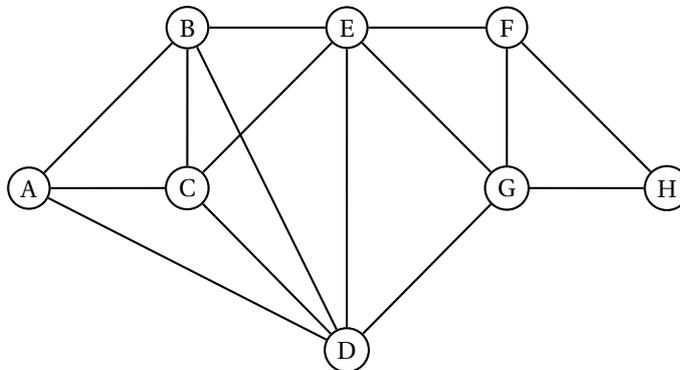


Devoir surveillé n° 5

Coloration

EXERCICE 5.1.

La tournée de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier » est représentée par le graphe ci-dessous où les sommets sont des carrefours de la ville et les arêtes sont des voies de circulation où la collecte est programmée pour cette tournée. Le dépôt d'où démarre le camion est situé au carrefour A.



1. (a) Ce graphe est-il complet ? *Justifier.*
 (b) Ce graphe est-il connexe ? *Justifier.*
2. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les carrefours du graphe représentant sa tournée de manière à ce que deux carrefours reliés par une même voie n'aient jamais la même couleur.
 - (a) Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? *Justifier.*
 - (b) En utilisant un algorithme de coloration, déterminer un majorant du nombre minimum de couleurs à utiliser.
 - (c) Déterminer le nombre minimum de couleurs à utiliser.
3. On appelle M la matrice associée au graphe, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

- (a) Expliquer, à l'aide de la matrice, pourquoi le diamètre de ce graphe est inférieur ou égal à 4.
- (b) Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt situé au carrefour A au carrefour H en quatre étapes ? *Justifier la réponse.*
4. Le conducteur du camion doit passer le long de chacune des voies indiquées afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il commence sa tournée au dépôt situé au carrefour A et doit terminer à l'usine de recyclage située au carrefour E. Il cherche le chemin qui minimise son trajet.
 - (a) Montrer qu'il n'existe pas de parcours permettant de longer une seule fois chaque voie.
 - (b) Proposer une modification simple de son parcours qui lui permette de le faire (*on pourra imaginer qu'il existe autant de voies que l'on veut qui ne sont pas indiquées sur le schéma*) et donner alors son parcours.