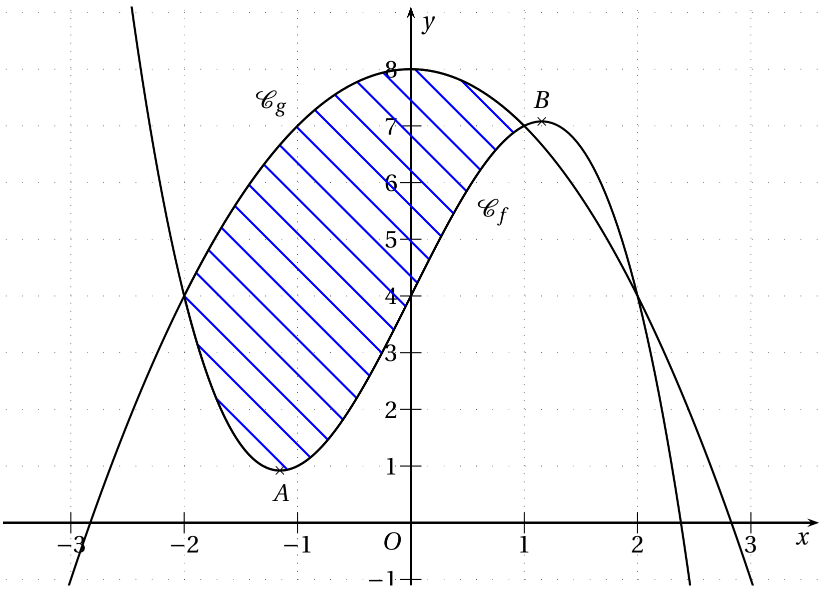
# Devoir surveillé n° 7

## Logarithme népérien – Calcul intégral

**EXERCICE 7.1** (6,5 points)**.**
On a tracé, sur le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives de $f$ et de $g$, deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x + 4 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 8$$

On appelle $f'$ la fonction dérivée de $f$. $A$ et $B$ sont les sommets de $\mathscr{C}_f$.




1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de $f$. *On indiquera les valeurs approchées au centième des extremums locaux.*
2. Déterminer les valeurs exactes des abscisses de $A$ et de $B$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Donner une valeur approchée de $\alpha$ au dixième.
   (c) Dresser alors le tableau de signe de $f(x)$ selon les valeurs de $x$.
4. Soit $F$ une primitive de $f$.
   À l'aide de ce qui précède et sans calcul, déterminer les variations de $F$.
5. (a) Déterminer $\mathscr{A}$, l'aire du domaine hachuré, en unités d'aire.
   (b) Sachant qu'une unité vaut 1,5 cm sur l'axe des abscisses et 0,75 cm sur celui des ordonnées, déterminer $\mathscr{A}$ en cm$^2$.

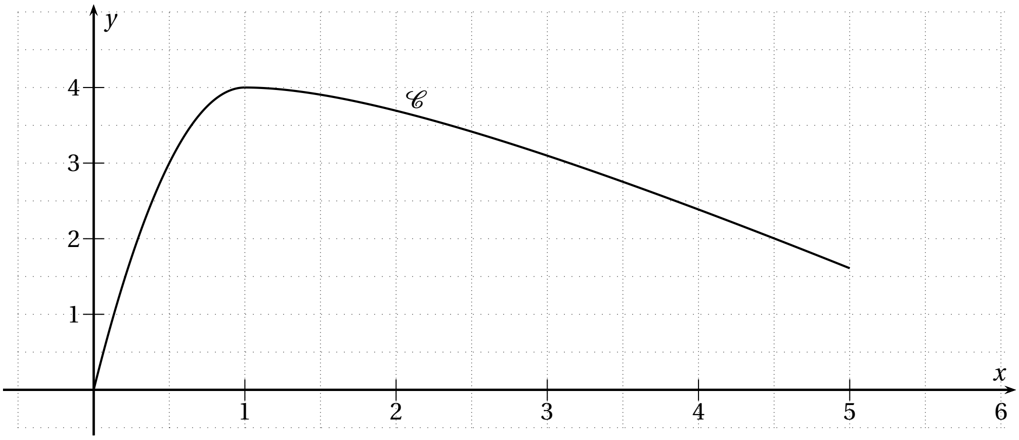
**EXERCICE 7.2** (7,5 points)**.**
Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.
Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si $x$ est le temps exprimée en minutes, le débit, exprimée en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction $f$ telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -4x^2 + 8x & \text{pour } x \in [0\,;\,1] \\ f(x) = \ln x - x + 5 & \text{pour } x \in [1\,;\,5] \end{cases}$$

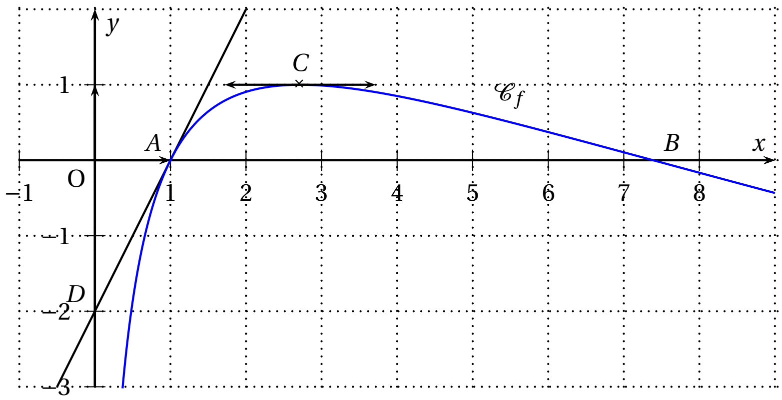
La courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.
On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donnée par $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $f$ est croissante sur $[0\,;\,1]$, et décroissante sur $[1\,;\,5]$.
2. (a) Donner une primitive, $F$, de la fonction $f$ sur $[0\,;\,1]$.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

3. (a) Soient $g$ et $G$ les fonctions définies sur $[1\,;5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.
   Montrer que $G$ est une primitive de $g$ sur $[1\,;5]$.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes arrondi à l'unité.
5. On rappelle que la valeur moyenne $m$ d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a\,;b]$ où elle est continue est donnée par : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer la valeur approchée, arrondie au millième, de $f$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
   (b) Interpréter ce nombre en terme d'appels reçus.
   (c) Représenter ce nombre sur le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.




**EXERCICE 7.3** (6 points).
On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Soit la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $A(1\,;0)$ et en $B$.
La tangente en $C$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en $A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $D$.




1. Déterminer l'abscisse du point $B$ (la valeur exacte est demandée).
2. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point $C$ et l'ordonnée du point $D$ (les valeurs exactes sont demandées).
3. (a) Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4]$.
   Démontrer que $g$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.