Devoir surveillé n°8

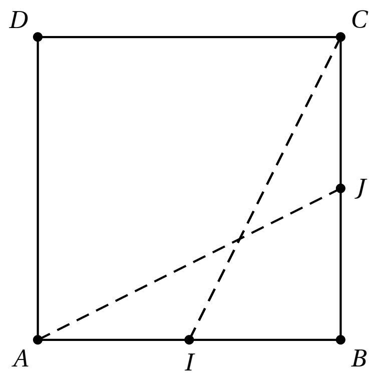
Produit scalaire – Loi binomiale

EXERCICE 8.1.
$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$, $BC = 4$ et $AC = 7$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire BD.

EXERCICE 8.2.
$ABCD$ est un carré de côté a.
On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
On note $\theta = \left(\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{IC}\right)$.

1. En décomposant judicieusement, à l'aide de la relation de CHASLES, les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{IC}$, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{IC}$ en fonction de a.
2. (a) Déterminer la longueur AJ en fonction de a.
   (b) Déterminer la longueur IC en fonction de a.
   (c) En déduire une expression de $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{IC}$ en fonction de a et de θ.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\theta$ puis celle de θ en degré à 0,1 près.



EXERCICE 8.3.
Des études statistiques ont montré qu'à la naissance la probabilité d'avoir un garçon est égale à 0,51.
On rencontre au hasard une famille de trois enfants dont les naissances sont supposées indépendantes et on s'intéresse au nombre de garçons.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de garçons.
   Déterminer la loi de probabilité de X. *On présentera les probabilités sous forme de tableau et on arrondira les résultats au centième.*
3. Montrer que la probabilité que cette famille ait au moins un garçon est d'environ 0,88.
4. On rencontre ensuite au hasard et de manière indépendante 10 familles de trois enfants, les hypothèses étant les mêmes que décrites ci-dessus.
   Calculer la probabilité, arronie au centième, que neuf familles exactement sur les dix aient au moins un garçon.

EXERCICE 8.4.
On donne l'extrait d'une table concernant une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$.

k	…	2	3	4	5	6	…	14	15	16	17	18	…
$p(X \leqslant k)$	…	0,001	0,006	0,018	0,048	0,103	…	0,939	0,969	0,986	0,994	0,997	…

1. (a) Déterminer le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$.
   (b) Déterminer le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
2. En déduire l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la variable aléatoire X.
3. Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 8 boules noires. Le joueur gagne s'il obtient une boule blanche.
   Sur les 50 personnes ayant joué, 5 ont gagné.
   Peut-on soupçonner l'organisateur du jeu d'avoir triché ?