Chapitre 13

Autres applications du produit scalaire : Relations métriques dans le triangle Compléments de trigonométrie

Sommaire

Certaines propriétés en rapport avec les équations cartésiennes de droite ou de cercle (vues au paragraphe 11.3) étaient les premières applications du produit scalaire.
D'autres applications du produit scalaire sont regroupées dans le présent chapitre.

La plupart des démonstrations nécessitent d'avoir traité le chapitre 11 sur le produit scalaire.

13.1 Relations métriques dans le triangle

13.1.1 Formules de la médiane

Théorème 13.1 (Formules de la médiane)**.** *Soit A et B deux points quelconques du plan et I le milieu du segment $[AB]$.*
Alors, pour tout point M du plan on a :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$;
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$;
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

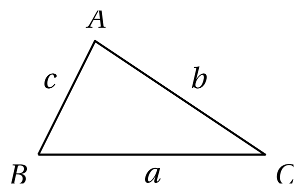
Remarques.

- La droite (MI) étant, pour le triangle MAB, la médiane issue de A, ces formules sont appelées *formules de la médiane.*
- Ces formules ne sont pas à apprendre, par contre on doit savoir les retrouver en utilisant les carrés scalaires (voir la preuve ci-dessous).
- Ces formules sont particulièrement utiles quand on cherche tous les points M vérifiant, par exemple, $MA^2 + MB^2 = 4$ puisqu'elles permettent de passer d'une expression à deux inconnues (MA et MB) à une expression à une inconnue (MI).

La preuve du premier point sera faite en classe, les autres démonstrations sont du même type et seront traitées en exercice.

13.1.2 Formule d'AL-KASHI

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on parle d'un triangle ABC non aplati dont on note les longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et S son aire.



Théorème 13.2 (Formule d'AL-KASHI)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

La preuve sera faite en classe.

Remarques.

- Si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de PYTHAGORE qui n'en est qu'un cas particulier. La formule d'AL-KHASI s'appelle aussi *Pythagore généralisé.*
- En permutant les côtés et les angles, on a aussi :
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$;
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

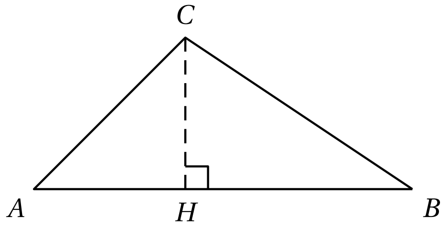
13.1.3 Formule de l'aire

Propriété 13.3 (Formule de l'aire)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut :*

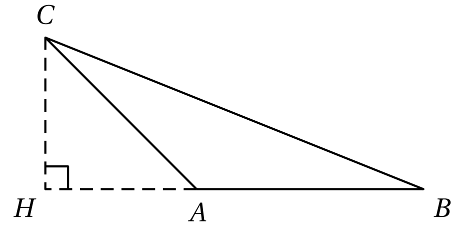
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Preuve. Deux situations sont à considérer :

Situation 1
(triangle *acutangle*)



Situation 2
(triangle *obtusangle*)



L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.
Or $CH = AC\sin\widehat{A}$ (situation 1) ou $CH = AC\sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = AC\sin\widehat{A}$ (situation 2).
Dans les deux cas, $S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
En permutant, on obtient les deux autres égalités. ♢

13.1.4 Formule des sinus

Propriété 13.4 (Formule des sinus)**.** *Avec les conventions de notation vues plus haut :*

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve. D'après ce qui précède, on a : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.
En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$.
Le triangle étant non aplati, les angles sont non nuls et les sinus de ces angles aussi, on peut donc inverser ces quotients : $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$ ♢

Exemple. Soit ABC un triangle tel que $c = AB = 5$ cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ et $\widehat{B} = 30^\circ$.
Alors $\widehat{C} = 180 - 40 - 30 = 110^\circ$et, comme $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$, on obtient $\frac{a}{\sin 40} = \frac{b}{\sin 30} = \frac{5}{\sin 110}$ puis $a \approx 3{,}42$ cm et $b \approx 2{,}66$ cm.

13.1.5 Formule de HÉRON

Propriété 13.5 (Formule de HÉRON)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut et en notant p le demi-périmètre du triangle ($2p = a + b + c$), on a :*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On l'admettra.

13.2 Compléments de trigonométrie

13.2.1 Rappels

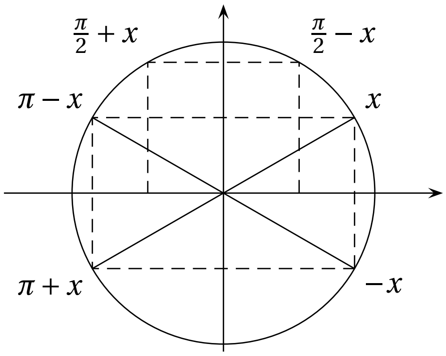
On a déjà vu, en Seconde et lors du chapitre 9 sur les angles orientés, les propriétés suivantes.

Lignes trigonométriques

Relation fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Sinus et cosinus d'angles particuliers



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Nous allons en démontrer certaines et voir qu'il en existe d'autres.

13.2.2 Formules d'addition

Propriété 13.6. *Pour tous réels a et b on a :*
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

13.2.3 Formules de duplication

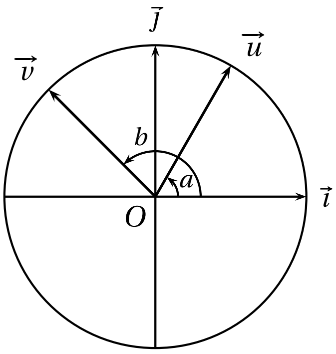
Propriété 13.7. *Pour tout réel a on a :*
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos b$

13.2.4 Formules de linéarisation

Propriété 13.8. *Pour tout réel a on a :*
- $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

13.2.5 Démonstrations des formules

Le point de départ de toutes les formules
Étudions la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels.
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires (c'est-à-dire de norme 1) et tels que $\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{u}\right)=a$ et $\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{v}\right)=b$ (voir le schéma).



On sait que $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\left(\vec{u}\ ;\ \vec{\imath}\right)+\left(\vec{\imath}\ ;\ \vec{v}\right)=b-a$.
Or on a $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)=\cos(b-a)$
donc $\vec{u}.\vec{v}=\cos(b-a)=\cos(a-b)$ car $\cos x=\cos(-x)$.
On sait aussi que $\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
Et donc $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
Ce qui nous donne la première formule de trigonométrie :

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

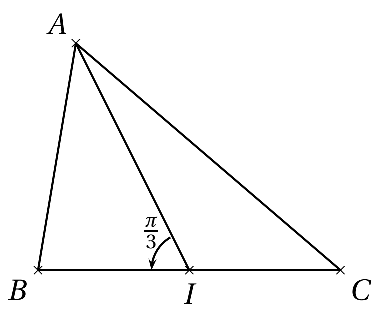
De celle-ci on va déduire toutes les autres (les preuves seront faites en classe).

13.3 Exercices

13.3.1 Relations métriques dans le triangle

EXERCICE 13.1.
Démontrer les deuxième et troisième formules de la médiane.

EXERCICE 13.2.
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{3}$ et que $BI=CI=2$ et $AI=3$.



Calculer :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;
2. AB^2+AC^2 ;
3. AB^2-AC^2 ;
4. AB et AC.

EXERCICE 13.3.
$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB=2$ cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2-MB^2=14$.

Exercice 13.4.
$ABCD$ est un parallélogramme de centre I tel que $AB = 7$, $AD = 5$ et $BD = 8$.

1. Montrer que $AB^2 + AD^2 = 2AI^2 + 2ID^2$. En déduire AC.
2. En déduire les mesures des angles du parallélogramme à 1° près.
3. En déduire l'aire de $ABCD$.

Exercice 13.5.
ABC est un triangle tel que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire S de ABC.

Exercice 13.6.
ABC est un triangle tel que $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que les mesures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

Exercice 13.7.
ABC est un triangle tel que $b = 6\sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ et $\widehat{C} = 45°$. Calculer les valeurs exactes de a et c.

Exercice 13.8.
ABC est un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ rad et $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ rad.

1. Montrer que $\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer les valeurs exactes de AB et AC.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC

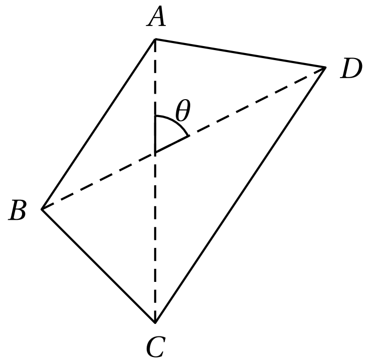
Exercice 13.9.
ABC est un triangle tel que $S = 5\text{ cm}^2$, $c = AB = 13$ cm et $b = AC = 2$ cm. Calculer la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté $a = BC$.

Exercice 13.10.
ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 60°$.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.

Exercice 13.11.
$ABCD$ est un quadrilatère convexe. On note θ l'angle entre ses deux diagonales (AC) et (BD). Démontrer que l'aire S du quadrilatère $ABCD$ est donnée par :

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin\theta$$



Exercice 13.12.
Un promeneur marche 5 km en direction de l'Est, puis 2 km en direction du Nord-Est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.
Sur quelle distance d a-t-il couru ? (On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10 m).

Exercice 13.13.
Montrer que « ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C}$ ».

13.3.2 Compléments de trigonométrie

Exercice 13.14.
Démontrer les formules des lignes trigonométriques.

Exercice 13.15.
Montrer que, pour tous réels a et b : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

Exercice 13.16.
En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$.
On pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Exercice 13.17.
Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$ puis celle de $\tan\frac{\pi}{12}$.

Exercice 13.18.
Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

Exercice 13.19.
Montrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

EXERCICE 13.20.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$;
- $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$;
- $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

EXERCICE 13.21.
Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{9\pi}{8}$.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ puis de $\sin\frac{\pi}{8}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{8}$.

EXERCICE 13.22.
Dans cet exercice, on dipose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.
2. En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

EXERCICE 13.23.
Dans cet exercice on donne : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis de $\cos\frac{3\pi}{5}$

EXERCICE 13.24.
Démontrer que, pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$. En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 13.25.
ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.
2. Démontrer que $\tan(A + B) = -\tan C$.
3. En déduire la relation : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$