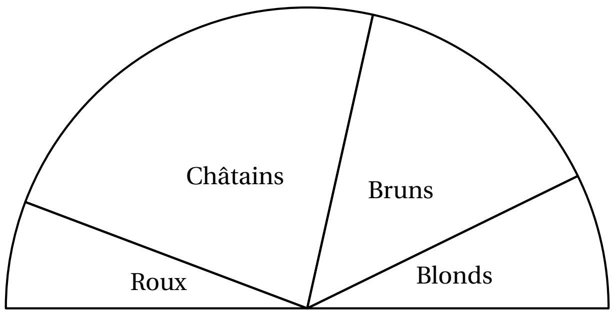
x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux
n_i	25	57	91	23

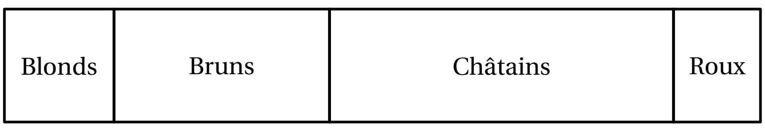
On a alors :

x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux	Total
n_i	29	57	91	23	200
Fréquence f_i	$\frac{29}{200} = 0,145$	0,285	0,455	0,115	1
Part d'un diagramme circulaire	$0,145 \times 360 = 52,2^\circ$	102,6 $^\circ$	163,8 $^\circ$	41,4 $^\circ$	360 $^\circ$
Part d'un diagramme semi-circulaire	$0,145 \times 180 = 26,1^\circ$	51,3 $^\circ$	81,9 $^\circ$	20,7 $^\circ$	180 $^\circ$
Part d'un rectangle de 10 cm	$0,145 \times 10 = 1,45$ cm	2,85 cm	4,55 cm	1,15 cm	10 cm
Fréquence en pourcentage	$0,145 \times 100 = 14,5$ %	28,5 %	45,5 %	11,5 %	100 %

On obtient les diagrammes des figures ci-dessous.



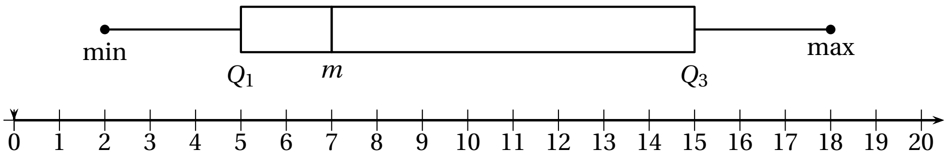




4.4.3 Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un *diagramme en boite*, appelé aussi *boite à moustaches*, conçu de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques. • La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).
- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point.

4.5 Exercices

EXERCICE 4.1.
Dans chaque cas, calculer la moyenne, le mode et la médiane de la série, et conseiller le narrateur sur la meilleure stratégie pour minimiser son résultat :

1. « Je n'ai eu que 8 sur 20 au contrôle de statistiques. Nous sommes 10 en classe. La meilleure note est 19. Ensuite il y a un 10, quatre 9, un 8 (moi) et trois 2. »
2. « Encore un 8 ! Cette fois les notes sont 2, 3, 4, 5, 7, 8 (moi), 9, 9, 18, 19. »
3. « Toujours un 8 ! Cette fois il y a eu trois 7 et un 19, 18, 12, 11, 10, 8(moi) et 2. »

EXERCICE 4.2.
On donne la série suivante : 11, 12, 13, 4, 17, 5, 13, 13, 5, 6, 6, 10, 10, 8, 9, 9, 11, 11, 14, 5, 14, 9, 9, 15, 7, 8, 15, .

1. Déterminer la moyenne de la série.
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série.
3. Représenter le diagramme en boîte correspondant.
4. Quel est l'écart interquartile de la série ?
5. Quel est l'intervalle interquartile de la série ?

EXERCICE 4.3.
Dans une classe, les notes sont les suivantes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

1. Déterminer la moyenne de la série.
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série.
3. Représenter le diagramme en boîte correspondant.
4. Que remarque-t-on sur ce diagramme ? Pouvait-on s'y attendre ?

EXERCICE 4.4.
Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 10 ; 14 ; 16 ; 16 ; 18 ; 18
S_2	2 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 18
S_3	2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 18

1. Déterminer les mesures centrales et les mesures de dispersion les plus adaptées pour décrire les différences entre ces trois séries.
2. Construire les diagrammes qui vous semblent les plus adaptés.
3. Commenter.

EXERCICE 4.5.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. Interpréter les résultats obtenus.

EXERCICE 4.6.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et la médiane de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme semi-circulaire.

EXERCICE 4.7.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

EXERCICE 4.8.
Dans deux entreprises A et B, les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres.
Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel net, en euros. On suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, la répartition est régulière.

1. (a) Calculer la moyenne des salaires de tous les employés de l'entreprise A
   (b) Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de l'entreprise A
   (c) Calculer la moyenne des salaires des cadres de l'entreprise A
2. Faire les mêmes calculs pour l'entreprise B
3. Le P.D.G. de l'entreprise A dit à celui de l'entreprise B : « Mes employés sont mieux payés que les vôtres. » « Faux »répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »
   Expliquer ce paradoxe.

Entreprise A

Salaires	1 500	2 500	3 500
Ouvriers	114	66	0
Cadres	0	8	12

Entreprise B

Salaires	1 500	2 500	3 500
Ouvriers	84	42	0
Cadres	0	12	12

EXERCICE 4.9.
Le recensement de 1 999 a permis d'observer l'existence en France de dix communes de plus de 200 000 habitants. Le tableau ci-dessous donne la liste de ces communes et de leurs populations en milliers d'habitants.

1. Quelle est l'étendue de cette série statistique ? Que devient l'étendue quand on retire Paris de la liste ?
2. Comparer moyenne et médiane des populations de ces dix villes. Que constate-ton ? Comment expliquer ceci ?
3. Faire de même si on retire Paris de la liste. Que constatez-vous maintenant ?
4. Que choisiriez-vous entre « moyenne étendue »et « médiane étendue »pour résumer cette série statistique ? Expliquez votre choix.

Paris	2 116
Marseille	798
Lyon	445
Toulouse	391
Nice	341
Nantes	269
Strasbourg	264
Montpellier	225
Bordeaux	215
Rennes	206

EXERCICE 4.10.
Les tableaux dont il est question dans cette activité sont ceux de la page page ci-contre.

1. Le tableau 1 présente la répartition des salaires mensuels dans une entreprise (*source : DoC TICE-MEN*).
   Calculer la moyenne des salaires de cette entreprise et déterminer la médiane.
2. Une erreur a été commise dans les relevés : les effectifs correspondant aux salaires de 1 100 € et 1 400 € ont été permutés. Les données exactes sont celles du tableau 2.
   Comparer les moyenne et médiane de cette série à celles de la précédente. Les variations étaient-elles prévisibles ?
3. Rêvons ... 35 personnes ont un salaire de 3 400 € et l'effectif total est inchangé. Utiliser le tableau 3 pour imaginer une répartition des effectifs telle que la médiane ne soit pas modifiée : comment va varier la moyenne ?
   Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la plus élevée (calculer alors cette moyenne) ? Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la moins élevée (calculer alors cette moyenne) ?
   Mathias prétend qu'avec 35 personnes ayant un salaire de 3 400 €, la moyenne est obligatoirement plus élevée. A-t-il raison ?

TABLE 4.1: Données de l'exercice 4.10

Tableau 1

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1100	18	18
1200	15	33
1300	20	53
1400	10	63
1500	25	88
1600	12	100
1700	4	104
1800	5	109
1900	3	112
2000	2	114
2100	6	120
2200	7	127
2300	0	127
2400	2	129
2500	0	129
2600	3	132
2700	0	132
2800	3	135
2900	0	135
3000	0	135
3100	3	138
3200	0	138
3300	5	143
3400	8	151

Tableau 2

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1100	**10**	
1200	15	
1300	20	
1400	**18**	
1500	25	
1600	12	
1700	4	
1800	5	
1900	3	
2000	2	
2100	6	
2200	7	
2300	0	
2400	2	
2500	0	
2600	3	
2700	0	
2800	3	
2900	0	
3000	0	
3100	3	
3200	0	
3300	5	
3400	8	

Tableau 3

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1100		
1200		
1300		
1400		
1500		
1600		
1700		
1800		
1900		
2000		
2100		
2200		
2300		
2400		
2500		
2600		
2700		
2800		
2900		
3000		
3100		
3200		
3300		
3400	**35**	**151**

EXERCICE 4.11.
Des salariés d'une entreprise se sont réunis dans un restaurant où ils sont les seuls clients pour fêter le changement de leur grille de salaire : désormais ils touchent tous 1 700 € par mois.

1. Quelle est la moyenne et la médiane de la série constituée par leurs salaires.
2. Bill Gates entre dans le restaurant : que devient la moyenne et la médiane de la série constituée par leurs salaires et celui de Bill Gates.

EXERCICE 4.12.
D'après Wikipédia, le salaire médian des salariés de 25 à 55 ans en France en 2008 était de 1 655 € nets et le salaire moyen de 2 069 € nets.
Conjecturer ce qui peut expliquer cette différence.

EXERCICE 4.13.
Trois séries statistiques, comportant 10 données chacune, ont les paramètres suivants :

- Série A : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 28 ; médiane 20.
- Série B : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 30 ; médiane 30.
- Série C : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 21,5 ; médiane 25.

Conjecturer pour chacune de ces séries comment peuvent être réparties les données.

EXERCICE 4.14.
Voici trois séries de notes obtenues en mathématiques dans des classes de seconde (à effectifs très réduits) lors d'un contrôle sur les statistiques :

1. Déterminer la note médiane de chaque classe.
2. **SANS LA CALCULER**, conjecturer pour chaque série si la moyenne sera supérieure, inférieure ou proche de la médiane.

Classe 1	Classe 2	Classe 3
2	2	8
5	3	8
6	4	9
7	4	9
9	4	10
10	9	10
10	10	10
12	12	12
13	12	13
14	12	15
15	12	15
15	12	16
16	13	17
19	13	18

EXERCICE 4.15.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Calculer $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ les moyennes respectives de Maths et d'Histoire-Géographie.
2. Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths.
3. Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Histoire-Géographie.
4. Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Histoire-Géographie.
5. Interpréter les résultats obtenus.

Devoir maison n°2

Algorithmique

À rendre pour le jeudi 6 décembre

Écrire, avec le logiciel Algobox, un algorithme prenant comme arguments (entrées) les coordonnées de trois points et renvoyant (sortie) la nature du triangle dont les sommets sont ces trois points.

On pourra tester l'algorithme avec les point suivants :

- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;4)$
- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;2)$
- $A(0;0)$, $B(-2;1)$, $C(3;1)$
- $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;0)$
- $A(0;0)$, $B(1;-6)$, $C(2;0)$
- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(2;5)$
- $A(1;5)$, $B(0;0)$, $C(2;0)$
- $A(5;0)$, $B(0;0)$, $C(0;2)$
- $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C(0;0)$
- $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(1;\sqrt{3})$
- $A(0;5)$, $B(0;0)$, $C(5;0)$

On enverra le fichier à david.robert@ac-rennes.fr.

Devoir maison n°2

Algorithmique

À rendre pour le jeudi 6 décembre

Écrire, avec le logiciel Algobox, un algorithme prenant comme arguments (entrées) les coordonnées de trois points et renvoyant (sortie) la nature du triangle dont les sommets sont ces trois points.

On pourra tester l'algorithme avec les point suivants :

- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;4)$
- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;2)$
- $A(0;0)$, $B(-2;1)$, $C(3;1)$
- $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;0)$
- $A(0;0)$, $B(1;-6)$, $C(2;0)$
- $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(2;5)$
- $A(1;5)$, $B(0;0)$, $C(2;0)$
- $A(5;0)$, $B(0;0)$, $C(0;2)$
- $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C(0;0)$
- $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(1;\sqrt{3})$
- $A(0;5)$, $B(0;0)$, $C(5;0)$

On enverra le fichier à david.robert@ac-rennes.fr.

Chapitre 5

Calculs dans l'espace

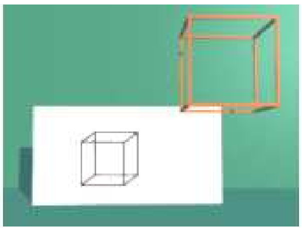
Sommaire

5.1 Perspective cavalière

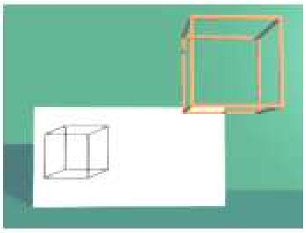
5.1.1 Principe

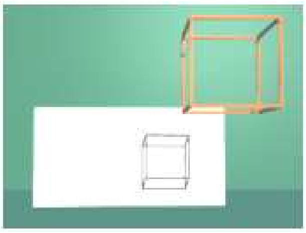
Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions.
La représentation que nous utiliserons s'appelle la *perspective cavalière.*
Ses principes sont les suivants :

- Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales. [1]
Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube. [2]



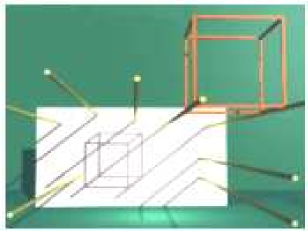
- On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.





1. Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
2. Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.

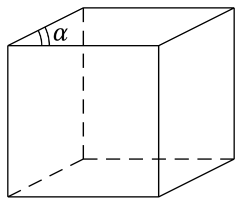
- On appelle *fuyante* une droite perpendiculaire à l'écran.
  Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



5.1.2 Construction et propriétés

Construction

- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.



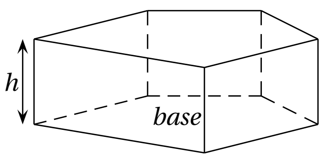
Propriétés

- Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.
  Attention : Deux droites parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- De la même manière, des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes, **mais** deux droites sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin. Par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

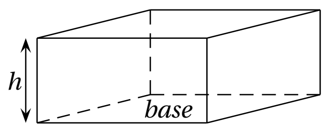
5.2 Solides usuels et volumes

5.2.1 Famille des prismes droits

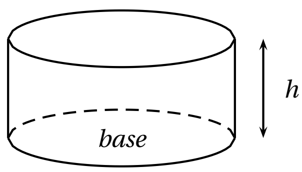
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.



Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.



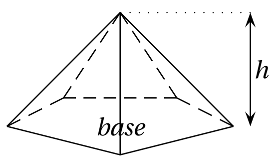
Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.



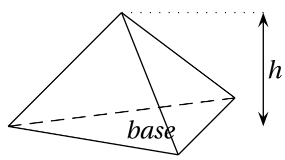
Propriété 5.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume = Aire de la base × hauteur*

5.2.2 Famille des pyramides

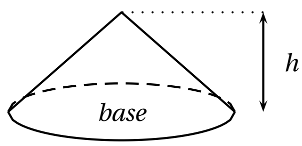
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.



Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.



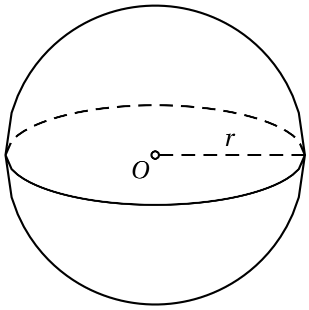
Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.



Propriété 5.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume* $= \frac{1}{3}$ *Aire de la base* $\times$ *hauteur*

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

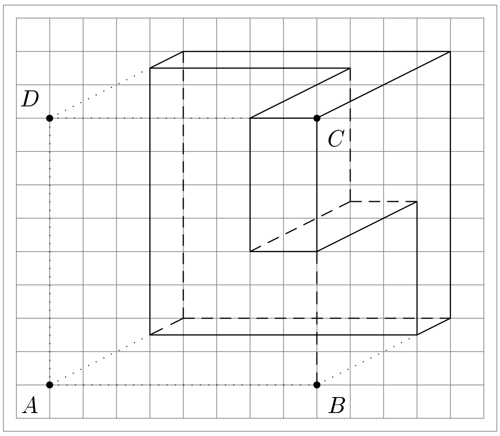
5.2.3 Sphère

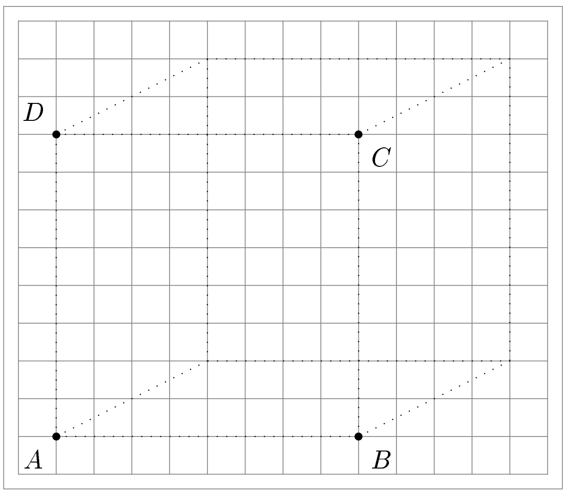


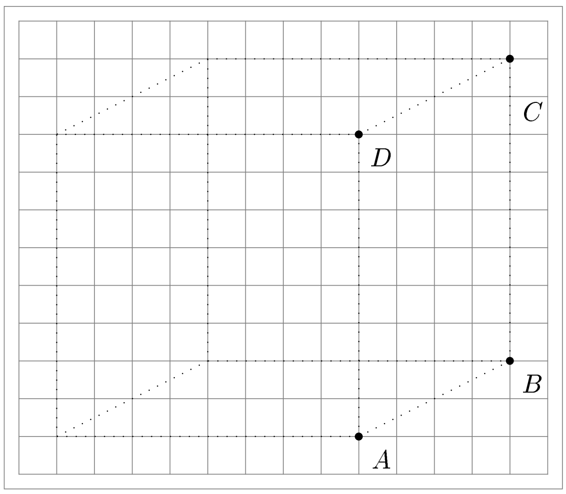
Propriété 5.3. *Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule : Volume* $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule : Aire $= 4\pi r^2$.

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube. Construire, en perspective cavalière : la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant ; la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.







EXERCICE 5.2.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.
On donne $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

EXERCICE 5.3.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

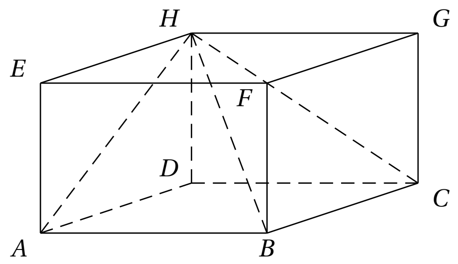
1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
   Le représenter en vraie grandeur à la règle et au compas en prenant $a = 6$ cm.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube.

EXERCICE 5.4.
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté a. On nomme P le centre de la face $EFGH$ et Q le centre de la face $BCGF$. M désigne le milieu de $[PQ]$. On admettra que (EG) est perpendiculaire à (EA) et que (BG) est perpendiculaire à (AB).

1. Montrer que $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ puis que $AP = AQ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
2. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PAQ}$.
3. Donner, en fonction de a, la valeur exacte de l'aire du triangle APQ.

EXERCICE 5.5.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 10$, $AE = 6$ et $BC = 8$.

1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.



EXERCICE 5.6.
$ABCDEFGH$ est un cube. $AB = 5$ cm. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1. Calculer AH, HB et AI.
2. Représenter en vraie grandeur le triangle AIC.
3. Démontrer que la mesure en degrés de $\widehat{AIC}$ est 120°.

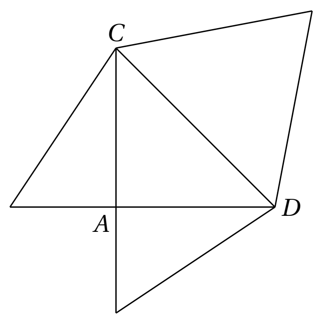
EXERCICE 5.7.
$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête a. Calculer en fonction de a :

1. la hauteur SH (on admettra que H est l'intersection des hauteurs de ABC ;
2. l'aire du triangle ABC et l'aire totale du tétraèdre ;
3. le volume du tétraèdre.

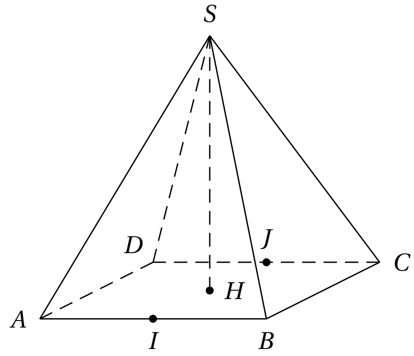
EXERCICE 5.8.
La figure ci-contre est un patron d'un solide $ABCD$. Le triangle ADC est rectangle en A et a pour dimensions :

- $AD = 3,5$ cm ;
- $AC = 4$ cm ;
- $AB = 3$ cm.

1. De quel type de solide s'agit-il ?
2. Le dessiner en perspective cavalière, en mettant la face ABC en vraie grandeur.



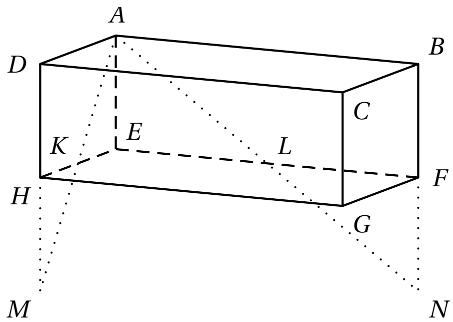
EXERCICE 5.9.
Soit $SABCD$ une pyramide régulière dont la base est le carré de côté $2a$ et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angles au sommet de mesure 30°. On désigne respectivement par I, J et H les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et le centre du carré $ABCD$.



1. Déterminer, en fonction de a, la hauteur SH de cette pyramide.
2. Réaliser un patron de cette pyramide en prenant $a = 5\,\text{cm}$.

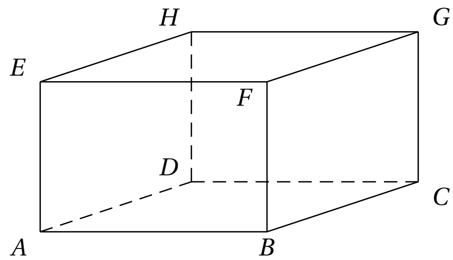
EXERCICE 5.10.
La grande pyramide de Kheops est à sa base un carré presque parfait de 5,3 hectares correctement orienté par rapport au Nord et dont les côtés Nord et Sud sont parallèles à 2,5 cm près. Sa hauteur, à l'origine, était de 146 mètres. En utilisant la hauteur et les renseignements fournis par le texte ci-dessus, desiner un patron de cette pyramide à l'échelle $1/2600^e$.
Calculer l'aire d'une des faces de la pyramide.
Comparer le résultat obtenu avec l'aire d'un carré de côté la hauteur de la pyramide.

EXERCICE 5.11.
K et L sont les milieux des arêtes $[EH]$ et $[EF]$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les droites (AK) et (DH) se coupent en M. Les droites (AL) et (BF) se coupent en N.



1. Démontrer que K est le milieu de $[AM]$.
2. Démontrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.

EXERCICE 5.12.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 5$, $AE = 2$ et $BC = 3$.
Une fourmi se situe en E et se rend en C en cheminant sur les faces.
Déterminer le trajet le plus court.
Indication : on pourra s'aider du patron.



Devoir maison n°3

Calculs dans l'espace

À rendre pour le vendredi 21 décembre

Une feuille de papier de dimensions 21 cm × 29,7 cm peut être le patron de deux cylindres :

- l'un dont la hauteur est de 21 cm, la longueur de 29,7 cm servant à reconstituer la base circulaire ;
- l'autre dont la hauteur est de 29,7 cm, la largeur de 21 cm servant à reconstituer la base circulaire.

Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

Devoir maison n°3

Calculs dans l'espace

À rendre pour le vendredi 21 décembre

Une feuille de papier de dimensions 21 cm × 29,7 cm peut être le patron de deux cylindres :

- l'un dont la hauteur est de 21 cm, la longueur de 29,7 cm servant à reconstituer la base circulaire ;
- l'autre dont la hauteur est de 29,7 cm, la largeur de 21 cm servant à reconstituer la base circulaire.

Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

Devoir maison n°3

Calculs dans l'espace

À rendre pour le vendredi 21 décembre

Une feuille de papier de dimensions 21 cm × 29,7 cm peut être le patron de deux cylindres :

- l'un dont la hauteur est de 21 cm, la longueur de 29,7 cm servant à reconstituer la base circulaire ;
- l'autre dont la hauteur est de 29,7 cm, la largeur de 21 cm servant à reconstituer la base circulaire.

Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

Devoir maison n°3

Calculs dans l'espace

À rendre pour le vendredi 21 décembre

Une feuille de papier de dimensions 21 cm × 29,7 cm peut être le patron de deux cylindres :

- l'un dont la hauteur est de 21 cm, la longueur de 29,7 cm servant à reconstituer la base circulaire ;
- l'autre dont la hauteur est de 29,7 cm, la largeur de 21 cm servant à reconstituer la base circulaire.

Lequel de ces deux cylindres a le plus grand volume ?

Devoir surveillé n°4

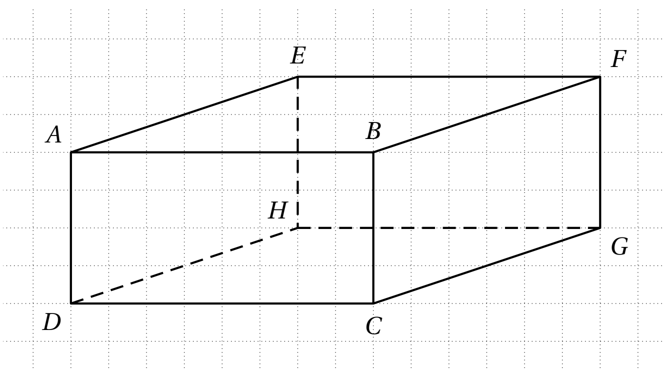
Statistiques – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 4.1 (6 points).
Sur le tableau ci-dessous, sans justification, entourer la proposition correcte, sachant que :
- il y a à chaque fois exactement une proposition correcte ;
- une réponse juste rapporte 1 point ;
- **une réponse fausse enlève 0,5 point** ;
- une absence de réponse rapporte 0 point ;
- un total négatif est ramené à zéro.

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
Une étude de l'INSEE indique que, en 2010, le salaire moyen d'une personne travaillant à temps plein est de 2 082 € nets par mois et le salaire médian est 1 675 € nets par mois. On peut supposer que …	… les hauts revenus ne sont pas très hauts	… les bas revenus ne sont pas très bas	… les bas revenus sont très bas
La même étude de l'INSEE indique que le salaire moyen a progressé de 2 % entre 2009 et 2010. On peut supposer que…	… le salaire médian a lui aussi progressé	… le salaire médian a baissé	… on ne peut rien dire de l'évolution du salaire médian avec cette seule information
Les notes d'un groupe d'élèves sont les suivantes $\{7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11\}$. Sans calcul on peut conjecturer que…	… la moyenne et la médiane des notes du groupe seront proches	… la moyenne des notes du groupe sera très supérieure à la médiane	… la moyenne des notes du groupe sera très inférieure à la médiane
Plus de la moitié des notes d'une classe à un devoir sont supérieures à 10.	La moyenne de la classe sera inférieure à 10	La moyenne sera supérieure à 10	On peut ne rien dire de la moyenne
Suzanne a eu une dizaine de notes supérieures à 15 en Éducation Musicale en Sixième mais sa dernière note était une note collective (chorale) où le professeur a mis 12 à tous les élèves. On peut être sûr que …	… cela ne va pas changer la moyenne de ses notes en Éducation Musicale sur l'année.	… cela ne va pas changer la médiane de ses notes en Éducation Musicale sur l'année.	… cela va faire baisser la médiane de ses notes en Éducation Musicale sur l'année.
Thomas vient en bus au Lycée. Sur le trajet du bus il y a cinq feux de circulation. Thomas ne relève pas précisément le nombre de feux qui sont au rouge sur le trajet mais constate qu'il y en au minimum trois qui sont au rouge. On sait alors que …	… le nombre moyen de feux au rouge sera inférieur à 3	… le nombre moyen de feux au rouge est égal à 3	… le nombre moyen de feux au rouge est supérieur à 3

EXERCICE 4.2 (4 points).
Une fourmi se déplace sur les faces d'un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$ cm, $AD = 2$ cm et $AE = 5$ cm.

Elle se situe en A et désire se rendre en G en suivant le trajet le plus court possible.



1. Déterminer la valeur exacte de la longueur du trajet.

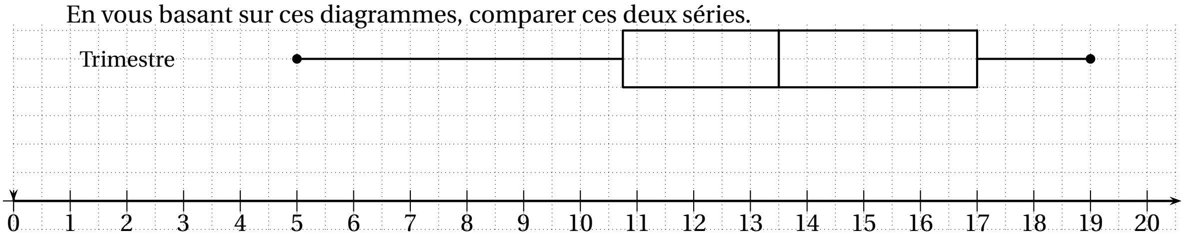
2. Déterminer la position exacte du point I sur l'arête par laquelle la fourmi doit passer.

Exercice 4.3 (5 points).

Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Seconde (arrondis à l'unité) à un contrôle d'algorithmique :

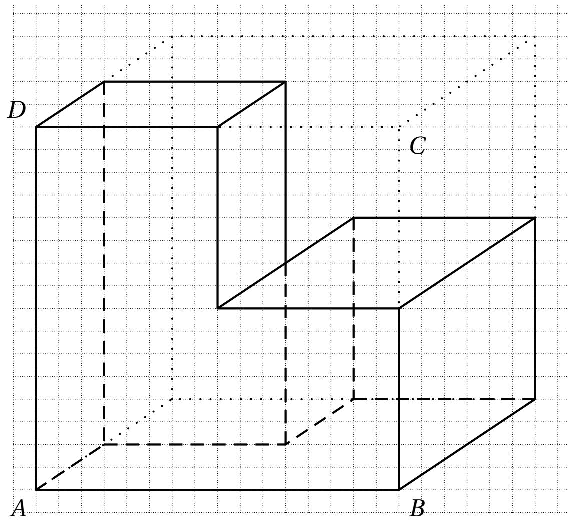
Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	3	0	0	2	0	0	0	1	0	0	4	0	1	5	0	1	0	3	4	4	8

1. (a) On note $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe. Calculer $\overline{x}$ (on arrondira au dixième).
   (b) On note m la note médiane de cette classe. Déterminer la valeur de m.
   (c) Comment expliquer la différence entre ces deux résultats ?
2. (a) On note Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles de cette série. Déterminer les rangs de Q_1 et Q_3 puis les valeurs de Q_1 et Q_3.
   (b) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite de la série constituée des moyennes de mathématiques de ces même élèves au premier trimestre.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer ces deux séries.



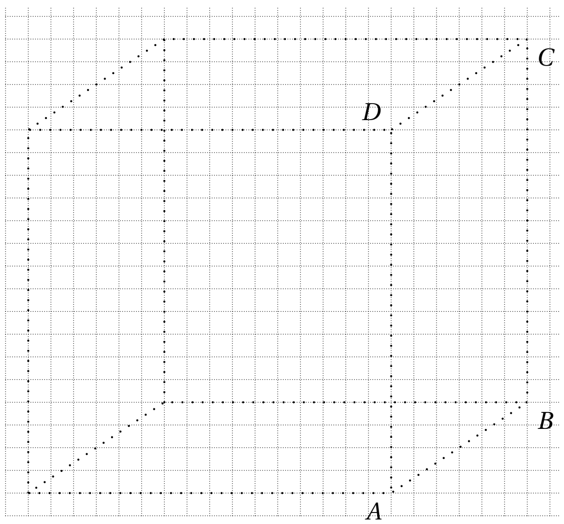
Exercice 4.4 (5 points).

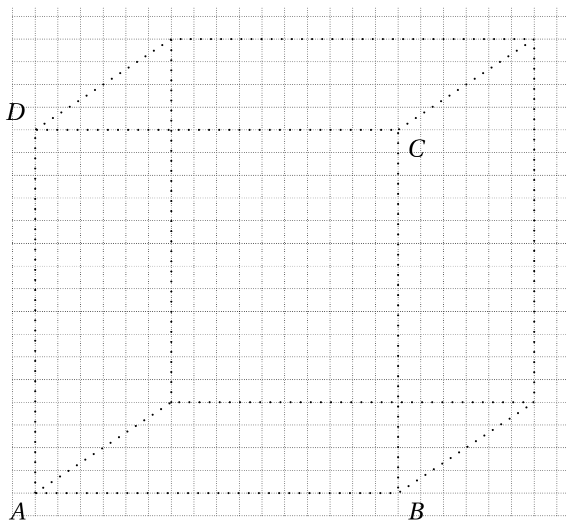
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube comme indiqué sur la figure ci-contre.



Sur les quadrillages ci-dessous, construire, en perspective cavalière :

1. sur le premier, la **même pièce**, la face $ABCD$ étant à droite.
2. sur le second, la pièce **restante** du cube la face $ABCD$ restant devant.





Chapitre 6

Équations de droites – Fonctions affines

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.

Le plan est muni d'un repère. On cherche à représenter tous les points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $y = 2x - 3$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1				3	4	5
y			-3	-1	1			

2. Placer les points correspondants dans un repère.
3. Que constate-t-on ?
4. Prendre un autre point ayant la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?
5. Prendre un point n'ayant pas la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?

ACTIVITÉ 6.2.

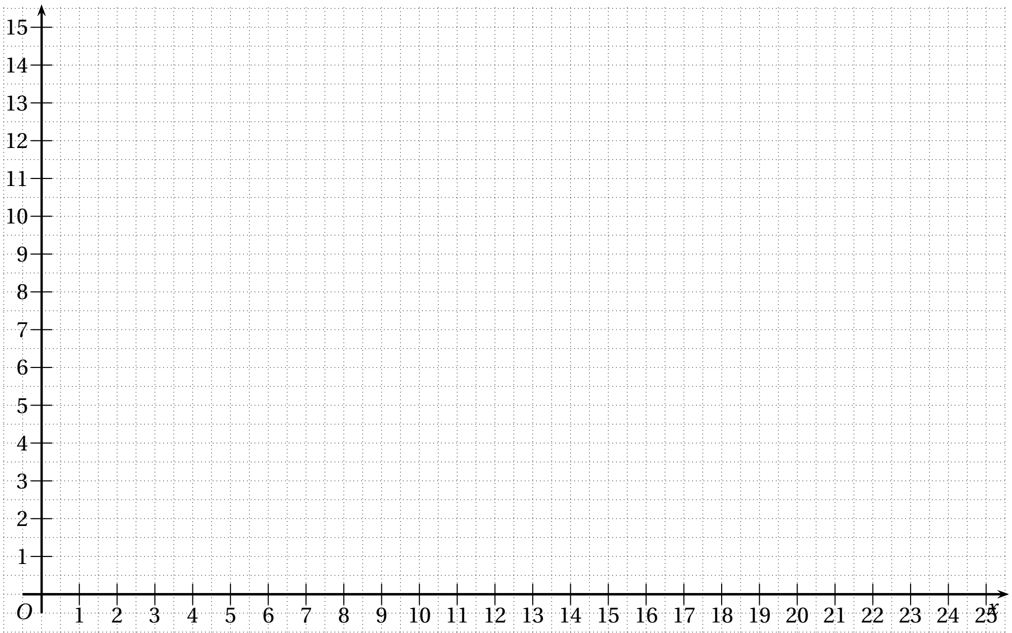
Soient $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$ les droites d'équations :

- $\mathscr{D}_1 : y = 3x + 1$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 1x + 1$;
- $\mathscr{D}_3 : y = 0,25x + 1$;
- $\mathscr{D}_4 : y = 0x + 1$;
- $\mathscr{D}_5 : y = -x + 1$;
- $\mathscr{D}_6 : y = -2x + 1$;

1. Montrer que le point $(0\,;\,1)$ appartient à toutes ces droites.
2. Déterminer, pour chacune de ces droites, un autre point lui appartenant.
3. Placer ces points dans un repère orthogonal puis tracer les droites.
4. Quelle semble être l'influence du coefficient du x sur « l'allure » de ces droites ?

Activité 6.3.
Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :
- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilomètre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilomètre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilomètre ;

1. Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de
   - 5 km ?
   - 10 km ?
   - 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter dans le repère ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3.



4. En vous basant sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus économique de prendre le taxi T_1, la taxi T_2 ou le taxi T_3. *On donnera les réponses sous forme d'intervalle.*
5. Un client désire faire plus de 20 km, et choisira le taxi T_3. Il vous charge étudier le coût de son trajet en fonction de la distance x.
   (a) Compléter le tableau ci-dessous :

Distance x	20	21	22	23	24	25	30	40	50
Coût $f_3(x)$									

   (b) La distance et le coût sont-ils des grandeurs proportionnelles ?
   (c) À l'aide du tableau précédent conjecturer de combien augmente le coût lorsque la distance augmente de
   - 1 km
   - 2 km
   - 5 km

   (d) Que peut-on dire alors des grandeurs « augmentation de la distance » et « augmentation du coût » ?

6.2 Bilan et compléments

6.2.1 Équations de droites

Le plan est muni d'un repère.

Théorème 6.1. *Toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels constants.*
Cela signifie que :
- *tout point M appartenant à la droite $\mathscr{D}$ a ses coordonnées $(x; y)$ qui vérifient l'équation $y = mx + p$;*
- *tout point M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $y = mx + p$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

On dit que $y = mx + p$ est l'équation réduite *de $\mathscr{D}$.*

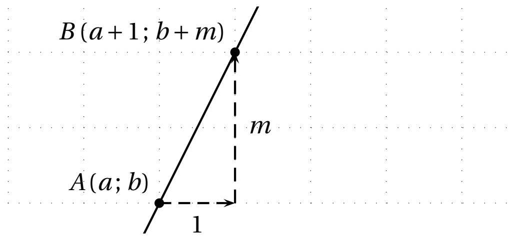
Toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $x = k$, où k est un nombre réel constant.

On l'admettra.

Propriété 6.2. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points distincts quelconques de $\mathscr{D}$.*
Alors on a :
- $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *et ce nombre est appelé* coefficient directeur *de la droite $\mathscr{D}$;*
- *le point de coordonnées $(0\,;\,p)$ appartient à $\mathscr{D}$ et le nombre p est appelé* ordonnée à l'origine *de la droite $\mathscr{D}$.*

Preuve. On admettra le premier point.
Par ailleurs, le point d'abscisse 0 appartenant à $\mathscr{D}$ a pour ordonnée $y = m \times 0 + p = p$. ♢

Propriété 6.3. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(a\,;\,b)$ un point quelconque de $\mathscr{D}$.*
Alors le point $B(a+1\,;\,b+m)$ appartient à $\mathscr{D}$.



Preuve. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et $A(a\,;\,b)$ un point de $\mathscr{D}$ et $B(a+1\,;\,b+m)$.
Montrons que B appartient à $\mathscr{D}$.
On sait que $A(a\,;\,b) \in \mathscr{D}$ donc $b = m \times a + p$.
Cherchons l'ordonnée du point de la droite donc l'abscisse est $a+1$.
On sait que $y = m(a+1) + p = m \times a + m + p = b + m$.
Donc B appartient à $\mathscr{D}$. ♢

Propriété 6.4. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, donc non parallèles à l'axe des ordonnées.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (éventuellement confondues) si et seulement si $m = m'$.

On l'admettra.

6.2.2 Fonctions affines

Définition 6.1. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines*.
Cas particuliers :
- si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite *constante* ;
- si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite *linéaire*.

Propriété 6.5. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.*
Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Propriété 6.6. *Soit f une fonction déinie sur $\mathbb{R}$.*
- *Si les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnelles, alors f est une fonction affine.*
- *Réciproquement, si f est une fonction affine, alors les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnelles.*

Dit autrement, on a :
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *=constante $\Leftrightarrow$ f est une fonction affine.*
Ou encore :
Pour tout x et x', $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ =constante $\Leftrightarrow$ f est une fonction affine

On l'admettra.

Propriété 6.7. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.*
- *Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si $m > 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma < mb \\ &\Leftrightarrow ma + p < mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante.

Si $m < 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma > mb \\ &\Leftrightarrow ma + p > mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante.

Enfin, si $m = 0$, $f(a) = f(b) = p$. ◇

Propriété 6.8. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$. Alors :*

1. *$f(x) = 0$ pour $x_0 = -\frac{p}{m}$ et*
2. *Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :*
   - *Si $m > 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

   - *Si $m < 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Preuve. 1.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow mx + p = 0 \\ &\Leftrightarrow mx = -p \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0 \end{aligned}$$

2. • Si $m > 0$ alors f croissante donc
$x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif et
$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif.
• Si $m < 0$ alors f décroissante donc
$x < x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif et
$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif.

◇

6.3 Exercices

6.3.1 Équations de droites

EXERCICE 6.1.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite $y = -3x + 0,5$. Déterminer si $A(150,5\,;\,-451)$ ou $B(-73,25\,;\,219,5)$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 6.2.
Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$:

1. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{13}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = 6x + \frac{1}{6}$;
2. $A(1\,;\,-7)$ et $\mathscr{D}$: $y = -\frac{3}{4}(x+2) - 5$;
3. $A(2\,;\,5)$ et $\mathscr{D}$: $x = 5$;
4. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = \frac{1}{6}$;

EXERCICE 6.3.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
2. B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

EXERCICE 6.4.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
- $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
- $\mathscr{D}_5 : x = 6$;

EXERCICE 6.5.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -5x + 10$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 6x - 14$;
- $\mathscr{D}_3 : y = \frac{3x-1}{6}$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{-2x+1}{4}$;
- $\mathscr{D}_5 : 2x - 5y = 3$;

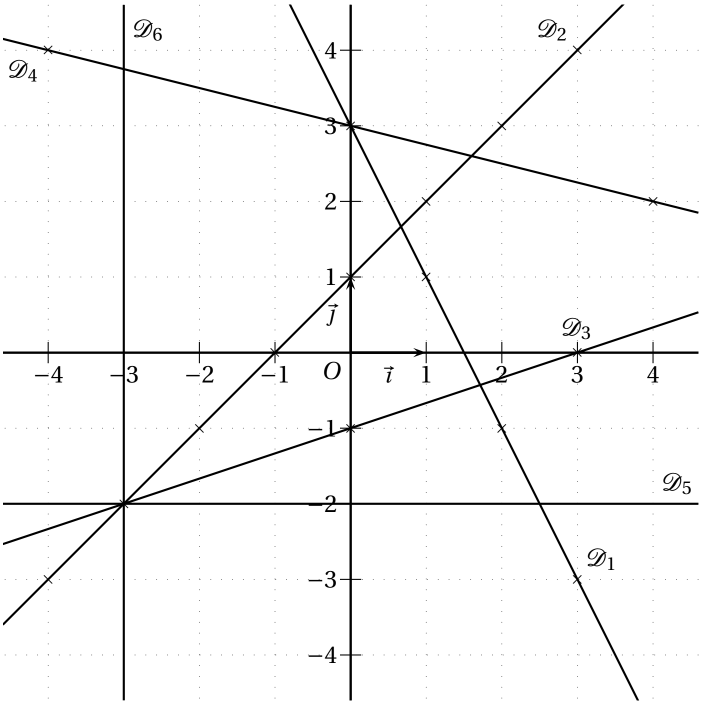
EXERCICE 6.6.
Dans un même repère, tracer les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
- $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
- $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;

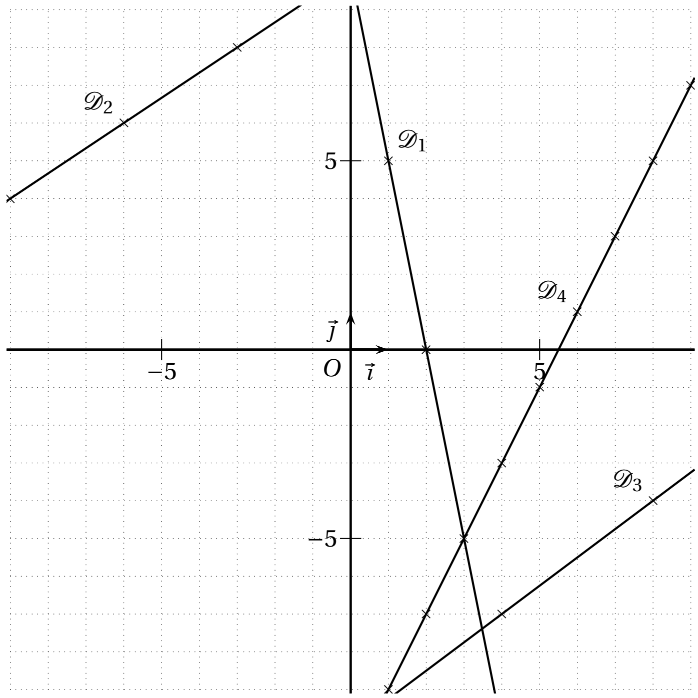
EXERCICE 6.7.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :

1. $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
2. $A(4;4)$ et $B(-1;2)$;
3. $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
4. $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
5. $A(1;3)$ et $B(1;4)$.

EXERCICE 6.8.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 6.9.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 6.10. 1. Déterminer l'équaion réduite de la droite $\mathscr{D}$ sachant que $A(2;1) \in \mathscr{D}$ et que $\mathscr{D}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}' : y = 3x - 1$.

2. (a) On donne $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$ et $D(-2;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
   (b) Même question avec $A(1;2)$, $B(2;-4)$, $C(0;3)$ et $D(1;-3)$.
3. Déterminer l'ordonnée du point A sachant que :
   - $A \in \mathscr{D}$;
   - $\mathscr{D}$ parallèle à la droite (BC) où $B(2;1)$ et $C(-1;3)$;
   - l'abscisse de A vaut 8

6.3.2 Fonctions affines

EXERCICE 6.11.
Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :

- agence A : Forfait de 50 € plus 0,42 € par km ;
- agence B : Forfait de 40 € plus 0,50 € par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique selon que l'on désire faire un parcours de
   - 50 km ?
   - 150 km ?
   - 300 km ?
2. On appelle x la distance que l'on désire parcourir. Déterminer selon les valeurs de x l'agence la plus économique.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la distance à parcourir et indiquant quelle agence est la plus intéressante pour cette distance ainsi que le tarif à payer.

EXERCICE 6.12.
Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants : Forfait d'une heure 15 € plus 0,30 € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau suivant, où la durée est la durée totale des communications du mois en minute et le coût est le montant final de la facture en euros :

Durée	45	80	120
Coût			

2. Existe-t-il une fonction affine f qui à une durée de communication x associe le coût $f(x)$?

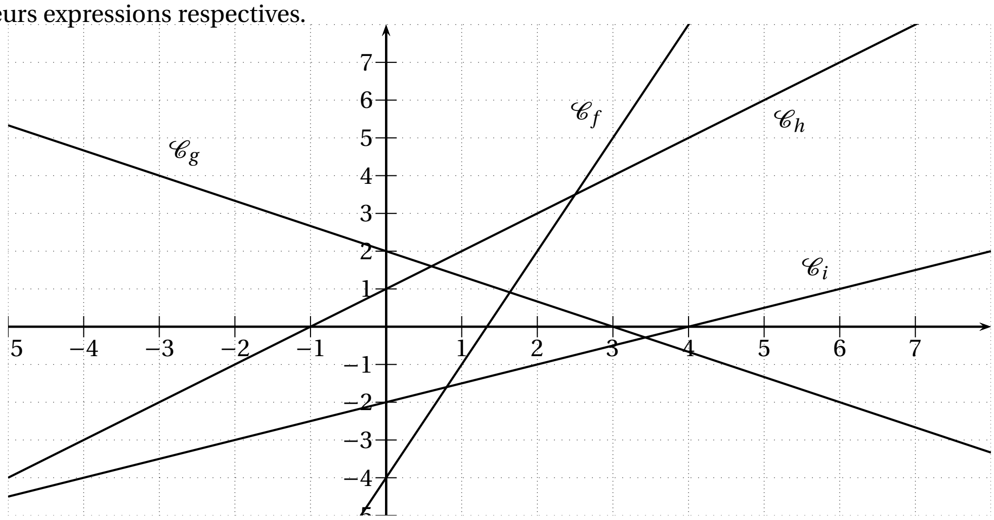
EXERCICE 6.13.
Soit f une fonction affine. Déterminer l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$
3. $f(5) = -1$ et $f(3) = 3$
4. $f(-4) = 5$ et $f(1) = 7$

EXERCICE 6.14.
Représenter dans un même repère les courbes des fonctions affines suivantes :

- $f(x) = 2x - 3$;
- $g(x) = 2x + 1$;
- $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$;
- $i(x) = -x + 4$;
- $j(x) = -\frac{3}{4}x + 5$;
- $k(x) = -3x + 5$.

EXERCICE 6.15.
Dans le repère ci-dessous on a représenté les courbes de quatre fonctions affines f, g, h et i.
Déterminer leurs expressions respectives.



EXERCICE 6.16.
On donne $P(x) = (2x+1)(-x+2)$.

1. (a) Étudier le signe de $2x+1$ selon les valeurs de x.
   (b) Étudier le signe de $-x+2$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x. *On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.*
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.
2. Étudier le signe, selon les valeurs de x, de chacune des fonctions suivantes :
   - $Q(x) = (-2x+1)(-3x+4)$;
   - $R(x) = (-x+4)(5-2x)$;
   - $T(x) = (x-1)(-2x+4)(2x-1)$.
3. Résoudre les inéquations suivantes :
   - $S(x) \geqslant 0$ sachant que $S(x) = (2x+3)(x-1)$;
   - $U(x) \leqslant 0$ sachant que $U(x) = (4-x)(x+1)(2x+2)$.

EXERCICE 6.17.
On donne $f(x) = (3x+4)(x-4) - (2x-3)(3x+4)$.
Résoudre $f(x) > 0$. *On pourra commencer par factoriser.*

EXERCICE 6.18.
On donne $g(x) = (2x+1) - (3x-1)$. Résoudre $g(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 6.19.
Résoudre les inéquations suivantes :

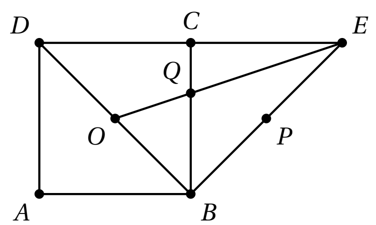
1. $x \leqslant x^2$
2. $\frac{1}{x} \leqslant x$
3. $x^3 \leqslant x^2$

EXERCICE 6.20.
On donne $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

1. Montrer que $P(x) = (x^2-1)(2x+3)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

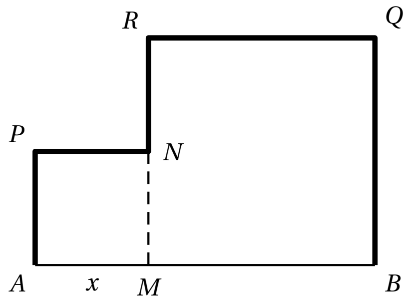
6.4 Problèmes

PROBLÈME 6.1.
$ABCD$ est un carré de centre O.
E est le symétrique de D par rapport à C.
Q est l'intersection des droites (OE) et (BC).
P est le milieu du segment $[BE]$.
On se place dans le repère (A, B, D) et on admettra que les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$.



1. Montrer que O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
2. Montrer que E a pour coordonnées $(2;1)$.
3. Montrer que P a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.
4. Déterminer une équation de la droite (OE) puis en déduire les coordonnées de Q.
5. Montrer que les points D, Q et P sont alignés.

PROBLÈME 6.2.
On donne $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.
Dans le même demi-plan, on construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction définie sur $[0;6]$ qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en gras sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.



1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle $[3;6]$.
2. Vérifiez que $f(x) = 18 - 2x$, si $x \in [0;3]$ et que $f(x) = 6 + 2x$, si $x \in [3;6]$.
3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur les abscisses, 0,5 cm sur les ordonnées), construisez la courbe représentatice de f.
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

PROBLÈME 6.3 (Comparaison de tarifs)**.**
Le tableau ci-dessous présente un extrait des tarifs des forfaits non bloqués pour téléphones portables, proposés par une société de téléphonie fictive.

Forfait	Min comprises dans le forfait	Coût du forfait (en €)	Par min de dépassement (en €)
1	90	33	0,30
2	180	43	0,25
3	300	57	0,18

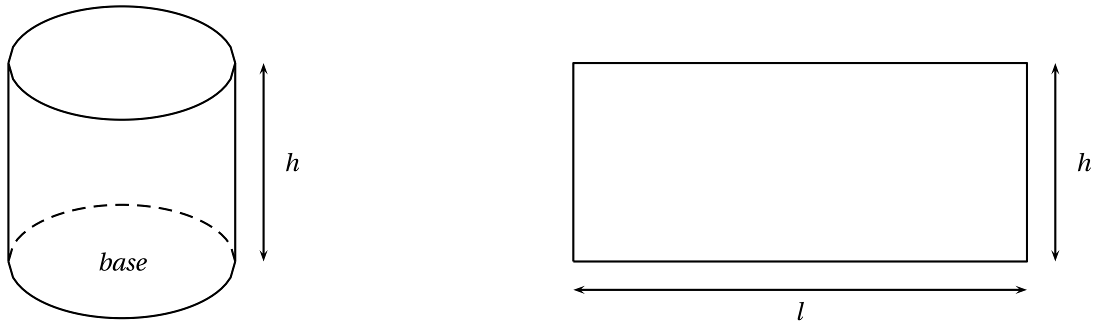
Pour les forfaits 1, 2 et 3 on désigne, respectivement, par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ le prix à payer en euros pour une durée totale de communications de x minutes.

1. (a) Exprimer $f_1(x)$ en fonction de x lorsque $0 \leqslant x \leqslant 90$ puis lorsque $x > 90$.
   (b) Dans un repère orthogonal, représenter graphquement la fonction f_1 pour x compris entre 0 et 400.
2. Exprimer $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x et représenter sur le graphique précédent ces deux fonctions.
3. Lire sur le graphique quel est le tarif le plus avantageurx en fonction de la durée mensuelle des communications.
4. Écrire un algorithme prenant comme argument une durée de communication et indiquant quel forfait est le plus avantageux pour cette durée ainsi que le prix total à payer.

Devoir surveillé n°5

Géométrie dans l'espace – Équations de droites – Expressions affines

EXERCICE 5.1 (3 points)**.**
On donne ci-dessous le dessin en perspective d'un cylindre de hauteur h ainsi que son patron (un rectangle de dimensions $h \times l$).



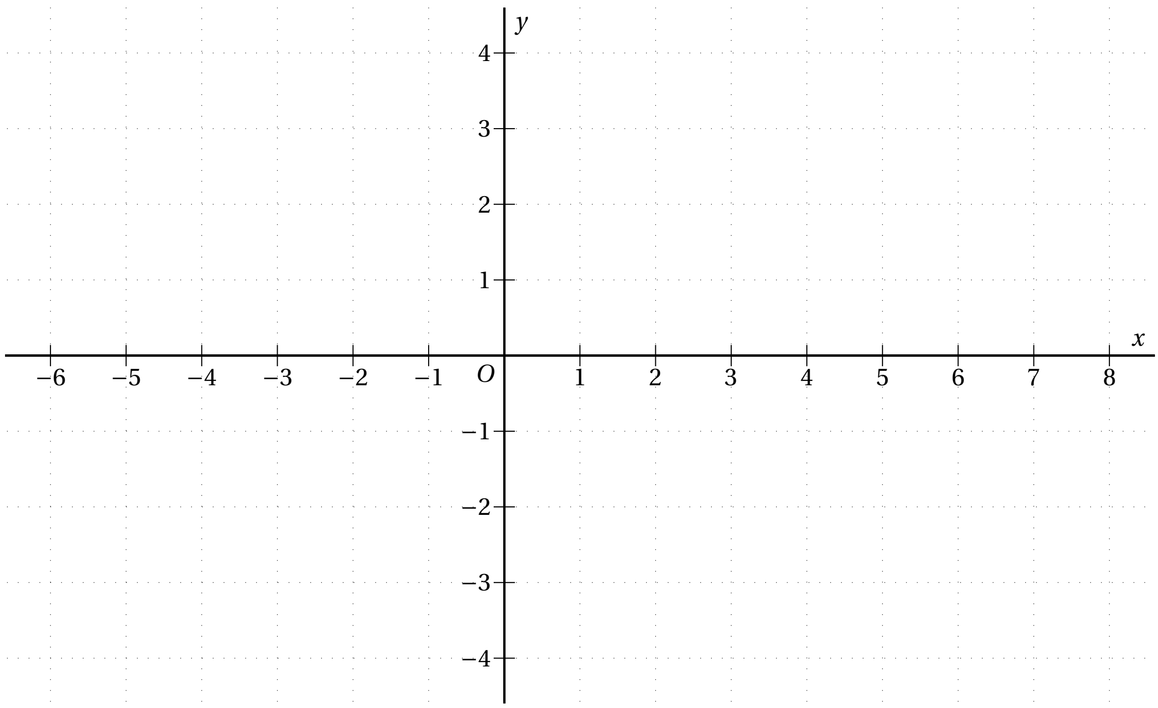
Déterminer le volume du cylindre sachant que $h = 4$ cm et que $l = 12$ cm. *On arrondira le résultat au millième.*

EXERCICE 5.2 (4,5 points)**.**
Le plan est muni d'un repère. Déterminer une équation de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

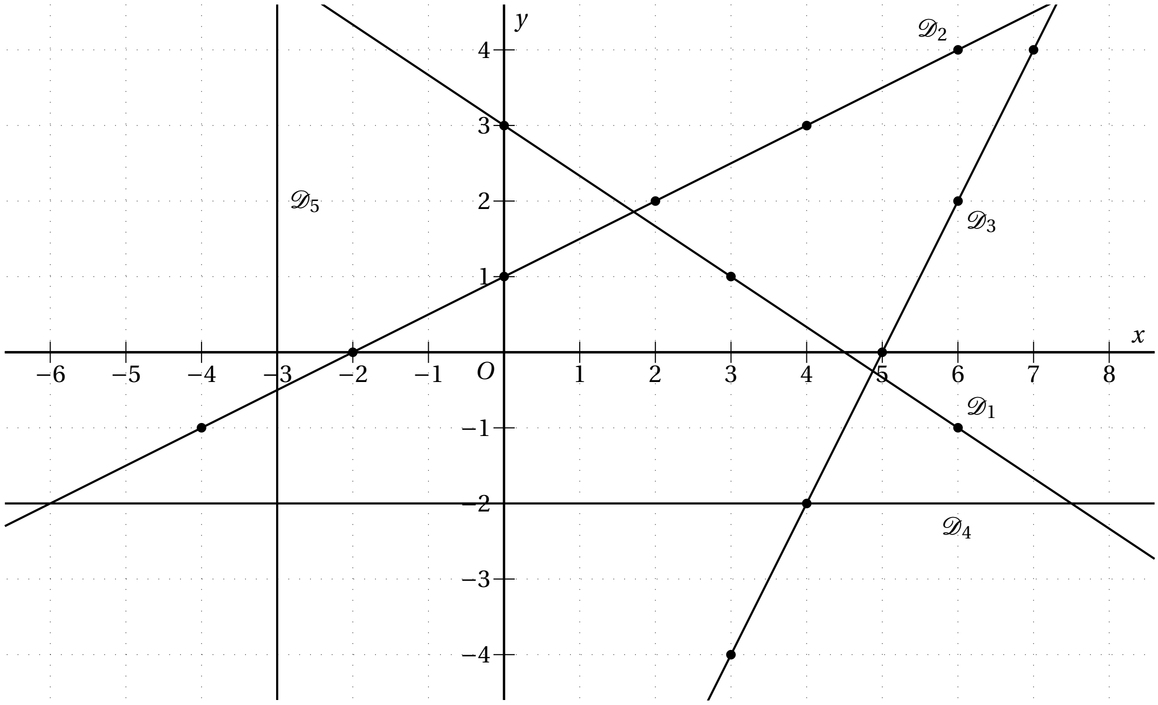
1. $A(1\,;3)$ et $B(0\,;4)$
2. $A(1\,;-3)$ et $B(-1\,;1)$
3. $A(2\,;3)$ et $B(2\,;4)$

EXERCICE 5.3 (4,5 points)**.**
Tracer dans le repère ci-dessous les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ d'équations :

1. $\mathscr{D}_1 : y = 2x - 3$
2. $\mathscr{D}_2 : y = -x + 4$
3. $\mathscr{D}_3 : y = \frac{3}{4}x - 1$



EXERCICE 5.4 (4 points)**.**
Sans justifier, déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 5.5 (4 points)**.**
Soit f la fonction définie pour tout nombre x par $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

1. Montrer que $f(x) = (x-2)(-2x+1)$
2. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Chapitre 7

Statistiques continues

Sommaire

7.1 Un exemple

Lors d'une enquête portant sur 1 300 personnes, on a demandé le temps passé par jour devant le téléviseur. Les données relevées ont été regroupées par classe car les 1 300 données sont en trop grand nombre pour être manipulées toutes ensembles. On a obtenu le tableau suivant :

Temps (h)	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7]$
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

Les 1 300 données ne sont alors plus accessibles dans le détail. Peut-on malgré tout obtenir de ce tableau les paramètres statistiques de la série (valeurs extrêmes, moyenne, médiane, etc.) ou, au moins, des valeurs approchées ?

7.1.1 Valeurs extrêmes

1. Peut-on obtenir les valeurs minimale et maximale de la série ? Si oui les donner. Sinon donner une valeur (la plus grande possible) dont on est sûr qu'elle est plus petite que toutes les données de la série et une valeur (la plus petite possible) dont on est sûr qu'elle est plus grande que toutes les données de la série.
2. Peut-on obtenir l'étendue de la série ? Si oui la donner. Sinon donner l'étendue maximale que peut avoir la série.

7.1.2 Moyenne

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas calculer la moyenne exacte du temps passé par jour devant la télévision.
2. Pour obtenir une valeur approchée de la moyenne, on considère que toutes les données d'une classe sont égales au centre de la classe.
   Ainsi, par exemple, nous considèrerons que les 170 données de la classe $[0;1[$ sont égales à $\frac{0+1}{2}=0,5$.
   Compléter alors le tableau suivant et en déduire une valeur approchée de la moyenne :

Temps (h)	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;4[$	$[4;5[$	$[5;6[$	$[6;7]$
Centre de la classe							
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

7.1.3 Médiane

1. Quel est le rang de la médiane de cette série ?
2. Expliquer pourquoi on ne peut pas savoir le temps médian exact (la médiane exacte de cette série) passé par jour devant la télévision.

3. Compléter le tableau suivant :

Temps passé devant la télévision inférieur à	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h
Effectif	170	309	432	221	103	41	24
Effectifs cumulés croissants							

4. À l'aide de ces effectifs cumulés croissants et du 1., déterminer à quelle classe appartient la médiane exacte de cette série.
5. Cette donnée est souvent trop approximative pour être utile en statistique et l'on a souvent besoin d'une estimation plus précise. On l'obtient avec un graphique.
   (a) Représenter le tableau sur un graphique en indiquant en abscisse les temps passés devant la télévision (1 h = 2 cm) et en ordonnée les effectifs cumulés croissants (100 = 1 cm).
   (b) À l'aide de ce graphique et du 1., déterminer une valeur approchée de la médiane de cette série.

7.1.4 Mode

Lorsque les données sont regroupées par classes de même taille le mode n'est pas accessible mais la classe dont l'effectif et le plus grand est appelée classe modale. Lorsque les classes ne sont pas de la même taille, il existe des moyens d'estimer celle qui est modale, mais cette compétence n'est pas au programme de la Seconde.

7.2 Exercices

EXERCICE 7.1.
Le tableau ci-contre donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Estimer le salaire moyen et le salaire médian des employés de l'entreprise.

Salaire	Effectif
[1 000 ; 1 200[	326
[1 200 ; 1 500[	112
[1 500 ; 2 000[	35
[2 000 ; 3 000[	8
[3 000 ; 10 000[	3

EXERCICE 7.2.
Dans une petite ville fictive où la taxe d'habitation est proportionnelle à la superficie de l'habitation, la répartition des habitations selon leur superficie est la suivante :

Superficie en m^2	Effectif
[10 ; 40[	14
[40 ; 70[	24
[70 ; 100[	54
[100 ; 120[	64
[120 ; 140[	32
[140 ; 170[	12

1. Déterminer une valeur approchée de la superficie moyenne des habitations de cette ville.
2. Un membre du conseil municipal propose d'exonérer la moitié des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ? Une personne dont l'appartement mesure 110 m^2 serait-elle exonérée ?
3. Un autre membre du conseil municipal propose d'exonérer le quart des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ?

EXERCICE 7.3.
Dans deux entreprises A et B, les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres.
Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel net, en euros. On suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, la répartition est régulière.

Entreprise A

Salaires	$[1\,000\,;2\,000[$	$[2\,000\,;3\,000[$	$[3\,000\,;4\,000[$
Ouvriers	114	66	0
Cadres	0	8	12

Entreprise B

Salaires	$[1\,000\,;2\,000[$	$[2\,000\,;3\,000[$	$[3\,000\,;4\,000[$
Ouvriers	84	42	0
Cadres	0	12	12

1. (a) Calculer la moyenne des salaires de tous les employés de l'entreprise A
   (b) Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de l'entreprise A
   (c) Calculer la moyenne des salaires des cadres de l'entreprise A
2. Faire les mêmes calculs pour l'entreprise B
3. Le P.D.G. de l'entreprise A dit à celui de l'entreprise B : « Mes employés sont mieux payés que les vôtres. »
   « Faux »répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »
   Expliquer ce paradoxe.

EXERCICE 7.4.
Lors d'une étude d'une population de rats, K. Miescher a observé l'évolution d'une population de 144 rats.
Le tableau ci-contre indique la durée de vie (en mois) des rats.
Ainsi, un seul rat a vécu entre 10 et 15 mois, trois ont vécu entre 15 et 20 mois, neuf entre 20 et 25 mois etc. On suppose que, dans chaque classe, la répartition est régulière.

1. Évaluez l'étendue de cette série
2. Évaluez la moyenne de la durée de vie d'un rat dans cette population
3. Quelle est le rang de la durée de vie médiane d'un rat dans cette population ?
   À l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants,évaluez le valeur de la médiane ?
4. En observant la moyenne et la médiane, quel commentaire peut-on faire ?

Durée de vie (en mois)	Effectif
$[10\,;15[$	1
$[15\,;20[$	3
$[20\,;25[$	9
$[25\,;28[$	12
$[28\,;30[$	13
$[30\,;32[$	20
$[32\,;34[$	23
$[34\,;36[$	26
$[36\,;38[$	22
$[38\,;40[$	11
$[40\,;42[$	3
$[42\,;43[$	1

Chapitre 8

Fluctuations d'échantillonage

Sommaire

8.1 Activité

Rappels :

- *l'effectif d'un résultat est le nombre de fois que ce résultat apparaît ;*
- *la fréquence d'un résultat est l'effectif de ce résultat divisé par l'effectif total.*

ACTIVITÉ 8.1 (Simulations de séries de lancers de dés)**.**
L'objectif de cette activité est de produire des séries de 50 lancers de dé à 6 faces et d'observer la distribution des fréquences de chacune des faces.
Pour éviter des lancers de dés qui peuvent être bruyants, on va simuler ces lancers à l'aide de la fonction *random* de la calcultrice.

1. La fonction *random* de la calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire comportant 10 décimales et compris dans l'intervalle $[0 ; 1[$.
   (a) Faire quelques essais.
   (b) Parfois la calculatrice n'affiche que 9 décimales. Pourquoi ?
   (c) Comment peut-on simuler le lancer d'un dé à 6 faces avec cette fonction ?

   Pour la suite de l'activité, on appelera *lancer de dé* la simulation d'un dé obtenu à la calculatrice.
2. **Par groupe de deux élèves**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 8.1 page suivante.
   - l'un lance un dé 50 fois, l'autre note le résultat obtenu ;
   - on recommence en permuttant les rôles ;
   - chaque groupe de deux obtient alors deux tableaux de cinquante résultats et complète les trois tableaux de fréquence.

   (b) Graphiques.
   Les graphiques sont à faire dans les repères de la page 73.
   On note en abscisses les numéros des faces du dé et en ordonnées les fréquences de chacun de chacun des numéros.
   - Faire les diagrammes des fréquences de vos résultats et de ceux de votre voisin sur un même graphique en utilisant deux couleurs différentes.
   - Faire les diagrammes des fréquences de votre groupe sur le graphique suivant.
3. **Par colonne puis pour la classe**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 8.2 page suivante.
   - relever les résultats de tous les groupes de deux élèves de votre colonne et compléter le quatrième tableau de fréquence ;
   - relever enfin les résultats de tous les élèves de la classe et compléter le dernier tableau.

(b) Graphiques.
Les graphiques sont à faire dans les repères de la page ci-contre.
- Faire les diagrammes des fréquences de votre colonne.
- Faire les diagrammes des fréquences de votre classe sur le graphique suivant.

4. **Comparaison des graphiques**

(a) Comparer le diagramme de vos fréquences à celui de votre voisin.

(b) Comparer le diagramme des fréquences de votre groupe à celui d'autres groupes.

(c) Comparer le diagramme des fréquences de votre colonne à celui d'autres colonnes puis à celui de la classe.

(d) Que constate-t-on ?
Ce phénomène s'appelle *fluctuation d'échantillonage sur des séries de taille 50.*

TABLE 8.1: Groupe de deux élèves

Mes 50 lancers

Tableau de fréquence de mes résultats

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Ceux de mon voisin

Tableau de fréquence des résultats de mon voisin

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Tableau de fréquence de mon groupe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	100	

TABLE 8.2: Pour la colonne puis pour la classe

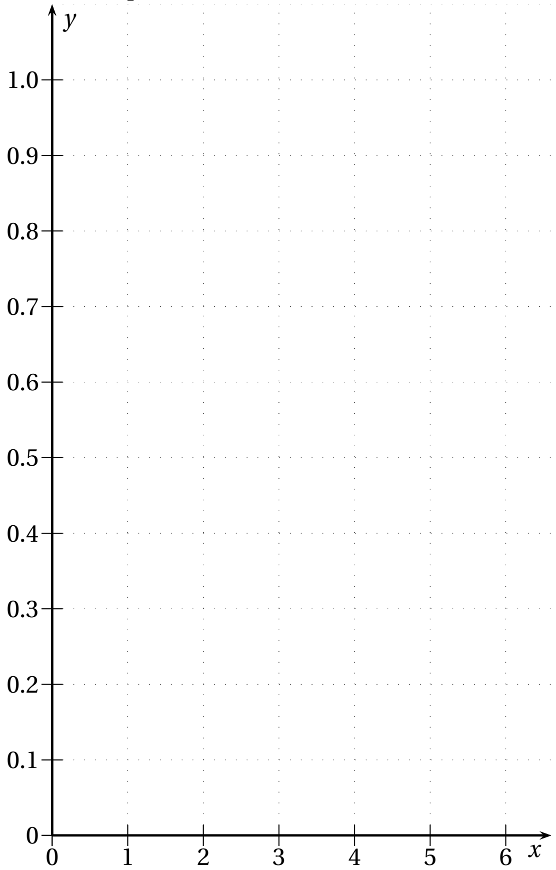
Tableau de fréquence de ma colonne

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

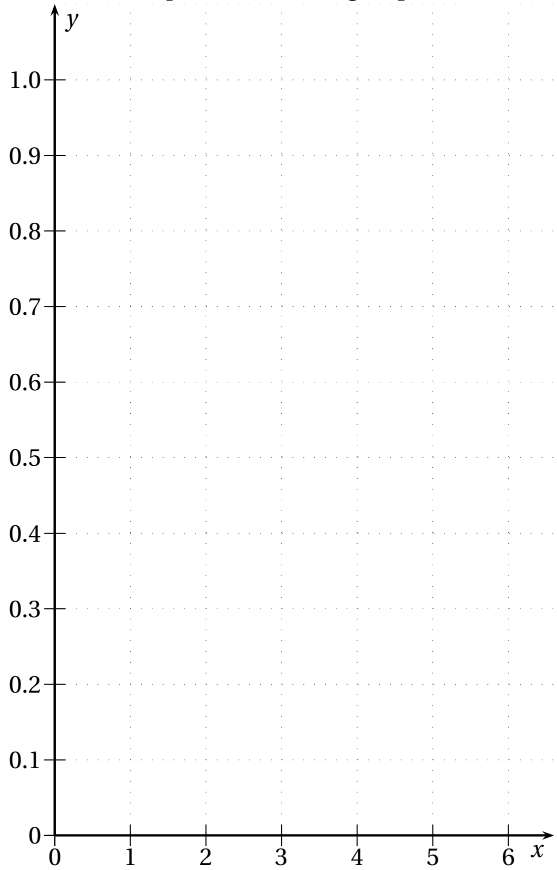
Tableau de fréquence de la classe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

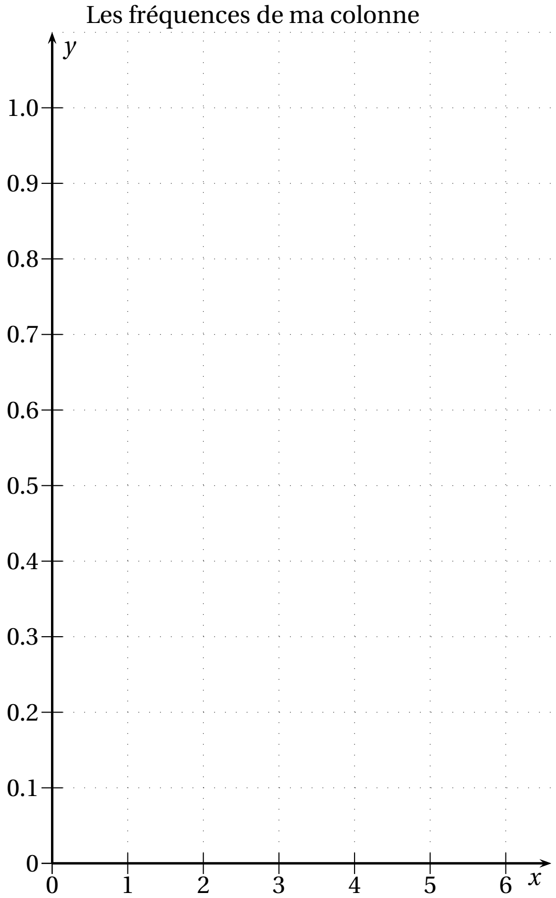
Mes fréquences et celles de mon voisin



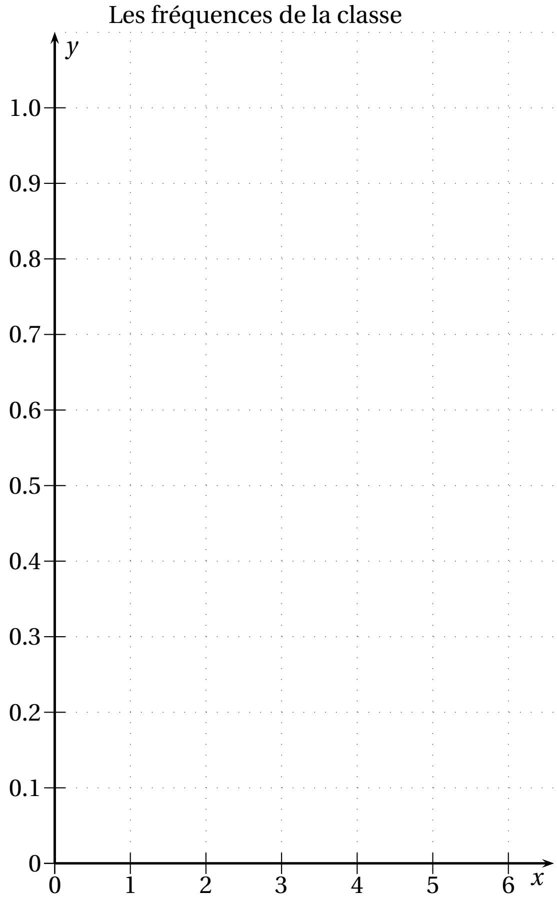
Les fréquences de mon groupe



Les fréquences de ma colonne



Les fréquences de la classe



ACTIVITÉ 8.2 (Marche à cinq pas)**.**
On se pose la question suivante :
On place un pion sur un axe gradué à la position 0. Au hasard, le pion avance ou rcule d'un pas. Il fait cinq pas. Quelle est sa potion d'arrivée sur l'axe ?

Il y a différentes manières de jouer à ce jeu. Expliquez comment vous feriez :

- avec une pièce de monnaie ;
- avec un dé ;
- avec la touche *random* de la calculatrice.

C'est la dernière méthode que nous allons utiliser dans une première partie puis nous regarderons ce qu'un ordinateur peut donner comme résultats.

Partie A : Avec la touche *random* de la calculatrice

1. Par groupe de deux
   (a) 25 marches
   - l'un indique le résultat de la calculatrice ;
   - l'autre effectue la marche dans le tableau 8.3 de la présente page et note d'une croix bien visible **la case d'arrivée au bout de cinq pas** ;
   - le groupe procède ainsi 25 marches à cinq pas ;
   - le groupe fait ensuite le total des arrivées et calcule les fréquences ;
   - on inverse les rôles pour 25 nouvelles marche à cinq pas.

   (b) Tableaux des fréquences puis graphiques
   - Le groupe complète ensuite les tableaux de fréquence et construit les diagrammes des fréquences.
2. Par colonne puis pour la classe
   Relever les résultats de votre colonne puis de la classe pour compléter les derniers tableaux de fréquence et construire les diagrammes des fréquences.

TABLE 8.3: Les 25 marches à cinq pas

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Marche 1											
Marche 2											
Marche 3											
Marche 4											
Marche 5											
Marche 6											
Marche 7											
Marche 8											
Marche 9											
Marche 10											
Marche 11											
Marche 12											
Marche 13											
Marche 14											
Marche 15											
Marche 16											
Marche 17											
Marche 18											
Marche 19											
Marche 20											
Marche 21											
Marche 22											
Marche 23											
Marche 24											
Marche 25											
Total											
Fréquences											

TABLE 8.4: Tableaux des fréquences

Fréquences de mes 25 marches

Arrivée	Effectif	Fréquence
−5		
−3		
−1		
1		
3		
5		

Fréquences de celles de mon voisin

Arrivée	Effectif	Fréquence
−5		
−3		
−1		
1		
3		
5		

Fréquences de mon groupe

Arrivée	Effectif	Fréquence
−5		
−3		
−1		
1		
3		
5		

TABLE 8.5: Colonne et classe

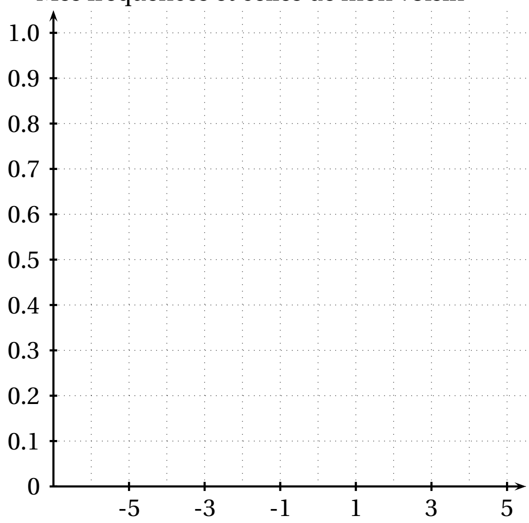
Fréquences des 25 marches de ma colonne

Arrivée	Effectif	Fréquence
−5		
−3		
−1		
1		
3		
5		

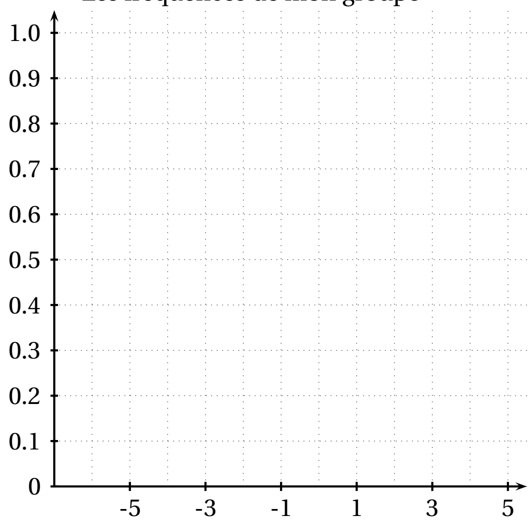
Fréquences de celles de la classe

Arrivée	Effectif	Fréquence
−5		
−3		
−1		
1		
3		
5		

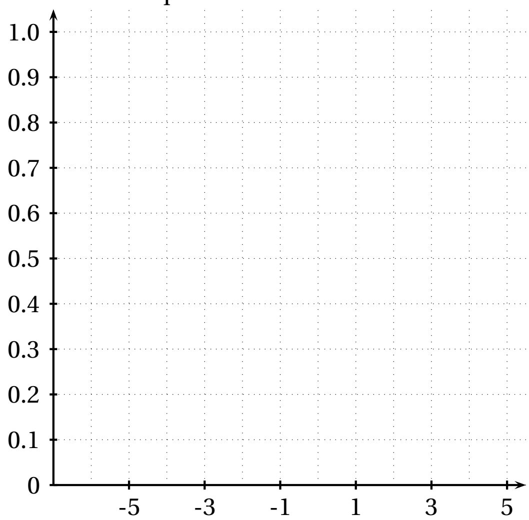
Mes fréquences et celles de mon voisin



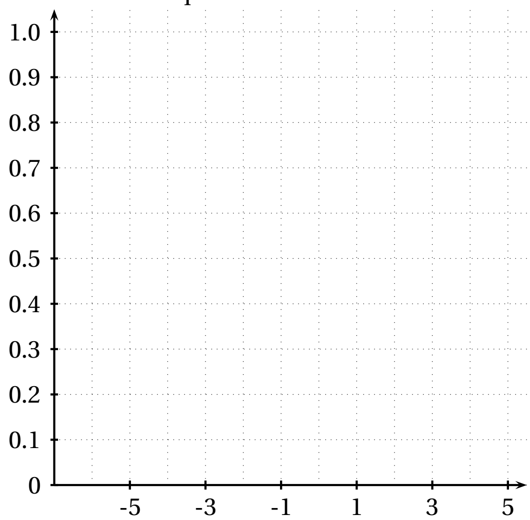
Les fréquences de mon groupe



Les fréquences de ma colonne



Les fréquences de la classe



Partie B : Résultats de simulation par ordinateur
Le tableau ci-dessous donne une liste de 10 séries de 100 marches, obtenues avec un ordinateur.

	-5	-3	-1	1	3	5
Série 1	4	11	42	26	13	4
Série 2	3	21	33	21	20	2
Série 3	4	14	33	27	18	4
Série 4	6	19	34	20	14	7
Série 5	4	11	34	31	16	4
Série 6	2	23	25	28	19	3
Série 7	4	14	36	28	16	2
Série 8	0	15	38	26	19	2
Série 9	3	12	29	29	24	3
Série 10	1	16	31	34	14	4

1. Remplir le tableau des fréquences :

	-5	-3	-1	1	3	5
Série 1						
Série 2						
Série 3						
Série 4						
Série 5						
Série 6						
Série 7						
Série 8						
Série 9						
Série 10						

2. Donner un encadrement des fréquences pour chaque événement :

$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } -5 \leq \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } -3 \leq \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } -1 \leq \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } 1 \leq \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } 3 \leq \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \leq \text{Fréquence de l'arrivée } 5 \leq \ldots\ldots$$

3. Calculer les fréquences des événements pour ces 1 000 marches.
4. Comparer ces résultats obtenus avec un ordinateur avec ceux obtenus par simulation avec la touche *random* de la calculatrice.
5. Répondre aux questions suivantes :
   - Si je fais 10 marches, suis-je sûr que $0,25 \leqslant$ fréquence de l'arrivée $-1 \leqslant 0,36$?
   - Si je fais 100 marches, suis-je sûr que $0,25 \leqslant$ fréquence de l'arrivée $-1 \leqslant 0,36$?
6. On peut démontrer (mais pas en Seconde) que, si on joue un très grand nombre de fois, les fréquences des événements -5 ; -3 ; -1 ; 1 ; 3 ; 5 *tendent à se rapprocher* respectivement des nombres $\frac{1}{2^5}$; $\frac{5}{2^5}$; $\frac{10}{2^5}$; $\frac{10}{2^5}$; $\frac{5}{2^5}$; $\frac{1}{2^5}$.
   Comparer ces nombres avec les résultats obtenus dans l'activité initiale (avec la touche *random*) et avec l'ordinateur.

8.2 Exercices

EXERCICE 8.1.
On lance deux dés cubiques et on note **la somme des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 lancers en expliquant votre façon de procéder.

5	9	6	6	3	8	5	2	4	4	4	2	1	2	7	1	8	9	2	9
6	6	3	6	6	8	3	0	3	7	9	2	8	3	2	9	1	9	1	0
1	2	0	1	8	7	6	9	8	2	4	0	9	1	8	4	4	8	4	0
5	8	2	2	6	4	3	1	3	3	2	5	7	3	2	9	7	6	7	1
4	3	0	4	3	6	4	8	7	5	8	0	9	6	7	1	4	1	4	5

3. Donner la suite des 25 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Norbert a procédé lui aussi à une simulation de 25 lancers, avec une autre table de nombres aléatoires, et il a obtenu les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	1	1	2	2	1	4	4	4	3	2	1

   Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.
6. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	24	49	86	103	145	178	139	114	77	55	30

   Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

EXERCICE 8.2.
On lance deux dés cubiques et on note **le plus grand des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 50 lancers en expliquant votre façon de procéder.

4	6	4	5	1	6	1	6	6	2	4	2	4	3	2	5	3	4	5	5
4	1	6	3	5	1	5	6	3	4	5	2	3	1	5	2	6	3	2	6
4	5	3	6	4	1	4	2	6	4	6	3	3	6	3	2	3	2	3	1
3	4	5	3	3	2	3	6	3	5	2	2	4	2	5	4	6	1	2	6
1	4	3	6	3	6	5	1	6	5	1	4	3	3	4	2	5	3	5	1

3. Donner la suite des 50 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	25	79	141	203	234	318

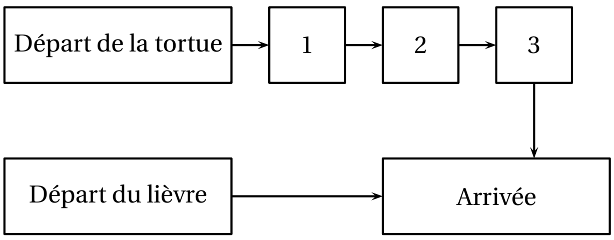
   Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

EXERCICE 8.3.
Une urne contient 10 boules : **cinq** rouges, **trois** noires et **deux** blanches. On tire une boule et on regarde sa couleur.

1. Sur un très grand nombre de tirages, quelle fréquence prévoyez-vous pour le tirage d'une boule rouge ? d'une boule noire ? d'une boule blanche ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 tirages en expliquant votre méthode.
   Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Comparer les résultats obtenus question 2. avec vos prévisions de la question 1.

4	5	8	1	1	9	0	0	2	5	0	4	4	4	3	4	8	0	4	4
1	6	0	2	8	3	1	3	4	5	1	8	7	9	8	9	8	4	6	6
6	7	4	4	7	0	3	2	4	0	9	6	1	6	2	4	4	5	0	3
2	7	7	4	4	7	9	4	6	1	5	6	3	4	9	0	2	7	9	2
0	4	5	3	9	3	9	2	3	5	3	0	8	6	5	3	4	7	2	0

EXERCICE 8.4.
Le lièvre et la tortue font la course.
Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
- si le 6 sort, le lièvre avance ;
- sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.



À l'aide de la table de nombres entiers aléatoires de 1 à 6 donnée estimez lequel de ces deux animaux a la situation la plus avantageuse et indiquez dans quelle proportion, d'après votre simulation, il va gagner.

6	3	3	1	5	2	3	6	2	4	6	2	1	5	4	1	2	1	6	4	1	6	3	2	6	3	2	1	1	5
4	3	1	2	3	2	1	3	1	3	4	3	3	4	6	3	4	1	2	4	4	6	4	2	1	5	1	5	2	4
5	1	6	1	4	6	1	3	3	2	1	4	3	3	3	2	4	5	1	3	4	4	2	3	1	4	2	1	6	6
5	4	2	6	5	1	1	1	4	1	3	5	4	5	4	2	1	4	6	6	4	1	5	1	6	2	5	4	4	2
3	5	2	4	6	1	1	4	1	2	2	5	3	2	4	1	3	3	5	4	4	1	6	3	6	3	6	3	4	3
6	1	3	2	1	1	4	4	2	1	3	4	6	3	1	3	6	2	6	4	6	1	5	6	2	3	1	6	1	2
6	5	1	6	6	3	2	2	5	3	3	5	5	1	2	1	4	4	2	1	3	5	5	5	5	5	4	2	2	2
3	6	2	4	4	3	4	3	3	5	3	6	6	3	3	2	6	1	5	6	6	2	2	1	5	5	1	4	3	2
5	3	1	5	4	6	2	1	2	2	3	4	4	6	4	4	3	5	5	6	4	4	2	5	6	5	3	6	1	1
5	2	6	2	6	6	1	1	3	6	3	1	2	4	4	5	5	3	1	3	2	5	1	6	1	3	1	6	3	2
2	4	4	5	3	5	3	1	6	1	4	4	4	2	3	3	1	3	5	1	4	4	4	6	5	3	5	2	3	1
4	6	1	1	4	1	1	1	2	4	5	3	3	1	3	2	4	2	2	6	1	4	2	5	6	4	4	1	1	1
3	2	2	5	4	2	5	2	4	3	4	1	2	2	3	5	1	6	4	3	4	1	6	2	1	2	3	1	1	5
6	2	4	2	1	5	3	3	6	4	4	1	5	2	5	2	4	3	1	5	4	2	3	5	6	1	5	4	1	3
1	2	4	6	1	1	5	6	5	2	6	2	4	3	4	1	5	2	5	4	6	5	6	3	3	1	5	2	2	3
2	2	2	2	4	6	5	3	1	3	4	4	3	5	1	1	6	5	3	3	4	5	3	6	1	4	6	3	3	5
2	3	4	5	2	6	2	4	5	5	4	5	6	2	6	4	5	4	4	6	6	1	1	1	1	5	6	1	5	1
6	4	3	5	6	2	3	2	2	4	6	4	6	3	3	3	6	6	1	5	5	2	3	5	6	1	6	1	3	2
1	2	5	5	1	5	4	6	2	5	1	1	2	3	3	1	2	1	4	2	4	2	4	4	5	2	6	1	4	6
1	6	4	3	4	2	4	5	5	5	1	6	5	1	6	1	5	2	5	3	1	1	3	1	5	3	2	2	5	4

Devoir surveillé n°6

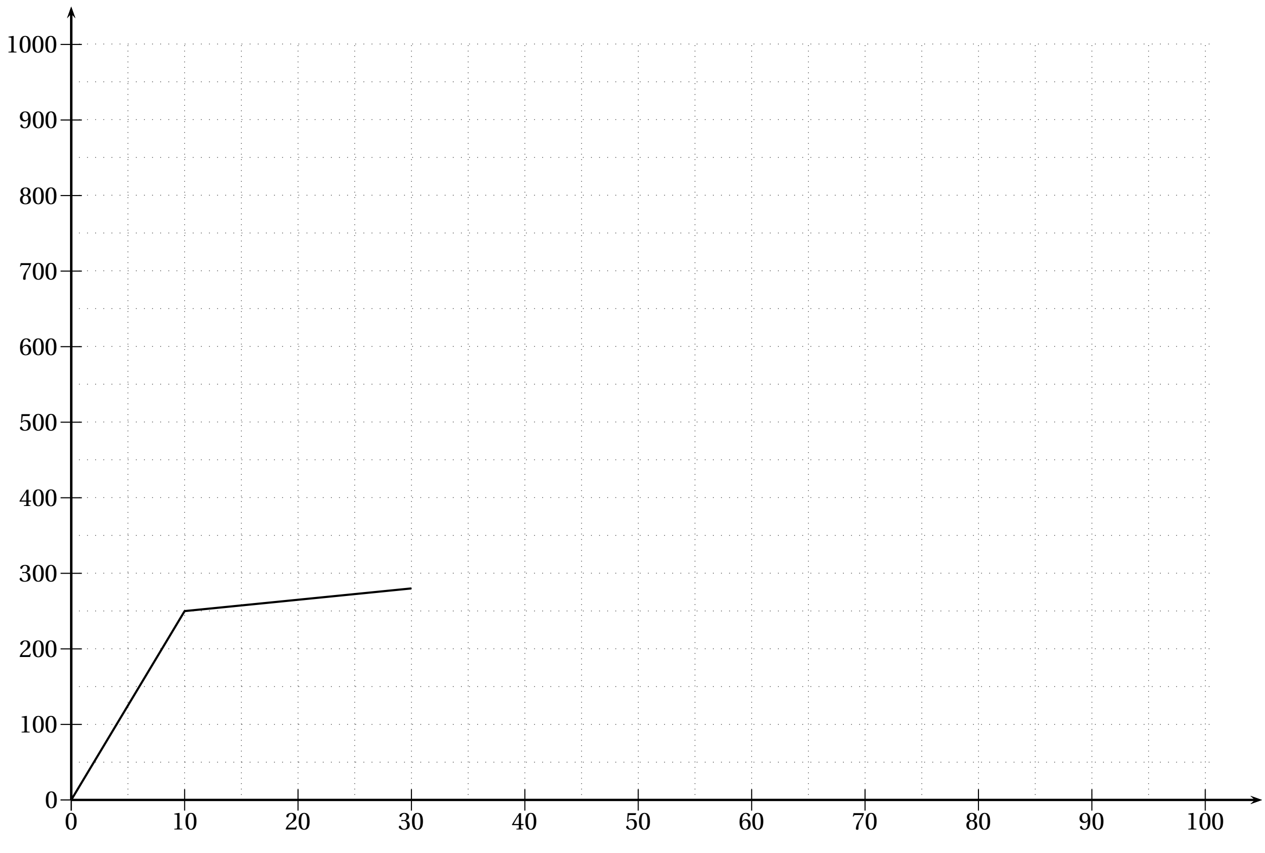
Expressions affines – Statistiques continues – Fluctuations

EXERCICE 6.1 (7,5 points)**.**
Une entreprise *leader* sur le marché du disque dur informatique teste aléatoirement la durée de vie de ses disques durs en prenant au hasard sur les chaînes de montage 1 000 disques en une semaine.
Les résultats obtenus ci-dessous indiquent le nombre de centaine d'heures d'utilisation.

Centaines d'heures	[0; 10[	[10; 30[	[30; 50[	[50; 70[	[70; 100[
Effectif	250	30	50	430	240
Effectifs cumulés					

Ainsi, 250 des disques durs testés ont fonctionné entre 0 et 10 centaines d'heures, 30 des disques durs testés ont fonctionné entre 10 et 30 centaines d'heures, etc.

1. Évaluer l'étendue de la série.
2. Évaluer la durée de vie moyenne $\overline{x}$ des disques durs produits par cette entreprise.
3. (a) Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants de cette série et le diagramme des effectifs cumulés donné ci-dessous.
   (b) Quel est le rang de la médiane m ?
   En déduire, à l'aide du diagramme, une estimation de la valeur de m.
4. Comparer les valeurs approchées de $\overline{x}$ et de m en expliquant à quoi est dû leur écart.
5. (a) L'entreprise peut-elle affirmer que 75 % de ses disques dépassent 5 000 heures de vie ?
   (b) i. Pour mettre en valeur ses produits, l'entreprise doit-elle indiquer au consommateur la moyenne ou la médiane de la série ?
   ii. Proposer alors une phrase publicitaire à l'entreprise en vous basant sur votre réponse précédente.



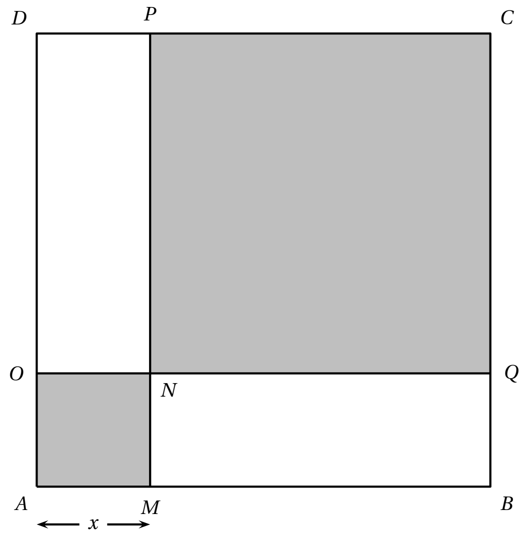
EXERCICE 6.2 (6 points).
Une urne contient 8 boules : **une** rouge, **sept** noires. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Sur un grand nombre de tirages, à quelle fréquence peut-on s'attendre à tirer une boule rouge ou une boule noire ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, décrire précisément comment simuler 50 tirages puis donner la liste des résultats de vos 50 simulations.

9	6	0	9	4	5	7	8	3	1	3	2	3	7	8	6	0	7	1	9
5	9	2	0	7	0	9	7	1	9	6	3	4	5	3	8	3	5	8	9
2	1	1	7	4	6	0	8	2	4	9	4	7	6	3	8	4	2	1	1
0	6	9	8	3	7	1	4	7	3	8	6	8	4	9	6	5	1	8	9
4	2	6	2	6	4	0	8	4	8	4	4	7	4	0	0	5	8	6	7

3. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
   Retrouve-t-on les fréquences pronostiquées à la question 1 ? Expliquer sa réponse.
4. Medhi a procédé lui aussi à une simulation de 50 tirages et à obtenu 4 rouges. Comparer votre simulation à la sienne en expliquant, s'il y a des différences, à quel phénomène elles sont dues.

EXERCICE 6.3 (6,5 points).
$ABCD$ est un carré de côté 6 cm. M est un point du segment $[AB]$. On pose $x = AM$.
On construit les carrés $AMNO$ et $NPCQ$ tels qu'indiqués sur la figure ci-contre.
On appelle $\mathscr{A}(x)$ l'aire grisée et on cherche à répondre à la question : « Pour quelles valeurs de x $\mathscr{A}(x)$ est-elle supérieure à 20 cm^2 ? ».



1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = x^2 + (6-x)^2$.
3. (a) Montrer que le problème équivaut à résoudre l'inéquation $2x^2 - 12x + 16 \geqslant 0$.
   (b) Montrer que $2x^2 - 12x + 16 = (2x-4)(x-4)$.
   (c) Étudier alors le signe de $2x^2 - 12x + 16$ selon les valeurs de x.
4. Répondre à la question posée au départ.

Chapitre 9

Fonction carrée
Fonctions trinômes

Sommaire

9.1 Activité

Activité 9.1 (Fonction trinôme)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés a, b et c pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,1 pour a et de 1 pour b et c puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

1. Donner à a la valeur 0. Qu'observe-t-on ?
   Pour toute la suite on prendra $a \neq 0$.
2. Donner à a la valeur 1 et à b et c la valeur 0.
   (a) De quelle nature est la courbe obtenue ?
   (b) Indiquer l'abscisse de son sommet et ses éléments de symétrie.
   (c) Donner l'expression de $f(x)$.
   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau des variations de f.
3. Donner à b et c la valeur 0 et faire varier a.
   (a) Quel semble être le « rôle » de a ?
   (b) Dans quel cas le tableau de variations de f est-il identique au précédent et dans quel cas est-il différent ?
4. Donner à a la valeur 1, à b la valeur 0 et faire varier c.
   (a) Quel semble être le « rôle » de c ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?
   (c) Démontrer par le calcul que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont les coordonnées ne dépendent que de c.
5. On notera x_0 l'abscisse du sommet de la courbe.
   (a) Donner à a la valeur 1, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (b) Donner à a la valeur 2, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(c) Donner à a la valeur $-0,5$, à c la valeur 0 et faire varier b.
Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(d) Faire varier c. Cela influence-t-il x_0 ?

(e) Conjecturer l'expression de x_0 en fonction de a et b.
Que peut-on dire des éléments de symétrie de la courbe dans tous les cas ?

6. Régler le curseur b pour que son incrément soit maintenant de 0,1.
On admettra qu'un projectile lancé en l'air suit une trajectoire parfaitement parabolique.
Un projectile est lancé depuis une colline depuis une altitude de 400 m symbolisée par le point $A(0;4)$. Il doit atteindre une cible située à 1 000 m à l'altitude 0, symbolisée par le point $B(10;0)$. Pour des raisons de sécurité, son altitude maximum ne doit pas dépasser 800 m.
Déterminer des valeurs de a, b et c permettant d'obtenir une courbe symbolisant la trajectoire de ce projectile et satisfaisant toutes ces conditions.

Activité 9.2 (Forme canonique)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés α, β et γ pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,5 puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = \alpha * (x-\beta)^2 + \gamma$.

1. (a) Dans la zone de saisie, créer la fonction $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
   (b) Déterminer les valeurs de α, β et γ telles que la courbe de f et celle de g soient confondues.
   (c) Vérifier par le calcul que les deux fonctions sont bien égales.
   (d) Noter l'abscisse du sommet de la courbe.
   (e) Par le calcul, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   Comment cela se traduit-il graphiquement ?
2. Mêmes questions avec $g(x) = -1,5x^2 - 6x - 4,5$.
3. Mêmes questions avec $g(x) = -0,5x^2 - 2x - 1,5$.
4. (a) Conjecturer quelles doivent être les valeurs de α et de β.
   (b) **Par le calcul**, en utilisant la conjecture précédente, déterminer les valeurs de α, β et γ pour que la fonction f soit égale à la fonction $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
   (c) Déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
   Vérifier si vos résultats coïncident avec la courbe de la fonction sur Geogebra.

9.2 Fonction carrée

Définition 9.1. On appelle *fonction carrée* la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est une *parabole* qui possède l'origine du repère comme *sommet* et l'axe des ordonnées comme *axe de symétrie.*

Propriété 9.1. *La fonction carrée est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty;0]$ *et strictement croissante pour* $x \in [0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Preuve. La preuve sera faite en classe. ◊

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 9.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $a^2 > b^2$.

9.3 Fonctions trinômes

Définition 9.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction trinôme.*

Sa courbe est une parabole admettant le point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ comme sommet et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce sommet comme axe de symétrie.

Propriété 9.3. *Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\beta)^2+\gamma$ où $\beta = -\frac{b}{2a}$. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On l'admettra.

Propriété 9.4. *Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Preuve. La preuve sera faite en classe. ♢

9.4 Exercices

9.4.1 Fonction carrée

EXERCICE 9.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour x^2 :

1. Si $x > 3$ alors
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ....
3. Si $x > 2$ alors ....
4. Si $x < -3$ alors ....
5. Si $x < 4$ alors ....
6. Si $x > -10$ alors ....
7. Si $x < 1$ alors ....
8. Si $x > -5$ alors ....

EXERCICE 9.2.
1. On pose : $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$.
   Compléter :
   (a) Si $-7 \leqslant x \leqslant 0$ alors ....x^2 ....
   (b) Si $0 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors ....x^2 ....
   (c) Donc si $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors ......$\leqslant x^2 \leqslant$ ......
2. Compléter de la même manière :
   (a) Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (b) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (c) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....

EXERCICE 9.3.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

EXERCICE 9.4.
L'énoncé « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est appelé **une implication**. On dit aussi « $x \geqslant 2$ implique $x^2 \geqslant 4$ » ou bien « $x \geqslant 2$ donc $x^2 \geqslant 4$ ». On note « $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$ ».

1. L'implication proposée est-elle vraie ? Justifier.
2. Parmi les implications suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
   (a) $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$
   (b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
   (c) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$
   (d) $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$
   (e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

3. Traduisez par une implication les propositions suivantes :
   (a) Un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à son carré.
   (b) Si le nombre x est tel que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $1 - x^2$ est positif.
   (c) Un nombre supérieur à 1 a un carré supérieur à 1.

EXERCICE 9.5.
Les nombres a et b sont positifs.
L'énoncé « $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$ » signifie que $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ et que $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$. On dit aussi « $a < b$ si et seulement si $a^2 < b^2$.
On note $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
Parmi les équivalences suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
2. Pour tous réels négatifs a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
3. Pour tous réels a et b, $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
4. $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

9.4.2 Fonctions trinômes

EXERCICE 9.6.
On donne :
- $f(x) = 5 - (x+1)^2$;
- $g(x) = (x-1)(2+3x)$;
- $h(x) = (x-1)(2x+1) - (x+1)$.

1. Montrer que les 3 fonctions sont des fonctions trinômes.
2. Dresser leurs tableaux de variation.
3. Indiquer les éléments de symétrie de leurs courbes représentatives.

EXERCICE 9.7.
On donne $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Dresser son tableau de variation en y faisant apparaître les solutions précédentes.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 9.8.
On donne $f(x) = x^2 + 2x - 15$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)(x+5)$.
2. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 9$.

EXERCICE 9.9.
On donne $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x - 6$ pour tout x.

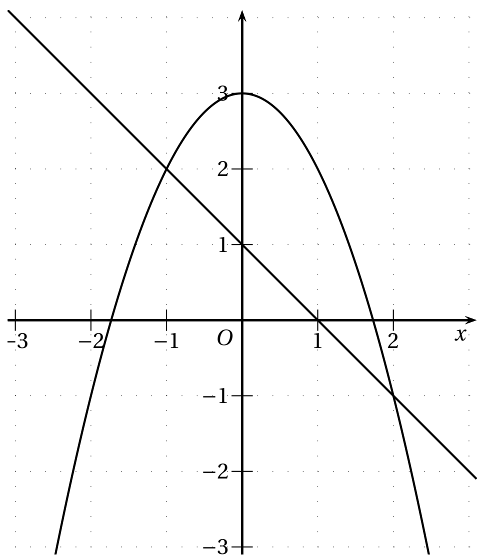
1. Montrer que $f(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
2. Montrer que $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 4$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 9.10.
On donne $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant \frac{11}{8}$.

EXERCICE 9.11.
Sur le graphique ci-dessous sont tracées une droite $\mathscr{D}$ et une parabole $\mathscr{P}$. Cette dernière représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$.

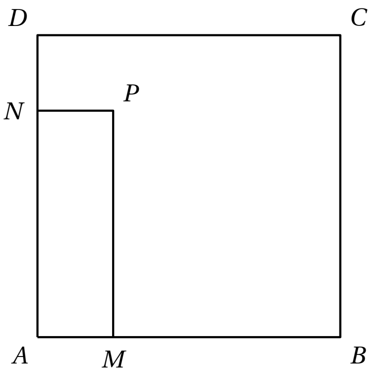
1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire, graphiquement, le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. (a) Déterminer la fonction affine g représentée par $\mathscr{D}$.
   (b) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. On désire retrouver par le calcul le résultat précédent.
   (a) Prouver que $f(x) > g(x)$ équivaut à $-x^2 + x + 2 > 0$.
   (b) Vérifier que $(x+1)(2-x) = -x^2 + x + 2$.
   (c) Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.



9.4.3 Problèmes

Problème 9.1.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$. P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.
On cherche à trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.
On note $AM = x$ et on appelle $f(x)$ la fonction qui donne l'aire du rectangle $AMPN$ en fonction de x.

1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. En déduire la réponse au problème.



Problème 9.2 (La méthode d'Al-Khawarizmi)**.**
Pour déterminer une solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 96$, voici comment procédait Al-Khawarizmi (mathématicien arabe du IXè [1]) :

Diviser 10 par 2. Élever ce quotient au carré. Additionner ce carré à 96. Prendre la racine carrée de cette somme. Retrancher à ce résultat le quotient du début.

1. (a) Prouver que l'équation $x^2 + 10x = 96$ équivaut à $(x+5)^2 = 121$.
   (b) En déduire que cet algorithme donne bien une solution positive de cette équation.
2. Trouver en utilisant la même méthode une solution positive de l'équation $x^2 + 8x = 2009$.
3. En admettant que ce procédé donne la seule solution positive pour des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont deux nombres positifs, écrire un algorithme qui mette en œuvre cette méthode.

Problème 9.3.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm.
I est le milieu du segment $[BC]$ et M un point variable du segment $[AB]$.
On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N de $[BC]$ et P de $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.
Le but du problème est de comparer les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle ABI.

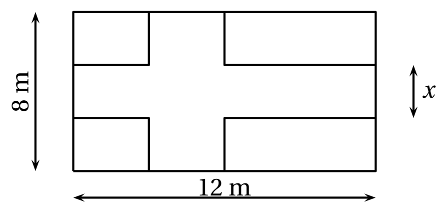
1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Faire afficher la longueur AM, puis les aires du rectangle et du triangle.
2. Déplacer M.
   Quelle semble être l'aire la plus grande ? Pour quelle position de M les deux aires semblent-elles égales ?
3. Prouver la conjecture précédente.

Problème 9.4.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Dans un repère orthonormal, on donne le point $A(0; 1)$ et un point $M(m; 0)$, libre sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe l'axe (Oy) en N.
P est le point tel que $OMPN$ est un rectangle.
Le but de l'exercice est de chercher sur quelle ligne se trouve P lorsque M décrit l'axe des abscisses.

1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Activer le mode trace pour le point P (propriétés) et déplacer le point M.
   (c) Conjecturer la nature de la coubre décrite par P.
2. (a) Prouver que $\widehat{OMA} = \widehat{ONM}$.
   (b) Calculer $\tan\widehat{OMA}$ et $\tan\widehat{ONM}$ et en déduire que $ON = m^2$.
   (c) Donner les expressions, en fonction de m, des coordonnées de P et en déduire que P est un point de la parabole qu'équation $y = x^2$.

Problème 9.5.
Un jardinier dispose d'un terrain rectangulaire de 12 m sur 8 m. Il désire le partager en quatre parcelles bordées par deux allées perpendiculaires de même largeur x. Il estime que l'aire des deux allées doit représenter $\frac{1}{6}$ de la superficie de son terrain.
Le but de ce problème est de déterminer la largeur x des allées.

1. Exprimer en fonction de x l'aire des deux allées.
2. (a) Prouver que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 20x + 16 = 0$.
   (b) Vérifier que $x^2 - 20x + 16 = (x-10)^2 - 84$.
   (c) En déduire x.



1. Il est à l'origine du mot « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé : "algoritmi")

Problème 9.6.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) Déterminer l'expression de $B(q)$.
   (b) Montrer que $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
3. Déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable.
4. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

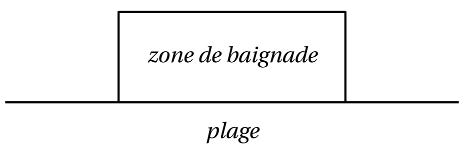
Problème 9.7.
Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.
Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Commenter.
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimer en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifier que $r(x) = -x^2 + 40x + 2100$.
   (c) En déduire la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

Problème 9.8.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10 000 abonnés qui paient, chacun, 50 € par an. Une étude a montré que chaque fois qu'on augmente d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une diminution de 100 abonnés et chaque fois qu'on baisse d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une augmentation de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonnement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

Problème 9.9.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Devoir surveillé n°7

Fonction carrée – Fonctions trinômes

EXERCICE 7.1 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, recopier le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Si $x > -5$ alors

   (a) $x^2 > 25$ (b) $x^2 < 25$ (c) on ne peut pas comparer x^2 et 25

2. Si $x < 4$ alors

   (a) $x^2 > 16$ (b) $x^2 < 16$ (c) on ne peut pas comparer x^2 et 16

3. Si $x < -3$ alors

   (a) $x^2 > 9$ (b) $x^2 < 9$ (c) on ne peut pas comparer x^2 et 9

4. Si $x > 2$ alors

   (a) $x^2 > 4$ (b) $x^2 < 4$ (c) on ne peut pas comparer x^2 et 4

EXERCICE 7.2 (6 points)**.**
Compléter, sur l'énoncé, le tableau suivant (aucune justification n'est attendue) :

Forme développée	Forme canonique	Forme factorisée
x^2+6x-1		
	$(x-1)^2-4$	
		$2(x+1)(x-2)$

EXERCICE 7.3 (5 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 12$.

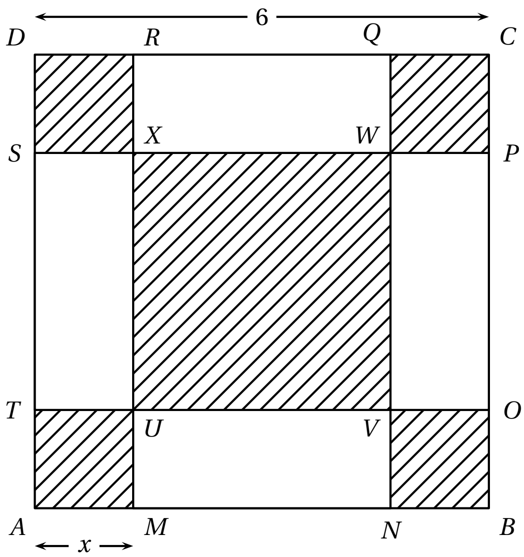
1. Montrer que $f(x) = (x-2)^2 - 16$ pour tout x.
2. Montrer que $f(x) = (x-6)(x+2)$ pour tout x.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation : $f(x) \leqslant 0$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}'$ des solutions de l'équation : $f(x) = 9$.

Tourner la page

Exercice 7.4 (5 points)**.**
Soit $ABCD$ un carré de côté de mesure 6 cm et M un point de $[AB]$. Si cela est possible, on construit à l'intérieur du carré $ABCD$, quatre carrés de mêmes dimensions $AMUT$, $NBOV$, $PWQC$ et $SXRD$ ainsi qu'un cinquième carré $UVWX$ tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous (ce sont les carrés hachurés).

On note $x = AM$ et $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine hachuré.

1. Quel est l'ensemble I des valeurs possibles de x ?
2. Montrer que $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 24x + 36$.
3. Déterminer si $\mathscr{A}(x)$ admet un extremum et, si c'est le cas, déterminer sa nature, sa valeur et la valeur de x pour laquelle cet extremum est atteint.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer les valeurs exactes de x pour lesquelles l'aire hachurée est égale à 24 cm^2.



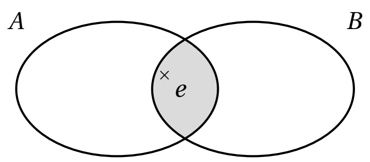
Chapitre 10

Probabilités
Intervalle de fluctuation

Sommaire

10.1 Vocabulaire des ensembles

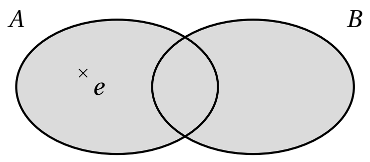
Définition 10.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

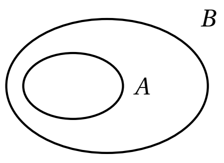
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 10.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 10.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

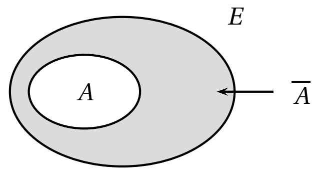
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

Définition 10.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 10.5 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de* E. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple. Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

10.2 Expériences aléatoires

10.2.1 Issues, univers

Définition 10.6. Une expérience est dite *aléatoire* lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.
L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples.
- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P ; I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie, l'une après l'autre : $\Omega = \{P_1 \cap P_2 ; P_1 \cap F_2 ; F_1 \cap P_2 ; F_1 \cap F_2\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant ce que l'on observe, comme le montrent les deux premiers exemples ci-dessus.

10.2.2 Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'univers des possible est $\Omega = \{2 ; 3 ; \cdots ; 11 ; 12\}$.
Le tableau 10.1 page ci-contre définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité) :

10.3 Loi de probabilité sur un univers Ω

10.3.1 Cas général

Définition 10.7. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0 ; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum\limits_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Décrire la loi de probabilité revient à indiquer, pour chaque événement élémentaire, sa probabilité. On la présente généralement sous forme de tableau.

TABLE 10.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (partie de Ω ne contenant qu'un seul élément)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues (partie de Ω)	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire (partie vide de Ω)	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement (partie de Ω égale à Ω)	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements (intersection de deux parties de Ω)	$A \cap B = \{6;12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements (réunion de deux parties de Ω)	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun (parties disjointes de Ω, c'est-à-dire dont l'intersection est vide)	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (parties de Ω disjointes dont la réunion est égale à Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemple. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'évènement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 10.1. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

10.3.2 Cas particulier : l'équiprobabilité

Définition 10.8. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 10.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout évènement élémentaire ω et tout évènement A on a :*

- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque évènement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

10.4 Loi des grands nombres et intervalle de fluctuation

10.4.1 Un exemple

Dans la classe de Seconde 14 pour l'année scolaire 2010–2011, il y avait 9 garçons et 28 filles, ce qui paraît disproportionné.
On peut se demander toutefois si, lorsqu'on choisit 37 élèves au hasard dans une population constituée d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons, cette distribution est rare.

1. Quelle était la fréquence des filles dans la classe de Seconde 14 ?
2. Expliquer comment simuler le choix de 37 élèves au hasard dans une population d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons à l'aide de la fonction *random* de la calculatrice.
3. Procéder à cette simulation en notant le nombre de filles et de garçons obtenus et calculer la fréquence des filles dans votre simulation (arrondie au centième).
4. Écrire cette fréquence au tableau et noter les résultats des simulations de la classe dans le tableau ci-dessous :

5. Déterminer, pour cette série statistique :
   (a) les valeurs extrêmes, les premier et troisième quartiles, les premier et neuvième déciles, la médiane et la moyenne ;
   (b) représenter le diagramme en boite correspondant ;
   (c) déterminer l'intervalle interquartile et interpréter le résultat ;
6. D'après ces résultats, peut-il arriver que le hasard produise une distribution comparable à celle de la Seconde 14 ? Si oui, est-ce fréquent ?

10.4.2 Loi des grands nombres et intervalle de fluctuation

Nous avons vu dans le chapitre 8 que, lorsque qu'on répète une expérience aléatoire un grand nombre de fois, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser.
Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* :

Théorème 10.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Nous l'admettrons.
Les mathématiciens ont obtenu des règles assez précises sur la façon dont les fréquences se rapprochent de la probabilité et une première approximation de ces règles, la seule au programme de la Seconde, est la suivante, qu'on admettra :

Propriété (Intervalle de fluctuation en statistiques)**.** *Dans une population, la proportion d'un caractère est p.*
On produit un échantillon de taille n de cette population et on détermine la fréquence f du caractère dans cet échantillon.
Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, que l'on appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

On peut aussi reformuler la propriété en termes de probabilités :

Propriété 10.4 (Intervalle de fluctuation en probabilité)**.** *Soit une expérience aléatoire où la probabilité d'un évènement A est p. On reproduit cette expérience n fois et on détermine la fréquence f d'apparition de l'évènement A.*
Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, que l'on appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

Remarque. On remarquera que plus n est grand et plus l'intervalle de fluctuation est petit. En effet :
- avec $n = 25$, l'intervalle de fluctuation est de la forme $[p - 0,2\,;\, p + 0,2]$ (soit $p \pm 20\%$)
- avec $n = 100$, l'intervalle de fluctuation est de la forme $[p - 0,1\,;\, p + 0,1]$ (soit $p \pm 10\%$)
- avec $n = 400$, l'intervalle de fluctuation est de la forme $[p - 0,05\,;\, p + 0,05]$ (soit $p \pm 5\%$)
- avec $n = 10000$, l'intervalle de fluctuation est de la forme $[p - 0,01\,;\, p + 0,01]$ (soit $p \pm 1\%$)
- etc.

Cela est cohérent avec la loi de grands nombres : plus n est grand et plus la fréquence d'un évènement tend vers la probabilité de cet événement.

10.4.3 Retour à notre exemple d'introduction

Essayons de répondre à la question suivante :
« Dans le cas de la classe de Seconde 14, peut-on avancer, au risque de 5 % de se tromper, que l'échantillon (la classe) est représentatif d'une population (le lycée) comportant une moitié de filles et d'une moitié de garçons ?
Et si ce n'est pas le cas, quelles peuvent être les raisons ? »

1. (a) Dans notre population de référence, quelle est la valeur de p qu'on a supposée ?
   (b) Quelle est la valeur de n ?
   (c) Déterminer alors l'intervalle de fluctuation correspondant à cette expérience.
   (d) Quel pourcentage des fréquences obtenues par les simulations de la classe appartient à cet intervalle ?
   (e) Répondre à la question.
2. Et si notre supposition, pour p, était fausse ?
   À l'administration du lycée, on pouvait obtenir l'information suivante : « Au Lycée Dupuy de Lôme, pour l'année scolaire 2010–2011, il y a en Seconde 524 élèves, dont 329 filles et 195 garçons ».
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation (toujours pour un échantillon de taille 37).
   (b) La fréquence des filles de la Seconde 14 appartient-elle à cet intervalle ? Qu'en conclure ?

10.5 Exercices

10.5.1 Probabilités

EXERCICE 10.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les évènements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des évènements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup C$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cup B$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cup C$;
   - $\overline{A} \cap C$;

EXERCICE 10.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les évènements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?

   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?

   (c) Traduire par une phrase les évènements $A \cap P$ et $A \cup P$.

   (d) Déterminer $\text{Card}(A \cap P)$ et $\text{Card}(A \cup P)$.

EXERCICE 10.3.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des évènements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

EXERCICE 10.4.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :

   (a) les trois feux verts ?

   (b) deux des trois feux verts ?

EXERCICE 10.5.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 10.6.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des évènements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

EXERCICE 10.7.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

10.5.2 Intervalle de fluctuation

EXERCICE 10.8.
Une urne contient 10 boules : **cinq** rouges, **trois** noires et **deux** blanches. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 tirages en expliquant votre méthode.

1	4	3	2	8	5	6	9	2	6	4	5	0	3	5	4	8	8	7	4
0	3	1	2	6	3	3	9	5	7	1	9	3	7	5	4	5	9	9	6
7	7	2	9	3	2	8	1	2	8	7	3	0	1	2	9	2	6	3	8
1	4	7	4	3	6	1	8	4	9	0	6	8	4	5	6	2	8	4	4
0	7	1	2	9	3	2	8	7	4	3	3	4	5	3	2	7	4	3	8

2. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 25.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 10.9.
D'après le site de l'IREM de Paris 13.
L'ensemble des faits évoqués ci-dessous est réel.
En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, RODRIGO PARTIDA était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1 % de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant à la proportion d'origine mexicaine pour un échantillon de taille 870.
2. La fréquence des personnes d'origine mexicaine dans les personnes convoquées est-elle dans cet intervalle ?
3. Qu'en conclure ?

EXERCICE 10.10.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. À Dupuy de Lôme, pour la session 2009 du baccaulauréat général, il y a eu 290 reçus pour 320 candidats se présentant à l'épreuve. Les fréquences des reçus en Série L, ES et S étaient, respectivement, 0,766, 0,896 et 0,963.
   Déterminer si les différences de réussite entre les filières peuvent être dues aux fluctuations d'échantillonage.
2. Dans le village chinois de Xicun en 2000, il est né 20 enfants dont 16 garçons. On suppose que la proportion de garçons et de filles est la même à la naissance dans toute l'espèce humaine.
   Déterminer si la fréquence des naissances de garçons dans le village de Xicun en 2009 peut être due aux fluctuations d'échantillonage.
3. Avez-vous vérifié que toutes les conditions étaient remplies pour appliquer les intervalles de fluctuation dans les deux questions précédentes ?

EXERCICE 10.11.
Au premier tour de l'élection présidentielle française de mai 2007, parmi les suffrages exprimés, les proportions, en pourcentage, pour les candidats ayant obtenu pour de 2 % des suffrages, étaient les suivantes :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
18,57	4,08	2,23	10,44	25,87	31,18

Cinq mois plus tôt, le 13 décembre 2006, l'institut de sondage BVA faisait paraître un sondage effectué sur un échantillon de 797 personnes dont voici les résultats, en pourcentage, concernant les candidats précédemment cités :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
7	4	2	10	34	32

1. Pour quels candidats peut-on appliquer les intervalles de fluctuation parmi ceux présents au premier tour ?
2. Pour ces candidats déterminer les intervalles de fluctuation pour un échantillon de taille 797.
3. Les résultats du sondage donnent-ils des fréquences appartenant à ces intervalles ?
4. Qu'en conclure ?

EXERCICE 10.12.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère que la proportion de femmes dans la population française est $\frac{1}{2}$. À l'assemblée nationale, il y a 577 députés, dont 108 femmes.
   Peut-on considérer que cette répartition est un effet de la fluctuation d'échantillonage ou bien dire que la parité des sexes n'est pas respectée à l'assemblée nationale ?
2. En 1990, les employés et ouvriers constituaient 58,7 % de la population française (d'après le recensement de l'INSEE). Suite à l'élection législative de 1993 on recensait 1,6 % de députés dont l'ancien métier était employé ou ouvrier.
   Peut-on considérer que cette répartition est un effet de la fluctuation d'échantillonage ?

EXERCICE 10.13.
Dans une région où il y a autant de femmes que d'hommes, les entreprises sont tenues de respecter la parité.
L'entreprise A a un effectif de 100 personnes dont 43 femmes. L'entreprise B a un effectif de 2 500 personnes dont 1 150 femmes.

1. Calculer le pourcentage de femmes dans ces deux entreprises. Qu'en conclure ?
2. Si respecter la parité revient à ne pas tenir compte du caractère homme-femme, on peut alors considérer l'ensemble des salariés d'une entreprise comme un échantillon prélevé au hasard dans la population de la région.
   (a) Déterminer les intervalles de fluctuation relatifs aux deux échantillons.
   (b) Les résultats confirment-ils la conclusion de la première question ?

EXERCICE 10.14.
Les résultats seront donnés au centième.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

1. On s'intéresse d'abord à la proportion de garçons et de filles dans l'établissement.
   (a) Déterminer les proportions de garçons et de filles dans le lycée cette année là.
   Peut-on utiliser les intervalles de fluctuations dans le cas des filles et des garçons ?
   (b) Déterminer les intervalles de fluctuations pour des échantillons de tailles respectives 119, 168 et 63.
   (c) Calculer les fréquences de garçons et de filles dans chacune des trois filières.
   (d) Dans quelles filières peut-on dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des filles et des garçons peut être due aux fluctuations d'échantillonage ?
2. En vous inspirant de la question précédente, déterminer pour chaque sexe si l'on peut dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des ES, S et L peut être due aux fluctuations d'échantillonage.

Chapitre 11

Incidence et parallélisme dans l'espace

Sommaire

11.1 Positions relatives de droites et de plans

11.1.1 Règles d'incidence

Règle 11.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée (AB).*

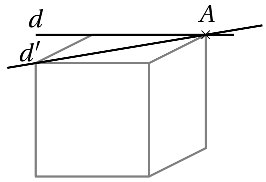
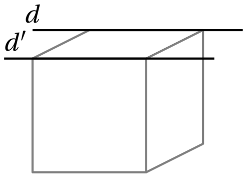
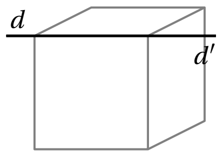
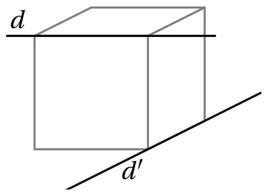
Règle 11.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté (ABC).*

Règle 11.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathscr{P}$.*

Règle 11.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (*Pythagore*, *Thalès*, etc.).*

11.1.2 Positions relatives de deux droites

Règle 11.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

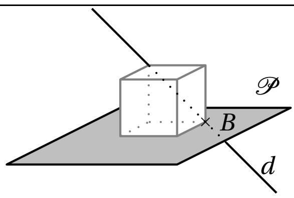
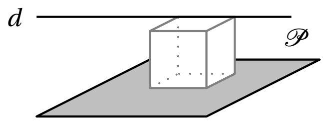
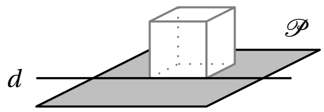
Coplanaires (dans un même plan)			Non coplanaires
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersection A. $d \cap d' = \{A\}$	d et d' sont strictement parallèles. $d \cap d' = \varnothing$	d et d' sont confondues $d \cap d' = d = d'$	Aucun plan ne contient à la fois d et d'. $d \cap d' = \varnothing$

Remarques. • Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.

- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  - par la donnée de trois points ;
  - par la donné de deux droites sécantes ;
  - par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
  - par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

11.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

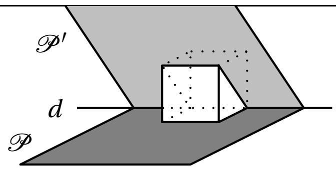
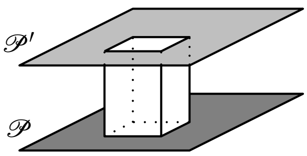
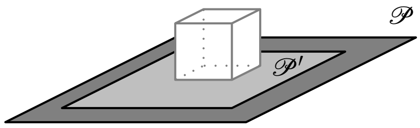
Règle 11.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	Parallèles	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B. $d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	d est contenue dans $\mathscr{P}$ $d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

11.1.4 Positions relatives de deux plans

Règle 11.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	Parallèles	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques. • Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.

- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenue dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

11.2 Parallélisme dans l'espace

11.2.1 Parallélisme entre droites

Propriété 11.1. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

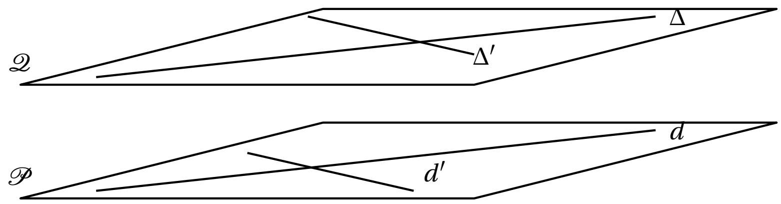
Propriété 11.2. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

11.2.2 Parallélisme entre plans

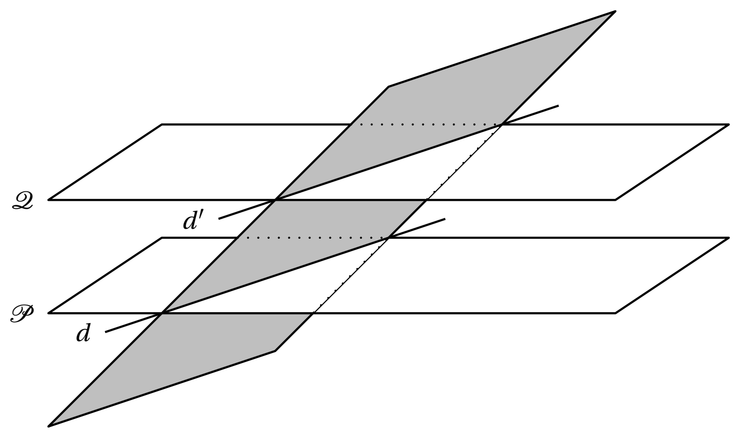
Propriété 11.3. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 11.4. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



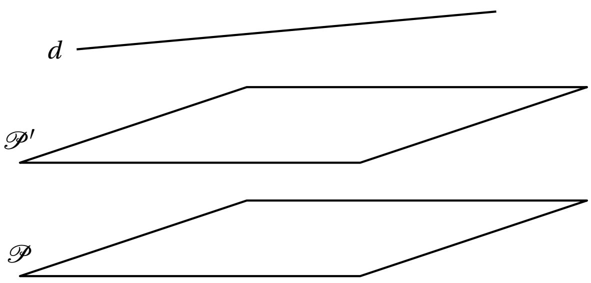
Propriété 11.5. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersection d et d' sont parallèles.*



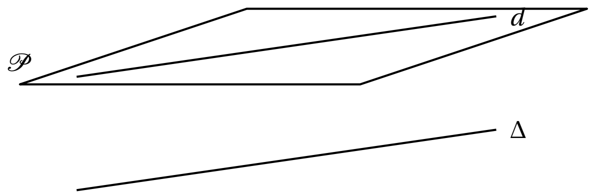
11.2.3 Parallélisme entre droite et plan

Propriété 11.6. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

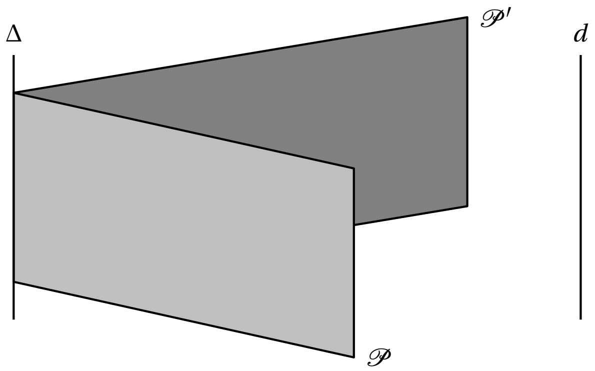
$$\text{Si } d \parallel \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ alors } d \parallel \mathscr{P}'$$



Propriété 11.7. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*

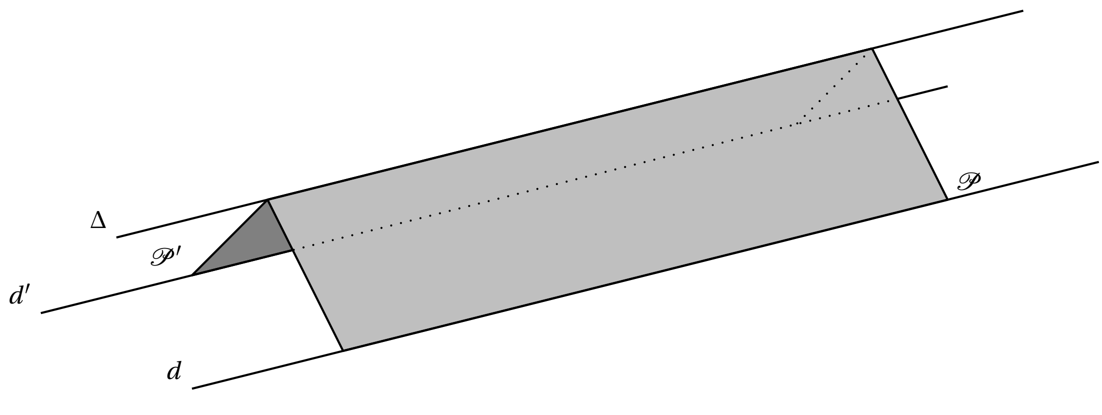


Propriété 11.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 11.9 (Théorème du toit)**.** *Si :*
- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

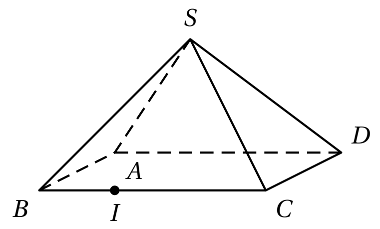
alors Δ est parallèle à d et à d'.



11.3 Exercices

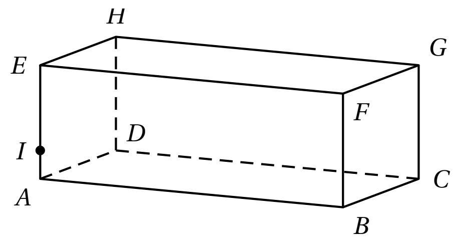
11.3.1 Incidence

EXERCICE 11.1.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est un point du segment $[BC]$, distinct de B et C.



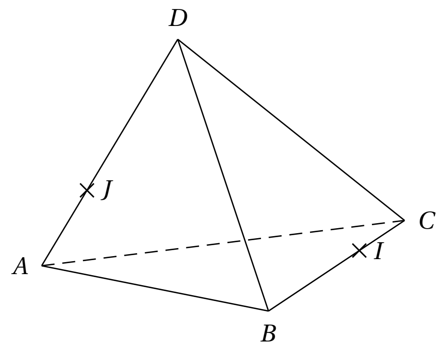
1. Montrer que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construire leur intersection.

EXERCICE 11.2.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I est un point de $[AE]$ distinct de A et de E.



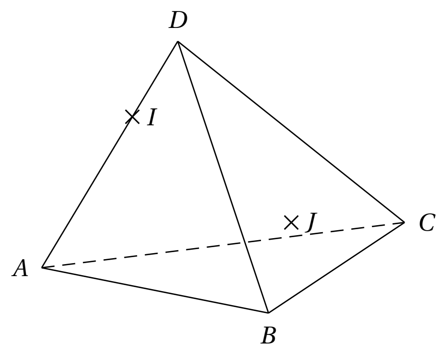
1. Démontrer que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontrer que la droite (GI) n'est pas contenue dans le plan $(ABCD)$.
3. Construire J, intersection de la droite (GI) et du plan $(ABCD)$.

EXERCICE 11.3.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ distinct de B et de C. J est un point de $[AD]$ distinct de A et de D.
Dans les cas suivants, démontrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersection.

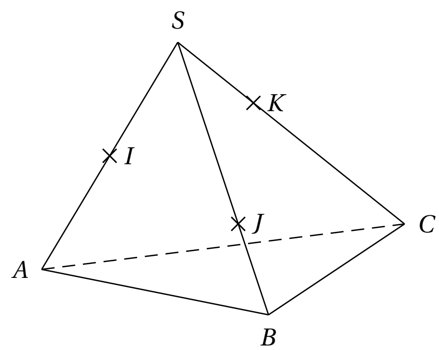


1. (DIJ) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

EXERCICE 11.4.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[DA]$ distinct de D et de A. J est un point de la face BCD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
Indication : on pourra commencer par construire l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).



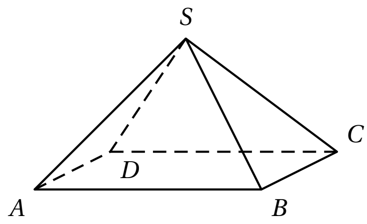
EXERCICE 11.5.
$SABC$ est un tétraèdre. I, J et K sont des points de, respectivement, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.



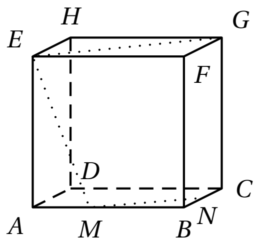
1. Construire E, intersection de (BC) et (JK), F, intersection de (AC) et (IK), G, intersection de (AB) et (IJ).
2. Démontrer que F est un point commun aux plans (ABC) et (IJK).
3. Prouver que les points E, F et G sont alignés.

11.3.2 Parallélisme

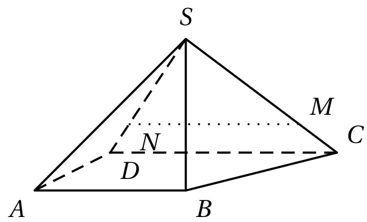
EXERCICE 11.6.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est le milieu de $[AS]$ et L est le milieu de $[BS]$.
Démontrer que les droites (IL) et (CD) sont parallèles.



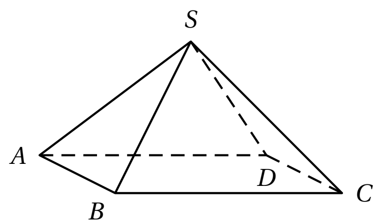
EXERCICE 11.7.
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$. Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (EG) sont parallèles.



EXERCICE 11.8.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec $(AB) \parallel (CD)$. M est un point de l'arête $[SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

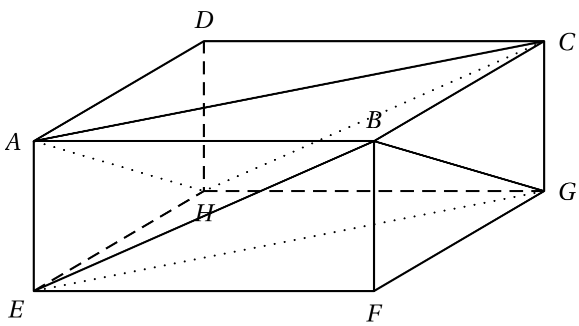


EXERCICE 11.9.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
Démontrer que les plans (SAB) et (SDC) se coupent selon la parallèle à (AB) passant par S.

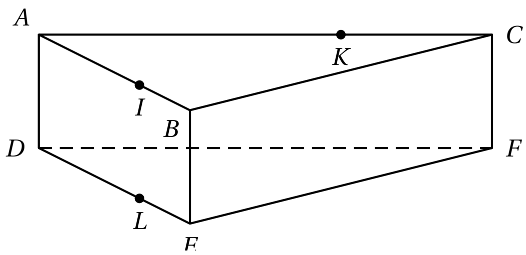


EXERCICE 11.10.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

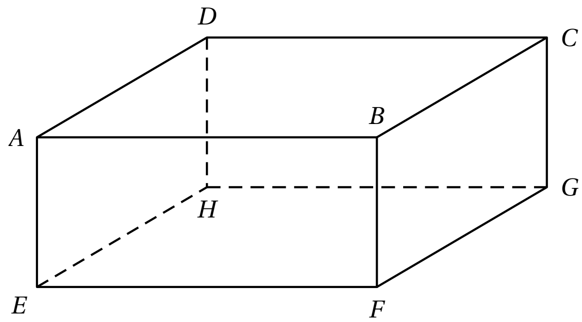
1. Le quadrilatère $BEHC$ est un rectangle. Que peut-on en déduire pour les droites (EB) et (HC) ?
2. De façon analogue, que peut-on dire des droites (AH) et (BG) ?
3. En déduire alors la position relative des plans (ACH) et (EBG) ?



EXERCICE 11.11.
$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I, L et K sont les points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ tels que : $AI = \frac{2}{3}AB$; $AK = \frac{2}{3}AC$ et $EL = \frac{1}{3}ED$.
Démontrer que le plan (IKL) est parallèle au plan (BCF).



EXERCICE 11.12.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Démontrer que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH).

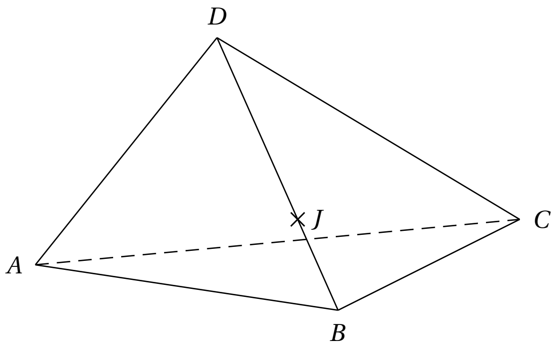


11.3.3 Sections

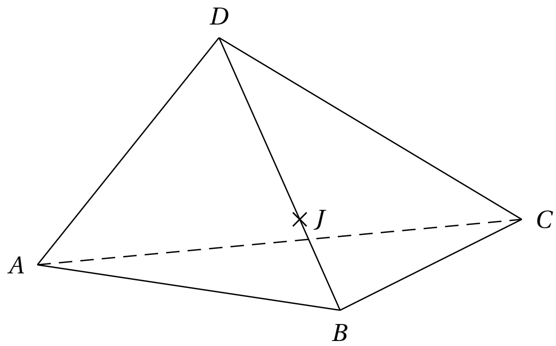
EXERCICE 11.13 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 11.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 11.1: Sections de l'exercice 11.13

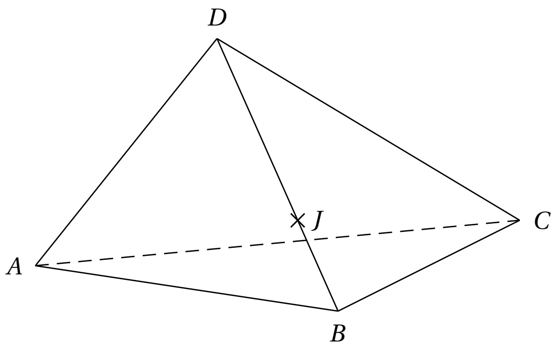
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



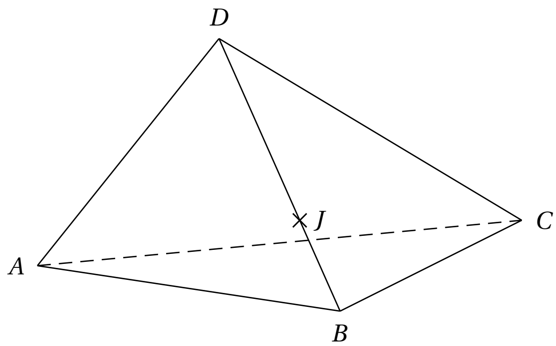
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



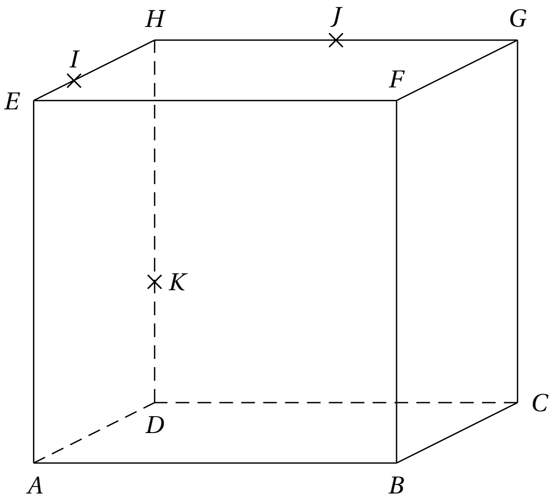
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



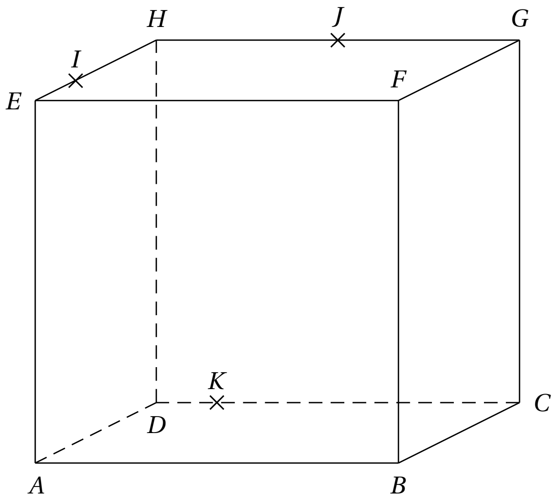
EXERCICE 11.14 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 11.2 de la présente page, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

FIGURE 11.2: Sections de l'exercice 11.14

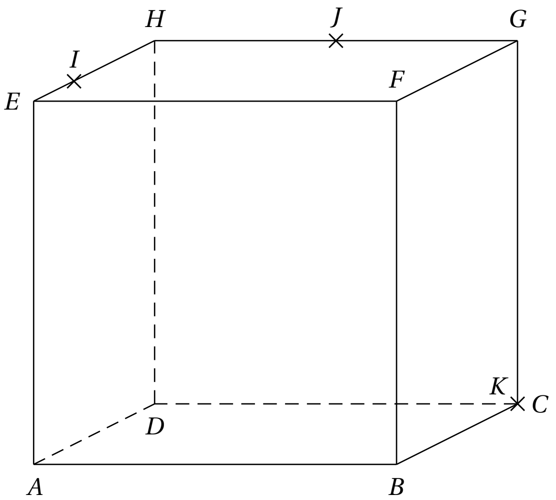
$DK = 2$ cm



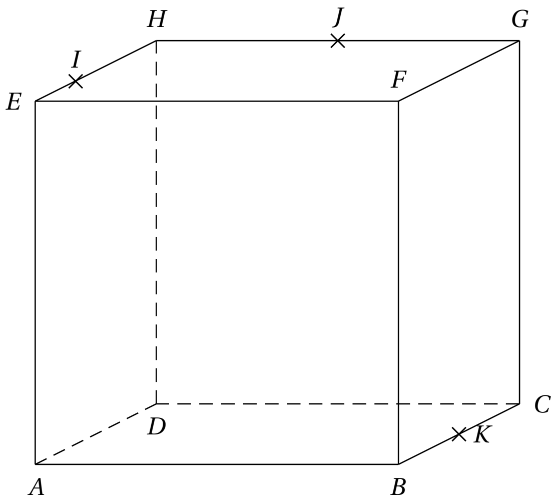
$KD = 1$ cm



$K = C$



K milieu de $[BC]$



Devoir surveillé n°8

Probabilités – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 8.1 (3 points).
Dans une classe de 32 élèves, 12 élèves suivent l'option *arts-plastiques*, 5 élèves suivent l'option *escalade* et 3 élèves suivent les deux options. On choisit un élève au hasard dans la classe et on définit les événements suivants :
- A : « l'élève suit l'option *arts-plastiques* »
- E : « l'élève suit l'option *escalade* »

1. Déterminer la probabilité des événements A et E.
2. Définir par une phrase l'événement $A \cap E$ et déterminer sa probabilité.
3. Définir par une phrase l'événement $A \cup E$ et déterminer sa probabilité.

EXERCICE 8.2 (3 points).
On s'intéresse au lancer d'un dé équilibré à six faces et plus particulièrement à la parité du numéro obtenu. On définit ainsi les événements suivants :
- P : « le numéro obtenu à ce lancer est pair »
- I : « le numéro obtenu à ce lancer est impair »

1. Déterminer les probabilités de P et de I.
2. Pour la suite, on lance tois fois de suite ce même dé, toujours en s'intéressant uniquement à la parité des numéros obtenus.
   (a) Construire l'arbre des possibles et décrire, sous forme d'ensemble, Ω, l'univers des possibles.
   Préciser si l'on est en situation d'équiprobabilité.
   (b) Déterminer les probabilités des événements suivants :
   - A : « sur les trois lancers on a obtenu que des numéros pairs »
   - B : « sur les trois lancers on a obtenu que des numéros avec la même parité »
   - C : « sur les trois lancers on a obtenu au moins un numéro pair »

EXERCICE 8.3 (5 points).
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On suppose que, dans la population française, il y a le même nombre de femme que d'homme.
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant à la proportion de femmes dans la population française pour un échantillon de taille 350.
   (b) Déterminer la fréquence des femmes en Premières générales à Dupuy de Lôme pour l'année scolaire 2004-2005.
   (c) Peut-on dire alors que les Premières générales étaient représentatives de la population française ?
2. (a) Quelle était la proportion d'hommes à Dupuy en Premières générales à Dupuy en 2004-2005 ?
   (b) Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant à cette proportion pour un échantillon de taille 119.
   (c) Peut-on dire alors que les 1ES étaient représentatifs des élèves de Dupuy de Lôme cette année là ?

EXERCICE 8.4 (3 points).
On donne sur la figure 8.1 page 107 un cube $ABCDEFGH$ vu en perspective cavalière.
Le point I est tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.
Les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[GH]$ et $[BC]$.
Construire sur cette figure la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$, c'est-à-dire l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces.
Aucune justification n'est demandée mais on laissera les traits de construction et on indiquera les parallélismes utilisés, le cas échéant.

EXERCICE 8.5 (6 points).
Une situation de l'espace est représentée en perspective cavalière par la figure 8.2 page ci-contre.
$SABCD$ est une pyramide à base rectangulaire.
I, J et M sont les milieux respectifs des segments $[SA]$, $[SB]$ et $[SD]$.
L est un point du plan (ABC).
K est un point de l'espace.
N est un point de la face SCB.

Partie A.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer sur l'énoncé, *sans justifier*, si la phrase est **VRAIE**, **FAUSSE** ou si **ON NE PEUT SAVOIR**. Chaque indication juste rapporte 0,25 point.

1. Le point K appartient à l'arête $[SC]$. ....
2. Le point I appartient au plan (SAB). ....
3. Les points L, I et J sont alignés. ....
4. Les points I, J, K et B sont coplanaires. ....
5. Les points A, D, C et L sont coplanaires. ....
6. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles. ....
7. Les droites (JK) et (BC) sont parallèles. ....
8. Les droites (SB) et (DC) sont sécantes. ....
9. Les droites (BK) et (DC) sont sécantes. ....
10. Les droites (BL) et (DC) sont sécantes. ....
11. Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires. ....
12. Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires. ....

Partie B.

1. Montrer que S appartient aux plans (AIJ) et (SDC).
2. Démontrer que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.
3. En déduire l'intersection des plans (AIJ) et (SDC).
   La construire sur la figure.

Partie C. (Bonus)
Construire sur la figure 8.2 page suivante l'intersection de la droite (MN) et du plan (BCD) en justifiant votre construction.
Indication : on pourra d'abord s'intéresser à l'intersection du plan (SMN) et du plan (BCD).

FIGURE 8.1: Figure de l'exercice 8.4

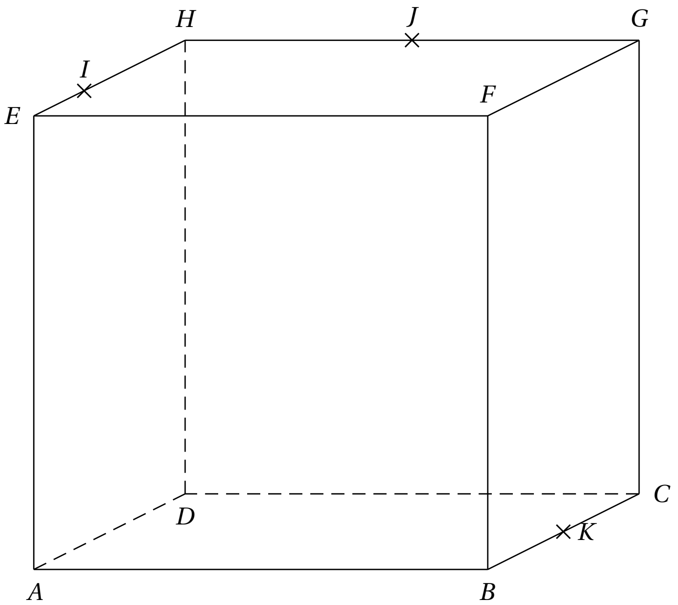
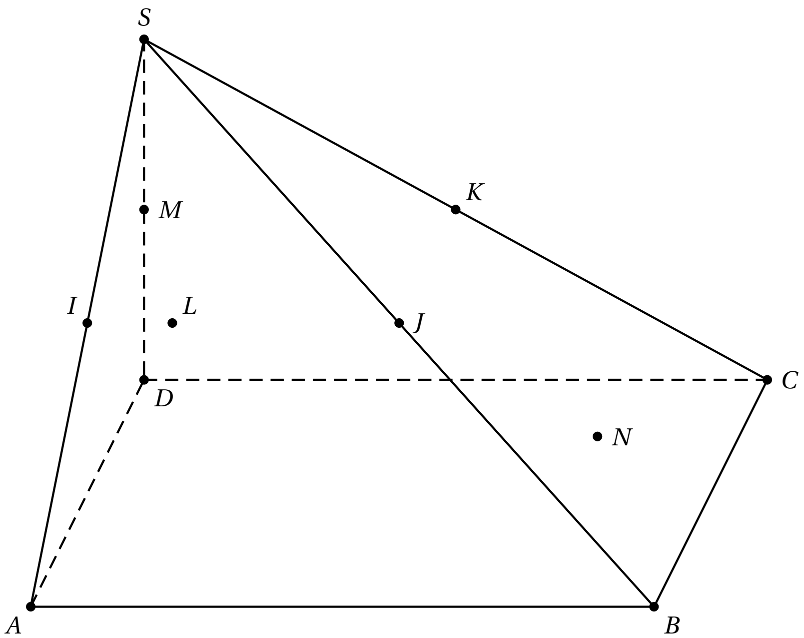


FIGURE 8.2: Figure de l'exercice 8.5



Chapitre 12

Fonction inverse
Fonctions homographiques

Sommaire

12.1 Activités

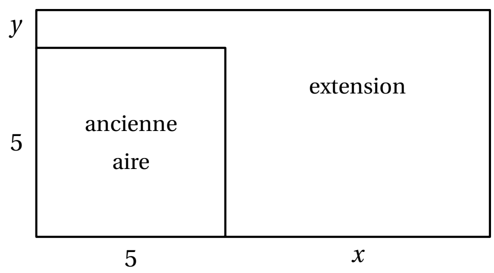
ACTIVITÉ 12.1 (Fonction inverse)**.**
Chaque année, un célèbre magazine automobile organise le concours du véhicule écologique le plus performant. Il s'agit de parcourir un kilomètre sur une piste aménagée, avec comme seul carburant de l'eau, du vent ou du soleil. On désigne par v la vitesse moyenne d'un véhicule (en kilomètres par heure) et par $f(v)$ le temps (en heures) nécessaire pour parcourir la piste.
On rappelle que la vitesse moyenne v est donnée par $\frac{d}{t}$ où d désigne la distance parcourue et t le temps mis pour parcourir cette distance.

1. (a) Donner l'expression de la fonction f en fonction de la vitesse v.
   (b) Compléter le tableau suivant :

v	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(v)$														

   (c) Le tableau précédent est-il un tableau de proportionnalité ?
2. (a) On se place dans un repère orthornormé où une unité représente 1 kilomètre par heure en abscisse et 1 heure en ordonnée. Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.
   (b) Reconnaît-on la représentation graphique d'une fonction affine ? D'une fonction trinôme ?
3. Cette année, deux véhicules se sont particulièrement distingués : le véhicule « Solaria 2200 » et le véhicule « WindBolide ».
   (a) Solaria 2200 a parcouru la piste à la vitesse de 9,5 kilomètre par heure. Donner un encadrement de son temps de parcours.
   (b) WindBolide, quant à lui, a eu besoin de 3 heures pour faire le parcours. Donner un encadrement de sa vitesse moyenne.

ACTIVITÉ 12.2 (Fonction homographique)**.**
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5; 15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5; 15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5\,\text{m}$ ou $x_2 = 10\,\text{m}$?

12.2 Fonction inverse

Définition 12.1. On appelle *fonction inverse* la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une *hyperbole*.

Propriété 12.1. *La fonction inverse est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty; 0[$ *et strictement décroissante pour* $x \in]0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

Preuve. Rappelons qu'une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) > f(b)$ (on dit qu'elle inverse l'ordre). Soient x et y deux réels non nuls.
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{y-x}{xy}$
- Si $x < y < 0$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- Si $0 < x < y$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

◊

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 12.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

12.3 Fonctions homographiques

Définition 12.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée *fonction homographique.*
Elle est définie pour tout x tel que $cx + d \neq 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty\,;-\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}\,;+\infty\right[$

Sa courbe est une hyperbole.

Propriété 12.3. *Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme* $f(x) = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \beta$.

On l'admettra.

Propriété 12.4. *Soit* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *une fonction homographique. Alors* f *a les variations résumées dans l'un des tableaux ci-dessous :*

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

On l'admettra.

12.4 Exercices

12.4.1 Technique

EXERCICE 12.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ...... $\frac{1}{x}$ ......
3. Si $x > 2$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
4. Si $x < -3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
5. Si $x < 4$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
6. Si $x > -10$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
7. Si $x < 1$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
8. Si $x > -5$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....

EXERCICE 12.2.
On considère les fonctions f et g définies pour tout x non nul par $f(x) = \frac{4}{x}$ et $g(x) = -\frac{2}{x}$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice ? Que peut-on conjecturer concernant les variations de f ?
   (b) Soient $0 < a < b$.
   Que peut-on dire alors de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$?
   Que peut-on dire alors de $4 \times \frac{1}{a}$ et de $4 \times \frac{1}{b}$?
   En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) Faire de même en partant de $a < b < 0$.
2. Mêmes questions avec la fonction g.

EXERCICE 12.3.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

1. Une fonction homographique est toujours définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une fonction homographique peut être définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et 3.
3. La fonction $f(x) = \frac{2-x}{10-x}$ est une fonction homographique.
4. La fonction $g(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-10x}$ est une fonction homographique.
5. La fonction $h(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-6x}$ est une fonction homographique.
6. La fonction $i(x) = \frac{x^2+1}{x+4}$ est une fonction homographique.

EXERCICE 12.4.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions homographiques suivantes et les valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent :

- $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+4}$
- $g : x \longmapsto \frac{x+5}{x+4}$
- $h : x \longmapsto \frac{2x+3}{3x+4}$
- $i : x \longmapsto \frac{x-1}{3x+1}$

EXERCICE 12.5.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{x-4} = 0$
2. $\frac{-x+4}{2x-1} = 0$
3. $\frac{-3x+4}{-2x-1} = 2$
4. $\frac{3x+4}{x+4} = 8$
5. $\frac{x-4}{x-1} = -2$
6. $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$
7. $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$
8. $\frac{3x}{4x+9} > 0$
9. $\frac{2x-10}{11x+2} \leqslant 0$

12.4.2 Études de variation de fonctions homographiques

EXERCICE 12.6.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -1$ on a $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$.
3. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots & < & a & < & b \\
\ldots & \ldots & a+1 & \ldots & b+1 \\
 & & \dfrac{1}{a+1} & \ldots & \dfrac{1}{b+1} \\
 & & \dfrac{3}{a+1} & \ldots & \dfrac{3}{b+1} \\
 & & 1+\dfrac{3}{a+1} & \ldots & 1+\dfrac{3}{b+1} \\
 & & f(a) & \ldots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-1[$.

EXERCICE 12.7.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$ on a $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$.
3. En utilisant une des deux expressions de f, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) < 0$
4. Soient a et b tels que $-2 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots & < & a & < & b \\
\ldots & \ldots & a+2 & \ldots & b+2 \\
 & & \dfrac{1}{a+2} & \ldots & \dfrac{1}{b+2} \\
 & & -\dfrac{1}{a+2} & \ldots & -\dfrac{1}{b+2} \\
 & & 1-\dfrac{1}{a+2} & \ldots & 1-\dfrac{1}{b+2} \\
 & & f(a) & \ldots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 12.8.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 3$ on a $f(x) = \frac{1}{3-x} - 2$.
3. Soient a et b tels que $3 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
   $$\begin{array}{ccccc} \dots & < & a & < & b \\ \dots & \dots & -a & \dots & -b \\ \dots & \dots & 3-a & \dots & 3-b \\ & & \dfrac{1}{3-a} & \dots & \dfrac{1}{3-b} \\ & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \dots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\ & & f(a) & \dots & f(b) \end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,;\,+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3[$.

EXERCICE 12.9.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -3$ on a $f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]-3\,;\,+\infty[$.

12.4.3 Problèmes

EXERCICE 12.10.
ABC est un triangle, M est un point du segment $[AB]$ et N est le point de $[AC]$ tel que $(MN) \parallel (BC)$.
On donne $AB = x$, $MB = 2$ et $MN = 4$ et on suppose que $x > 2$.

1. Exprimer la longueur BC en fonction de x.
2. On appelle $\ell(x)$ la longueur BC.
   (a) Montrer que $\ell(x) = 4 + \frac{8}{x-2}$.
   (b) Démontrer que la fonction ℓ est décroissante sur $]2\,;\,+\infty[$.
3. Calculer x pour que $BC = 5$.
4. Peut-on avoir $BC = 1\,000$?

EXERCICE 12.11.
Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1 = 2$ et $R_2 = x$.

1. Démontrer que $R = \frac{2x}{x+2}$.
2. On considère la fonction r définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $r(x) = \frac{2x}{x+2}$.
   (a) Montrer que $r(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$.
   (b) Démontrer que r est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x positif on a $0 \leqslant r(x) < 2$.
   (d) Dresser la tableau des variations de r.
3. Comment choisir R_2 pour avoir $R = 1{,}5\,\Omega$.

Devoir surveillé n°9

Fonction inverse – Fonctions homographiques

EXERCICE 9.1 (6 points)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{-x+4}=0$
2. $\frac{-x+3}{x-1}=2$
3. $\frac{-2x+3}{x-4}\geqslant 0$

EXERCICE 9.2 (8 points)**.**
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x)=\frac{2x-5}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x\neq 3$ on a $f(x)=\frac{1}{3-x}-2$.
3. Soient a et b tels que $3<a<b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & -a & \dots & -b \\
\dots & \dots & 3-a & \dots & 3-b \\
 & & \dfrac{1}{3-a} & \dots & \dfrac{1}{3-b} \\
 & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \dots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,;+\infty[$.
4. On admettra que le sens de variation de f sur $]-\infty\,;3[$ est le même que celui sur $]3\,;+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 9.3 (6 points)**.**
Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1=2$ et $R_2=x$.

1. Démontrer que $R=\frac{2x}{x+2}$.
2. On considère la fonction r définie sur $[0\,;+\infty[$ par $r(x)=\frac{2x}{x+2}$.
   (a) Montrer que $r(x)=2-\frac{4}{x+2}$.
   (b) Démontrer que r est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x positif on a $0\leqslant r(x)<2$.
   (d) Dresser le tableau des variations de r.
3. Comment choisir R_2 pour avoir $R=1{,}5\,\Omega$?

Chapitre 13

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Sommaire

13.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 13.1 (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique)**.** On se place dans le plan.

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

ACTIVITÉ 13.1.

Soit un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x=1$ qui coupe l'axe (Ox) en I, représentés sur la figure 13.1 page suivante.
À tout nombre a, on associe le point M de la droite D, d'abscisse 1 et d'ordonnée a.
« L'enroulement » de la droite D autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$.
Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN}=IM=a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN}=IM=|a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a.

1. Placer les points M_a de la droite D dont les ordonnées a respectives sont : $0;\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};\pi;-\pi$.
2. Placer les points N_a du cercle associés à ces nombres a.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $B(-1;0)$ et $B'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J.

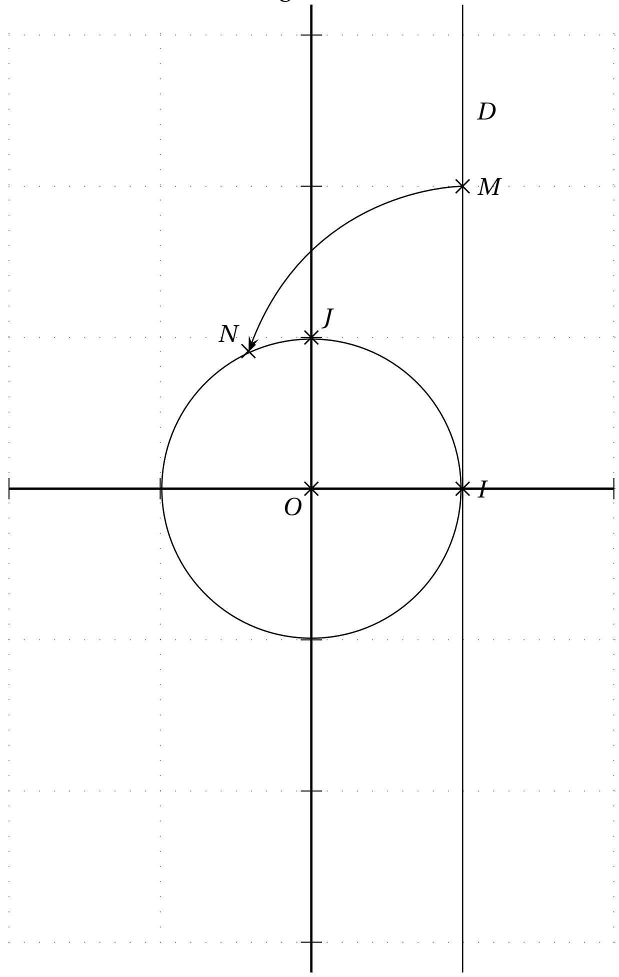
13.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 13.2. La mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Avec les notations de l'activité précédente, la mesure de l'angle $\widehat{ION}$ en radian est égale à la longueur $\overset{\frown}{IN}$, c'est-à-dire à a.

FIGURE 13.1: Figure de l'activité 13.1



EXERCICE 13.1.
Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$ = mesure en radian de l'angle $\widehat{ION}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degré de l'angle $\widehat{ION}$							

EXERCICE 13.2.
La figure 13.3 page 121 propose plusieurs cercles trigonométriques.

- Sur un de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, 2π, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{7\pi}{4}$, -2π
- Sur un autre de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$

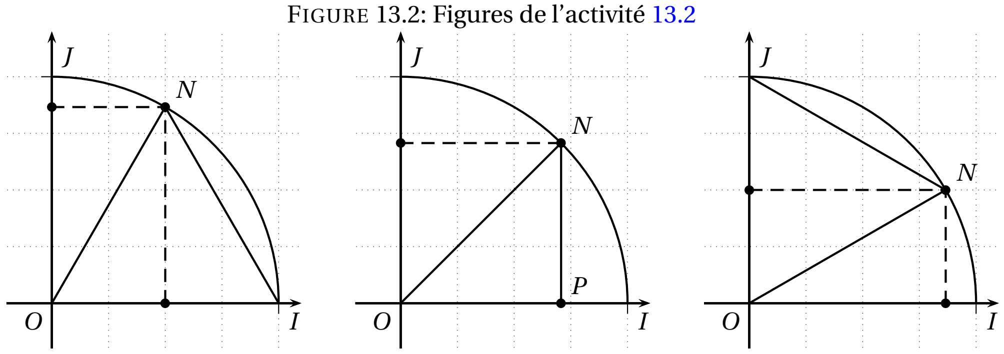
13.3 Cosinus et sinus d'un réel x

ACTIVITÉ 13.2.
En s'aidant des schémas de la figure 13.2 page ci-contre, compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Abscisse de N							
Ordonnée de N							

On pourra observer que les triangles OIN, ONP et ONJ ne sont pas quelconques lorsque N correspond, respectivement, aux nombres $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

FIGURE 13.2: Figures de l'activité 13.2



Définition 13.3. Soit x un réel et $N(x_n\,;\,y_n)$ le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos x = x_n \quad \sin x = y_n \quad \text{et, quand } \cos x \neq 0, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

EXERCICE 13.3.
Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$						
$\cos x$						
$\tan x$						

Propriété 13.1. *Pour tout réel x on a :*

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x+2\pi) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x+2\pi) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXERCICE 13.4.
Par lecture graphique et sans justifier, en s'aidant des schémas obtenus dans l'exercice 13.2, compléter le tableau suivant :

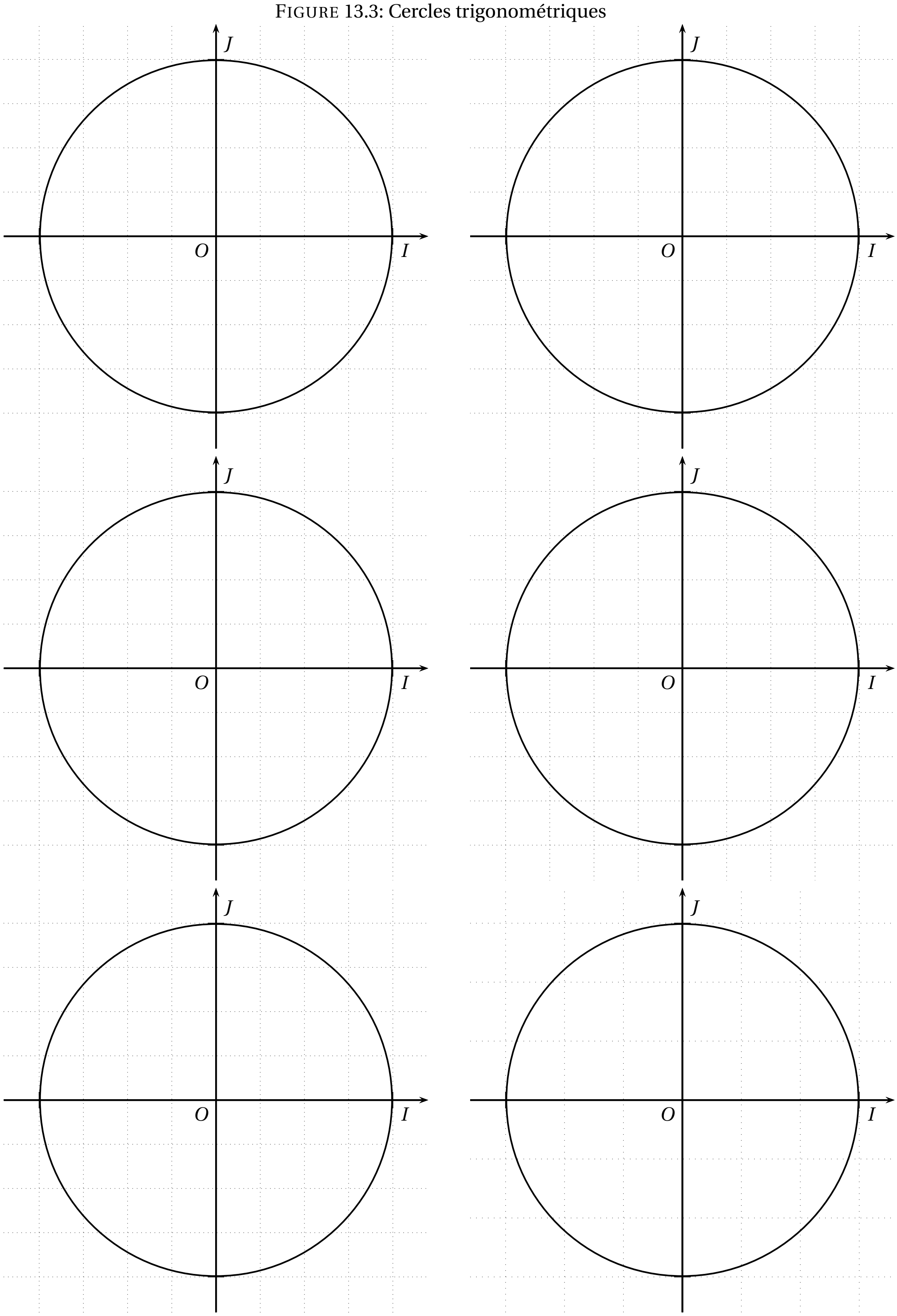
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin x$												
$\cos x$												
$\tan x$												

EXERCICE 13.5. 1. Compléter le tableau suivant :

x	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$													
$\sin x$													
$\tan x$													

2. Tracer dans trois repères orthogonaux (ordonnées : 5 cm = une unité ; abscisses : 6 cm = π unités) les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.
3. Dresser le tableau des variations de ces fonctions pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$

FIGURE 13.3: Cercles trigonométriques



Fiche A

Expressions algébriques

A.1 Rappels

Définition. Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

Propriété. *Au collège, on a obtenu les factorisations et développements suivants :*

$$\begin{array}{rclrcl} ka+kb & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a+b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(c+d) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a-b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a^2-b^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A.2 Technique

EXERCICE A.1.
Indiquer pour chaque expression s'il s'agit d'une somme ou d'un produit :

- $A=(x-5)(x+8)$
- $B=x^2-\frac{1}{x}$
- $C=2x+(x-3)(2x+1)$
- $D=x(2+3x)$
- $E=(x+3)x+7$
- $F=(x-3)^2+1$
- $G=7(x-3)^2$
- $H=(3x+5)^4$
- $I=(x+3)(x+7)$
- $J=(x-3)^2-1$
- $K=x+\frac{1}{x}$
- $L=x^2-(3x-1)^2$
- $M=\frac{3x+4}{x-2}$
- $N=(x+3)(x-2)x+1$
- $O=(x+1)^2$
- $P=6ab$

EXERCICE A.2.
Parmi les formules rappelées dans la propriété ci-dessus, lesquelles sont des formules de développement, lesquelles sont des formules de factorisation ?

EXERCICE A.3.
Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A=(x^2+4)(2x-3)$
- $B=x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C=(5-2x)(x-4)$
- $D=(x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E=(x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F=x(x+1)(x-3)$
- $G=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H=(a+b)^3$
- $I=(a-b)^3$
- $J=-(x-7)$
- $K=-(2x+3)^2$
- $L=(x-2)^2$
- $M=(x+1)^2-x^2$

EXERCICE A.4.
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A=x(x-1)+2x(x-3)$
- $B=(x-1)^2+4(x-1)(x+5)$
- $C=x^2-(3x+1)^2$
- $D=x(x-4)-5(4-x)$
- $E=4x^2+20x+25$
- $F=x(x-1)-(2x+5)x$
- $G=(x+5)^2-(2x+7)^2$
- $H=(5x+1)(-3x+4)+x(10x+2)$
- $I=x^3-12x^2$
- $J=x^2-4+(x-2)(2x+1)$
- $K=2x-3+(3-2x)^2$
- $L=(2a+1)^2-(a+6)^2$
- $M=(2x-3)(1-x)-3(x-1)(x+2)$
- $N=(x-1)^2+2(x^2-1)$
- $O=x^4+4x^3+4x^2$
- $P=4x^5-x^3$
- $Q=x^7-x^5$
- $R=x(x+2)^2-4x(x-1)^2$
- $S=(2a-b)(b-a)-(2b-a)(b-2a)$
- $T=a^4-b^4$

EXERCICE A.5.
On donne : $a^2+b^2+c^2=1$.
Que vaut $a^4+(ab+c)^2+(ac-b)^2$?

A.3 Technologie

EXERCICE A.6.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
   - 0 ;
   - 1 ;
   - -2 ;
   - $\sqrt{2}$;
   - $1+\sqrt{3}$;
   - $2-\sqrt{5}$.
2. Résoudre $f(x) = 3$.

EXERCICE A.7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Résoudre $f(x) = 3$.

EXERCICE A.8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 9$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Résoudre $f(x) = 9$.

EXERCICE A.9.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -x^2 + 2$. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE A.10.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE A.11.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$. On cherche à trouver, par le calcul, le minimum de $f(x)$.

1. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$.

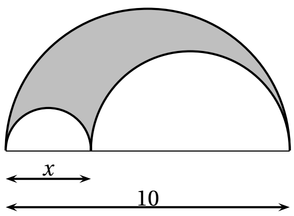
A.4 Problèmes

PROBLÈME A.1.
Montrer que le somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

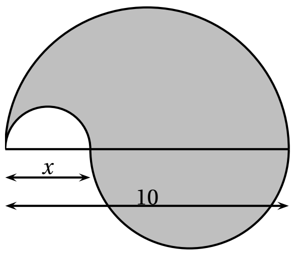
PROBLÈME A.2.
Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédent cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi. Pourquoi ?

PROBLÈME A.3.
Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux nombres. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.

PROBLÈME A.4.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction du nombre x. Que constate-t-on ?

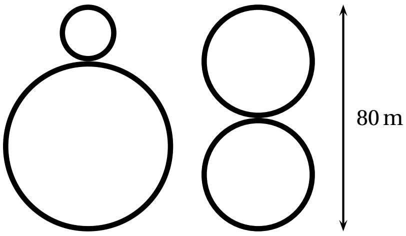


PROBLÈME A.5.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.



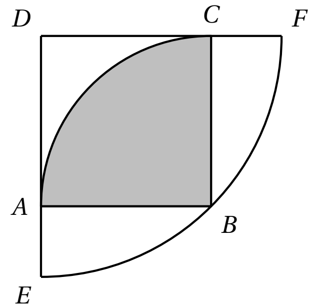
PROBLÈME A.6.
Oscar et Alix doivent tracer sur la plage un circuit de karting. Ils souhaitent construire un circuit en forme de 8 et disposent de 80 mètres de plage. Sur la figure ci-dessous sont tracés leurs modèles respectifs, composés chacun de deux cercles tangeants ; dans le premier modèle le petit cercle est d'un rayon quelconque (compris entre 0 et 80 m) tandis que dans le second modèle les deux cercles ont

même rayon. De ces deux circuits, lequel est le plus long ?



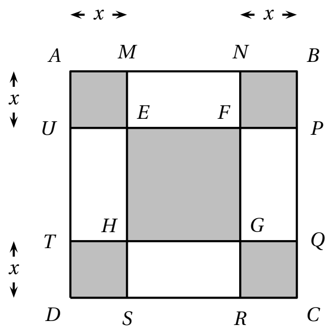
PROBLÈME A.7.
$ABCD$ est un carré. Pour construire E et F, on a tracé un quart de cercle de centre D passant par B. On a également tracé un quart de cercle de centre B passant par A.

1. Montrer que l'aire de la surface blanche intérieure au secteur DEF est égale à l'aire de la surface grisée.
2. L'aire de la surface grisée est-elle plus grande ou plus petite que les trois quarts de l'aire du carré $ABCD$?



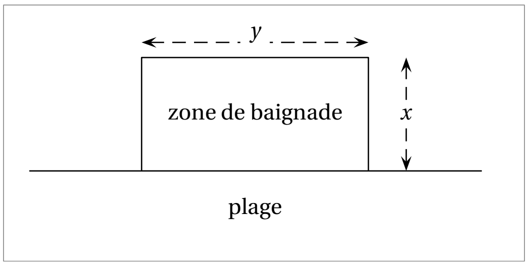
A.5 Problèmes dits *de synthèse*

PROBLÈME A.8.
Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.
2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.
4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.
5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.
   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

PROBLÈME A.9.
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade .
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?
2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?
3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x - 100)^2$$

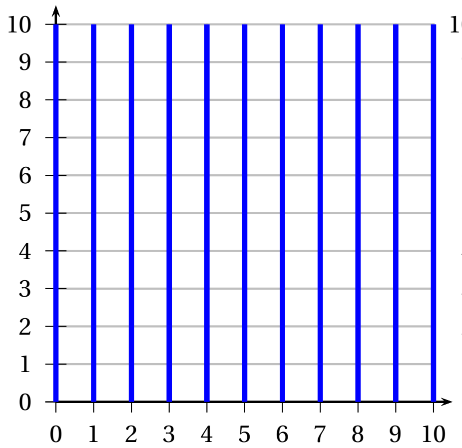
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifier.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?

Fiche B

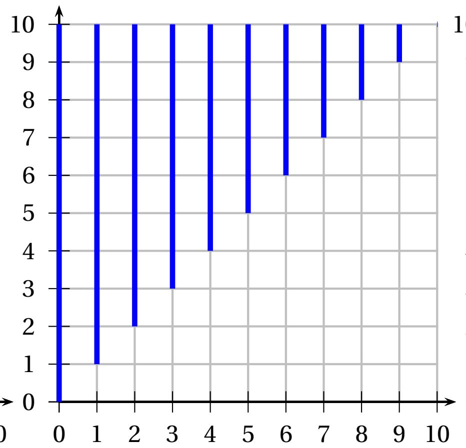
Boucle « pour »

Exercice B.1.
Écrire des algorithmes qui permettent de faire les dessins ci-dessous .

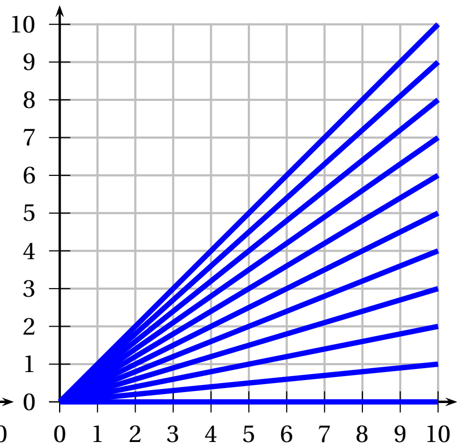
Dessin n° 1



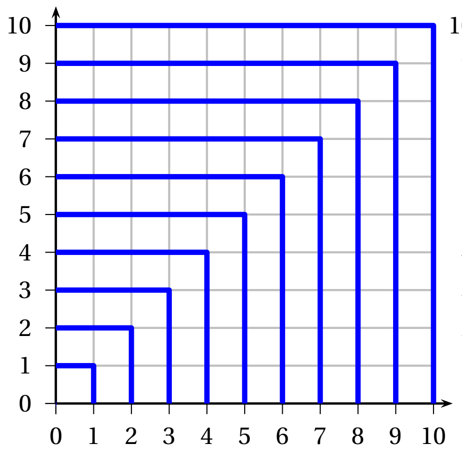
Dessin n° 2



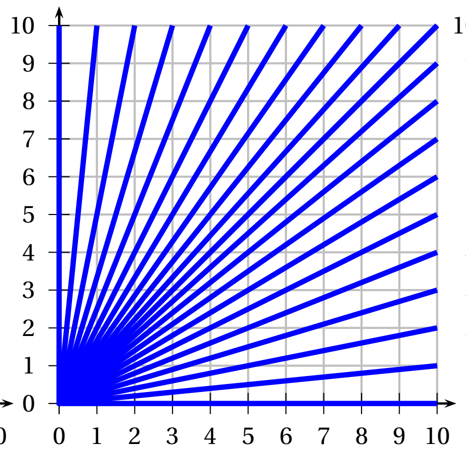
Dessin n° 3



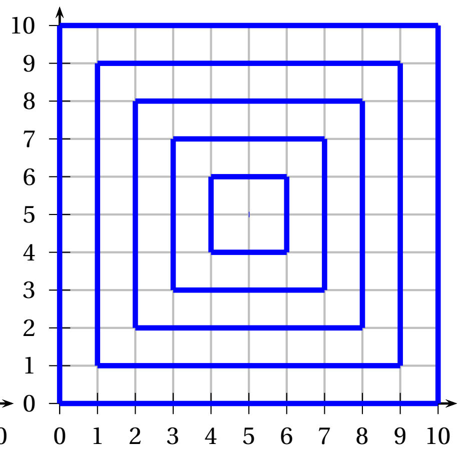
Dessin n° 4



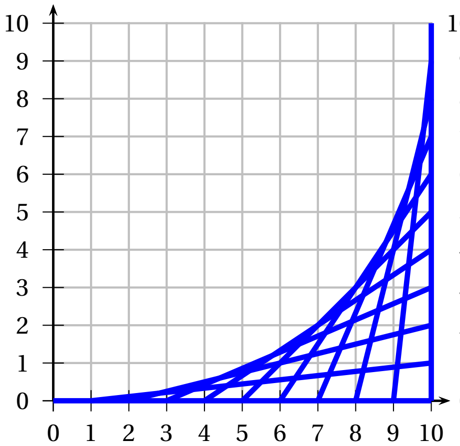
Dessin n° 5



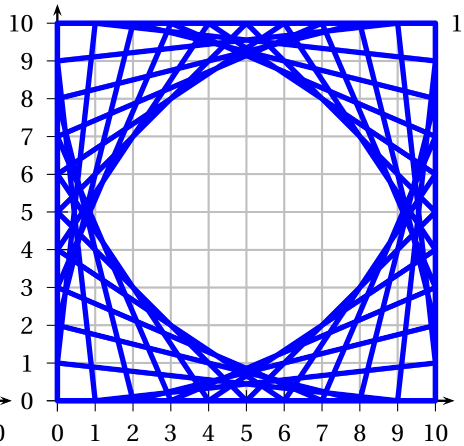
Dessin n° 6



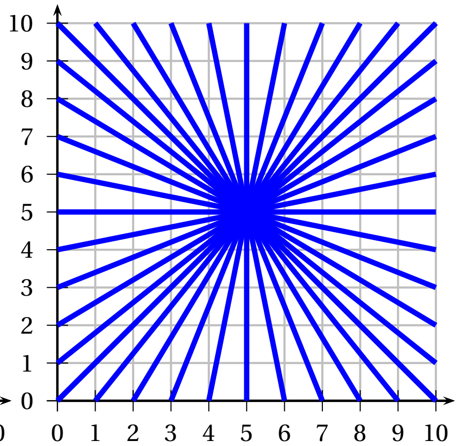
Dessin n° 7



Dessin n° 8



Dessin n° 9



EXERCICE B.2.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant tous les nombres entiers de 0 à n.

EXERCICE B.3.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant la somme de tous les nombres entiers de 0 à n.

EXERCICE B.4.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.

EXERCICE B.5.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant tous les diviseurs de n.

Remarque. En langage Algobox, le reste de la division de x par y s'écrit $x\%y$.

EXERCICE B.6.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant le nombre de diviseurs de n.