Chapitre 8

Lois de probabilité à densité

Sommaire

8.1 Rappels et compléments

8.1.1 Variable aléatoire discrète

Définition. Soit une expérience aléatoire dont l'univers des issues est un ensemble Ω fini. Une *variable aléatoire*, dite *discrète*, est une **fonction** qui à chaque élément de Ω associe un réel k.

Définition. Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs sont dans l'ensemble $\Omega_X = \{k_1 ; k_2 ; \ldots ; k_n\}$, un ensemble fini de valeurs.
L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$, sont respectivement les nombres :

$$E(X) = p(X = k_1) \times k_1 + p(X = k_2) \times k_2 + \ldots + p(X = k_n) \times k_n$$

$$\begin{aligned} V(X) &= p(X = k_1) \times (k_1 - E(X))^2 + p(X = k_2) \times (k_2 - E(X))^2 + \ldots + p(X = k_n) \times (k_n - E(X))^2 \\ &= \left[p(X = k_1) \times k_1^2 + p(X = k_2) \times k_2^2 + \ldots + p(X = k_n) \times k_n^2\right] - (E(X))^2 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$$

Une propriété de l'espérance et de l'écart-type

Une propriété de l'espérance et de l'écart-type d'une variable aléatoire n'a pas été vue en Première ES et est nécessaire pour la suite. C'est l'objet de cette activité.

On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :

- 1 secteur de couleur rouge (R) ;
- 2 secteurs de couleur bleue (B) ;
- 5 secteurs de couleur verte (V).

Le joueur faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que la roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :

- 0 euro si c'est le vert ;
- 3 euros si c'est le bleu ;
- 4 euros si c'est le rouge.

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain du joueur.
   (a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.
   On la présentera sous forme de tableau.
   (b) Calculer $E(X)$, l'espérance de X. Interpréter le résultat en termes de partie et de gain.
   (c) Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$, la variance et l'écart type de X.
2. L'organisateur décide de doubler tous les gains. On appelle Y la nouvelle variable aléatoire et on a $Y = 2X$.
   (a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire Y.
   (b) Calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. Pour pouvoir jouer, chaque joueur doit miser, avant de jouer, 4 euros. On appelle Z la nouvelle variable aléatoire et on a $Z = Y - 4$.

(a) Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire Z.

(b) Calculer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.

4. Quel est le lien entre :
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de X et ceux de Y ?
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de Y et ceux de Z ?
   - L'espérance, la variance et l'écart-type de X et ceux de Z ?

On a ainsi :

Propriété 8.1. *Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, de variance $V(X)$ et d'écart-type $\sigma(X)$ et α et β deux réels. Alors la variable aléatoire $Y = \alpha X + \beta$ est d'espérance $\alpha E(X) + \beta$, de variance $\alpha^2 V(X)$ et d'écart-type $|\alpha|\sigma(X)$.*

La preuve sera faite en classe.

8.1.2 Loi binomiale

Définition. Une *épreuve de* BERNOULLI est une expérience aléatoire pour laquelle il n'y a que deux issues, nommées, en général, « succès » et « échec » et notées, en général, S et $\overline{S}$. On note p la probabilité du succès.
Quand une même épreuve de BERNOULLI est répétée plusieurs fois de manière indépendante, on dit qu'on est en présence d'un *schéma de* BERNOULLI. On note n le nombre de fois que l'épreuve de BERNOULLI est répétée.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue d'un schéma de BERNOULLI associe le nombre de succès qu'elle comporte. On appelle *loi binomiale* la loi de probabilité de X. On la note $\mathscr{B}(n,p)$.

Propriété. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Alors :*

- $p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$
- *L'espérance de X est $E(X) = np$*
- *La variance de X est $V(X) = np(1-p)$*
- *L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$*

8.1.3 Primitive s'annulant en a

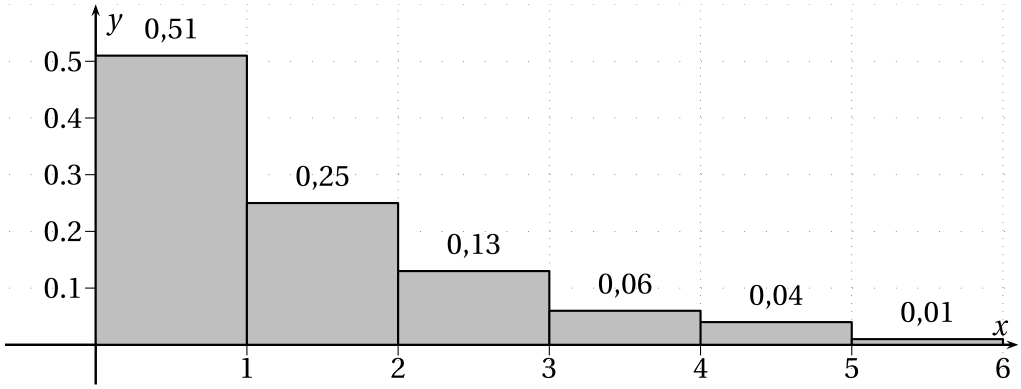
Théorème. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\,;\,b]$. Alors la fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$, a pour dérivée f et est donc, par définition, la primitive de f qui s'annule en a.*

8.2 Activités

8.2.1 Introduction de la fonction de densité

Dans une région, on a constaté que tout habitant résidait à moins de six kilomètres d'un éco-point (site pour déposer bouteille de verre, papier recyclable, etc.).

1. Un relevé statistique a permis d'établir l'histogramme des fréquences ci-dessous :



   Ainsi, la fréquence de la population habitant entre 0 et 1 km d'un éco-point est de 0,51 ou, dit autrement, 51 % de la population habite entre 0 et 1 km d'un éco-point.

   (a) Quel est le pourcentage d'habitants résidant à moins de 3 km d'un éco-point ?

   (b) Que vaut la somme des aires des rectangles de l'histogramme ?

2. On suppose que la population est très grande et on choisit un habitant au hasard.
   On crée la variable aléatoire X qui à chacun des évènements élémentaires de cette expérience aléatoire, donc à chaque personne, associe la distance séparant la résidence de cette personne de l'éco-point le plus proche.
   X prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;6[$, et on peut considérer qu'il y a une infinité de possibilités.
   On dit alors que la variable aléatoire X est *continue* (par opposition à *discrète*).

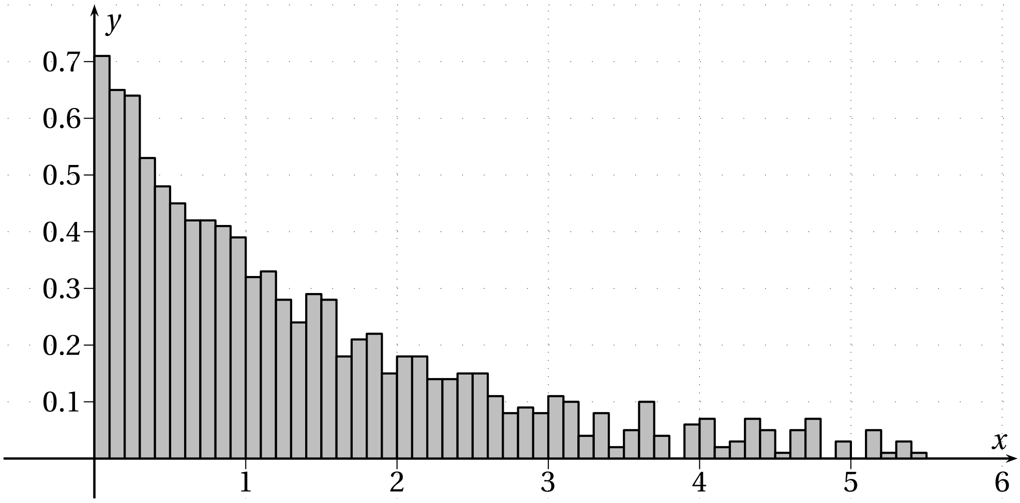
   On veut définir certaines caractéristiques de la loi de probabilité de X.

   (a) Compléter :
   - $p(0 \leqslant X < 1) =$........................
   - $p(1 \leqslant X < 2) =$........................
   - $p(2 \leqslant X < 3) =$........................
   - $p(3 \leqslant X < 4) =$........................
   - $p(4 \leqslant X < 5) =$........................
   - $p(5 \leqslant X < 6) =$........................

   (b) Pour tout entier n (en particulier ceux compris entre 1 et 6) que représente la somme des aires des rectangles situés à gauche de n sur l'axe des abscisses ?

   (c) Pour tout entier n (en particulier ceux compris entre 0 et 5), que représente la somme des aires des rectangles situés à droite de n sur l'axe des abscisses ?

3. Une étude plus précise a permis de relever les distances à 0,1 km près et de construire l'histogramme ci-dessous :



   (a) Le 1er rectangle a une hauteur de 0,71. Quel pourcentage de la population réside à moins de 0,1 km de l'éco-point ?

   (b) Que vaut la somme des aires de tous les rectangles ?

   (c) On donne dans le tableau ci-dessous un extrait des relevés ayant permis d'élaborer cet histogramme. À l'aide de cet extrait, déterminer les probabilités suivantes :
   - $p(0{,}5 \leqslant X < 0{,}8)$
   - $p(X < 0{,}5)$
   - $p(X \geqslant 0{,}8)$

Distance	[0; 0,1[	[0,1; 0,2[	[0,2; 0,3[	[0,3; 0,4[	[0,4; 0,5[	[0,5; 0,6[	[0,6; 0,7[	[0,7; 0,8[	[0,8; 0,9[	[0,9; 1,0[
Fréquence (en %)	7,1	6,5	6,4	5,3	4,8	4,5	4,2	4,2	4,1	3,9

   (d) Comment pourrait-on obtenir ces mêmes résultats uniquement à partir de l'histogramme ?

   (e) Plus généralement, soient a et b deux nombres d'au plus une décimale tels que $0 \leqslant a < b < 6$. Comment pourrait-on obtenir à l'aide des aires des rectangles :
   - $p(a \leqslant X < b)$?
   - $p(X < a)$?
   - $p(X \geqslant b)$?

4. Si on extrapole à partir des relevés, on voit apparaître une courbe comme sur la figure ci-dessous :

Cette courbe représente une fonction f définie sur $[0;6[$ et est appelée *densité de probabilité* de la loi de X.

(a) Soit a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0;6[$ avec $a < b$. En vous inspirant de ce qui a été fait précédemment, comment pourrait-on obtenir les probabilités suivantes :
   - $p(a \leqslant X < b)$?
   - $p(X < a)$?
   - $p(X \geqslant b)$?

(b) Que peut-on dire de l'aire sous la courbe de f entre 0 et 6 ?

(c) On suppose qu'ici $f(x) \approx 0{,}75\mathrm{e}^{-0{,}75x}$.
   i. Déterminer une primitive F de f.
   ii. Calculer :
      - $p(1{,}23 \leqslant X < 3{,}67)$
      - $p(X < 1{,}23)$
      - $p(X \geqslant 3{,}67)$
   iii. Vérifier que $p(0 \leqslant X < 6)$ est proche de 1.
   iv. Conjecturer la valeur de $p(X = 3)$ et, plus généralement, la valeur de $p(X = t)$ pour tout nombre $t \in [0;6[$. Que peut-on en déduire pour $p(X < t)$ et $p(X \leqslant t)$?

8.2.2 Introduction à la loi uniforme

On se propose d'étudier les tirages de nombres au hasard dans $[0;1]$.

1. L'intervalle $[0;1[$ contient 10 nombres ayant au plus 1 décimale : 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8 et 0,9.

   (a) Combien contient-il de nombres ayant au plus 2 décimales ? D'au plus 10 décimales ?

   (b) À l'aide de La fonction *Rand* ou *NbrAléat* de la calculatrice, on peut obtenir un nombre décimal d'au plus 10 décimales. Quelle est la probabilité que ce nombre soit 0,5221311499 ?

2. L'intervalle $[0;1]$ contient une infinité de nombre réels.
   La variable aléatoire X correspondant au tirage au hasard d'un nombre réel de $[0;1]$ est continue.

   (a) Conjecturer les valeurs de :
      - $p\left(X = \frac{1}{3}\right)$
      - $p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right)$

   (b) Plus généralement, soit $a \in [0;1]$, que peut-on conjecturer pour $p\,(0 \leqslant X \leqslant a)$?

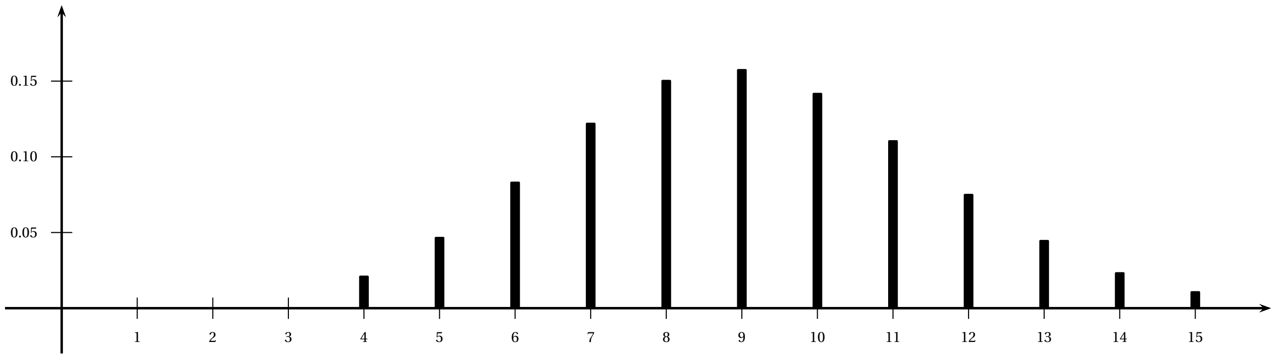
   (c) Soit f la fonction de densité de probabilité de la loi de X. On admet qu'elle est continue sur $[0;1]$ et donc y admet des primitives. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0.
      i. Déduire de la conjecture précédente l'expression de $F(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.
      On pourra, à profit, consulter les rappels, et en particulier le paragraphe 8.1.3, page 105.
      ii. En déduire $f(x)$.

8.2.3 De la loi binomiale à la loi normale

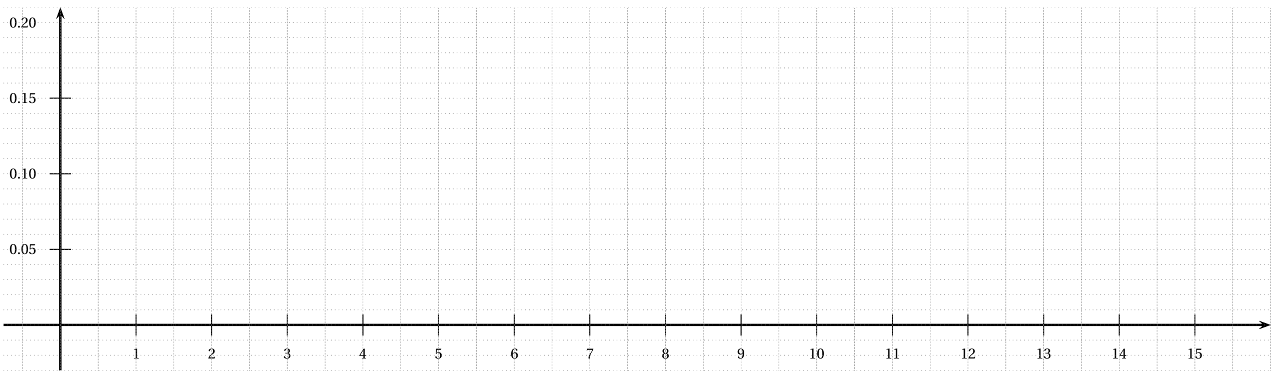
Partie A : Variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(30\,;0{,}3)$

On donne sur la figure ci-dessous, pour $n = 30$ et $p = 0{,}3$, les valeurs approchées des probabilités de cette loi *(seulement celles supérieures à 10^{-2}, les autres ayant été négligées)* ainsi qu'une représentation graphique en bâtons.

k	$\cdots$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\cdots$
$p(X_n = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$



1. Calculer l'espérance μ et l'écart-type σ de X.
2. Représenter dans le repère de la figure ci-dessous l'histogramme où chaque rectangle :
   - est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
   - a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire *(soit ici une unité)* ;
   - a son aire égale à la probabilité *(donc, ici, sa hauteur est égale à la probabilité).*



3. Que vaudrait la somme des aires des rectangles si on avait représenté tous les rectangles possibles *(pas seulement ceux correspondant à une probabilité supérieure à 10^{-2})* ?

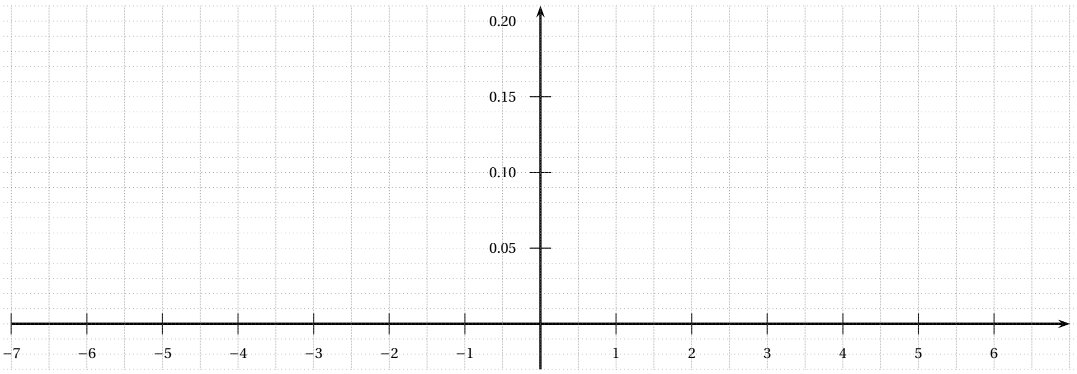
Partie B : Variable aléatoire $Y = X - \mu$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Y telle que : $Y = X - \mu$, où X est la variable aléatoire de la partie A et μ est l'espérance de X.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

k	$\cdots$													$\cdots$
p$(Y = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$

2. Représenter l'histogramme de la loi de probabilité de Y sur le graphique de la figure ci-dessous :



3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y. Que constate-t-on ?

Partie C : Variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

On s'intéresse à présent à la variable aléatoire Z telle que : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, où X est la variable aléatoire de la partie A, μ est l'espérance de X et σ est l'écart type de X.

1. Compléter le tableau ci-dessous (*on arrondira les valeurs de k au centième*).

k	$\cdots$													$\cdots$
p$(Z = k)$	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$

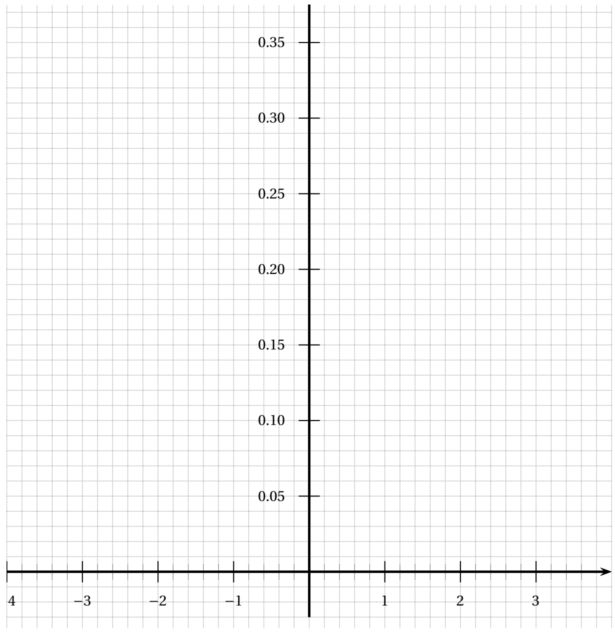
2. On rappelle que chaque rectangle de l'histogramme :
   - est centré sur les différentes valeurs que peut prendre la variable aléatoire ;
   - a sa largeur égale à la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire ;
   - a son aire égale à la probabilité.

   (a) Vérifier que la différence entre deux valeurs successives de la variable aléatoire est constante. *Cette vérification peut se faire à partir des valeurs approchées successives de la variable aléatoire mais surtout, plus sûrement, à partir des valeurs exactes de cette variable aléatoire.*

   (b) Compléter alors le tableau ci-dessous :

k	$\cdots$													$\cdots$
Aire du rectangle	$\cdots$	0,02	0,05	0,08	0,12	0,15	0,16	0,14	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	$\cdots$
Hauteur du rectangle	$\cdots$													$\cdots$

(c) Compléter alors le graphique de la figure ci-dessous avec l'histogramme de la loi Z.

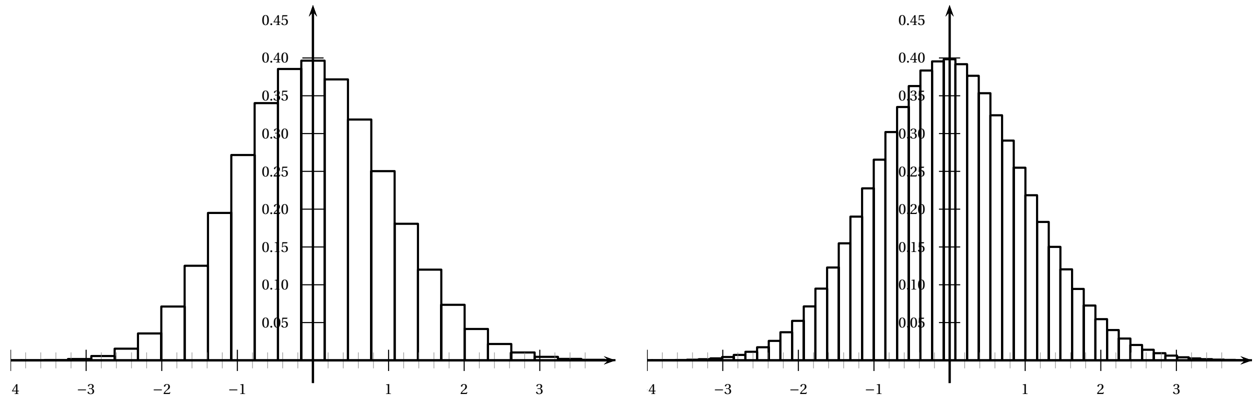


3. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Z. Que constate-t-on ?

Partie D : Pour d'autres valeurs de *n*

Le même travail a été fait sur ordinateur dans les cas où n vaut 50 et 200 et le résultat est sur la figure ci-dessous.

$n = 50$ $n = 200$



Calculer l'espérance et l'écart-type de Z pour $n = 50$ et $n = 200$ et vérifier que ces résultats se retrouvent sur les graphiques.

On obtient des histogrammes dont les positions et les dispersions, lorsque n varie, sont beaucoup plus stables.

On peut constater que plus n augmente, plus le graphique évoque une « cloche ». L'histogramme est limité par l'axe des abscisses et une ligne brisée qui, lorsque n augmente, tend à se confondre avec la représentation graphique d'une fonction f. Le mathématicien Abraham de Moivre a découvert que cette courbe est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

8.3 Bilan et compléments

8.3.1 Loi à densité sur un intervalle

Définition 8.1. On appelle *fonction de densité* sur un intervalle $[a\,;\,b]$ une fonction f telle que :

- f est continue et positive sur $[a\,;\,b]$;
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 1$

Définition 8.2. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;\,b]$, et f une fonction de densité sur $[a\,;\,b]$. On dit que p est la *loi de probabilité de densité* f lorsque, pour tout intervalle $[c\,;\,d]$ inclus dans $[a\,;\,b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d)$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre c et d.

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

Propriété 8.2. *Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;\,b]$, munie d'une fonction de densité f sur $[a\,;\,b]$. Alors :*

- $p(a \leqslant X \leqslant b) = 1$ *et, si* $[c\,;\,d] \subset [a\,;\,b]$, $0 \leqslant p(c \leqslant X \leqslant d) \leqslant 1$.
- *Pour tout* $c \in [a\,;\,b]$, $p(X = c) = 0$ *et* $p(X < c) = p(X \leqslant c)$.
- *Si A et B sont deux intervalles tels que* $A \cap B = \varnothing$ *alors* $p(X \in A \cup B) = p(X \in A) + p(X \in B)$.
- *Pour tout* $c \in [a\,;\,b]$, $p(a \leqslant X \leqslant c) + p(c \leqslant X \leqslant b) = 1$.

Les preuves seront faites en classe.

Espérance mathématique d'une variable aléatoire continue

Définition 8.3. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[a\,;\,b]$, munie d'une fonction de densité f sur $[a\,;\,b]$. On appelle *espérance mathématique de X* le nombre $E(X)$ tel que :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$$

8.3.2 Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

Définition 8.4. Une variable aléatoire continue X suit *la loi uniforme* sur $[a\,;\,b]$ si elle admet comme densité de probabilité la fonction f, **constante**, définie sur $[a\,;\,b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Propriété 8.3. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$. Alors pour tout* $[c\,;\,d] \subset [a\,;\,b]$, $p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$.

La preuve sera faite en classe.

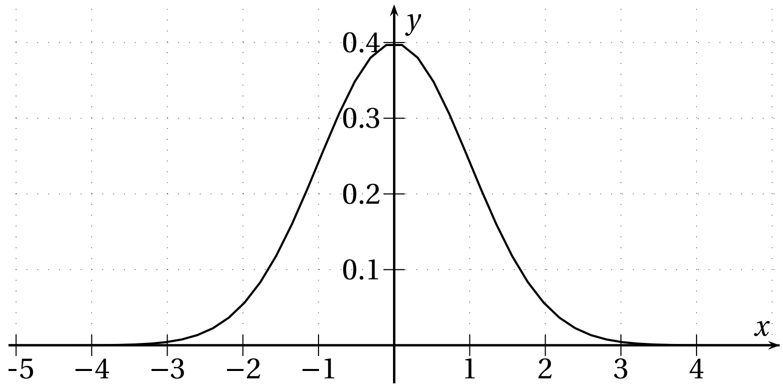
Propriété 8.4. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$. Alors* $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

La preuve sera faite en classe.

8.3.3 Loi normale centrée réduite

Définition 8.5. On dit qu'une variable aléatoire continue suit *la loi normale centrée réduite*, notée $\mathcal{N}(0\,;1)$ lorsqu'elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$



Remarque. • Cette fonction est aussi appelée *densité de probabilité de* LAPLACE-GAUSS.

• Sa courbe est parfois appelée *courbe de* GAUSS.

Propriété 8.5. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors :*

- $E(X) = 0$ *et c'est pour cela qu'on dit que la loi est* centrée *;*
- $\sigma(X) = 1$ *et c'est pour cela qu'on dit que la loi est* réduite.

On l'admettra.

La fonction de densité de probabilité de LAPLACE-GAUSS est bien positive et continue.
La courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car $f(-x) = f(x)$.
On admettra que l'aire sous la courbe de cette fonction de $-\infty$ à $+\infty$ vaut 1.
De ces quelques caractéristiques on peut déduire les propriétés suivantes :

Propriété 8.6. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}(0\,;1)$ et a un réel. Alors :*

- $p(X \in \mathbb{R}) = 1$.
- $p(X \leqslant -a) = p(X \geqslant a)$.
- $p(X \leqslant 0) = p(X \geqslant 0) = 0{,}5$.
- $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a)$.

Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.

8.3.4 Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ

Définition 8.6. Soit X une variable aléatoire continue. On dit que X suit une loi normale de paramètres μ et σ, notée $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Propriété 8.7. *Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$. Alors :*

- $E(X) = \mu$ *;*
- $V(X) = \sigma^2$ *;*
- $\sigma(X) = \sigma$.

Les preuves seront faites en classe.
La fonction de densité de $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ présente quelques caractéristiques bien utiles :

- Elle est positive et continue et l'aire sous sa courbe pour x variant de $-\infty$ et $+\infty$ est égale à 1 (admis).
- Sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.

On peut en déduire les propriétés suivantes :

Propriété 8.8. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$ et a et b deux réels. Alors :*

- $p(X\in\mathbb{R})=1$.
- $p(X\leqslant\mu)=p(X\geqslant\mu)=0{,}5$.
- $p(X\leqslant\mu-a)=p(X\geqslant\mu+a)$.
- $p(X\geqslant a)=1-p(X\leqslant a)$.

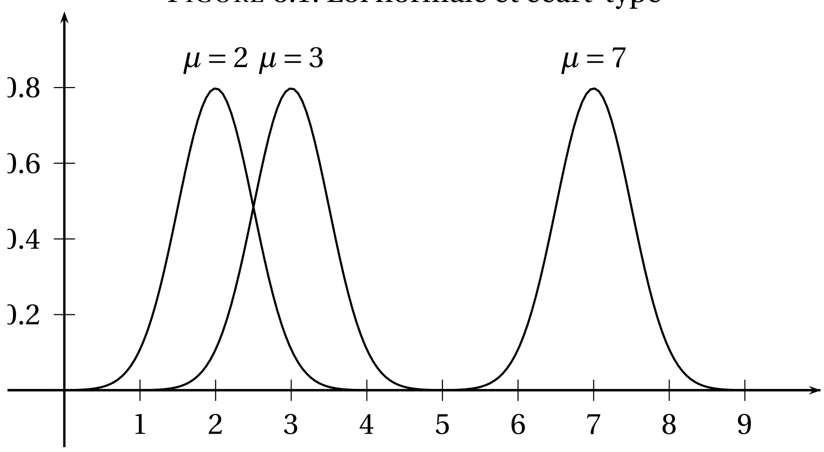
Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.

Loi normale et espérance

On présente sur la figure 8.1 de la présente page trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérances respectives 2, 3 et 7 et d'écart-type 0,5.
On constate qu'à une translation de vecteur $k\vec{\imath}$ près, les courbes sont identiques.

FIGURE 8.1: Loi normale et écart-type

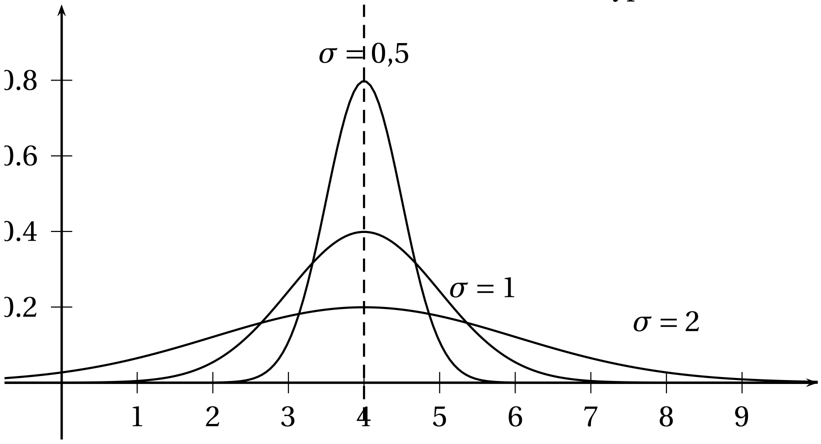


Loi normale et écart-type

On présente sur la figure 8.2 page suivante trois courbes de fonctions de densité de probabilité correspondant à trois lois normales d'espérance 4 et d'écarts-types respectifs 0,5, 1 et 2.
On constate que plus l'écart-type est important et plus la courbe de la fonction de densité est « évasée » et plus le maximum est petit. En effet, un écart-type important signifie que la dispersion des données est importante.
On notera que, dans tous les cas, l'aire sous la courbe de la fonction de densité de probabilité (pour x variant de $-\infty$ à $+\infty$) est égale à 1.

Certaines valeurs dépendant de σ sont à retenir *(par cœur)* :

FIGURE 8.2: Loi normale et écart-type



Propriété 8.9. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$*

- $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$;
- $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$;
- $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.

Cette propriété est illustrée par la figure 8.3 page suivante.

Intérêt de la loi normale

On retrouve la loi normale dans un très grand nombre de distributions dans la nature, dans l'industrie, en économie, en médecine ou dans les sciences sociales car beaucoup de phénomènes naturels, industriels, économiques, physiologiques ou sociaux résultent d'un grand nombre de causes de fluctuations indépendantes.
Ce résultat s'explique mathématiquement par le théorème suivant, qui n'est pas exigible en terminale ES et qu'on admettra, mais qui explique l'intérêt porté à la loi normale :

Théorème. *Lorsque l'on fait la somme d'un très grand nombre de variables aléatoires indépendantes de lois quelconques, cette somme suit une loi normale.*

C'est le cas de la taille ou du poids d'un individu en fonction de son âge dans les premières années de sa vie qu'on retrouve dans les carnets de santé, par exemple.

8.3.5 Loi normale et calculatrice

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.
La fonction de densité de cette loi normale (qu'elle soit centrée ou non, réduite ou non) n'a pas de primitive explicite mais les calculatrices disposent de commandes spécifiques pour calculer, μ et σ étant connus :

- $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$;
- x tel que $p(X \leqslant x) = a$, a étant connu.

Ces commandes sont résumées dans le tableau 8.1 page suivante.

FIGURE 8.3: Un, deux, trois sigmas

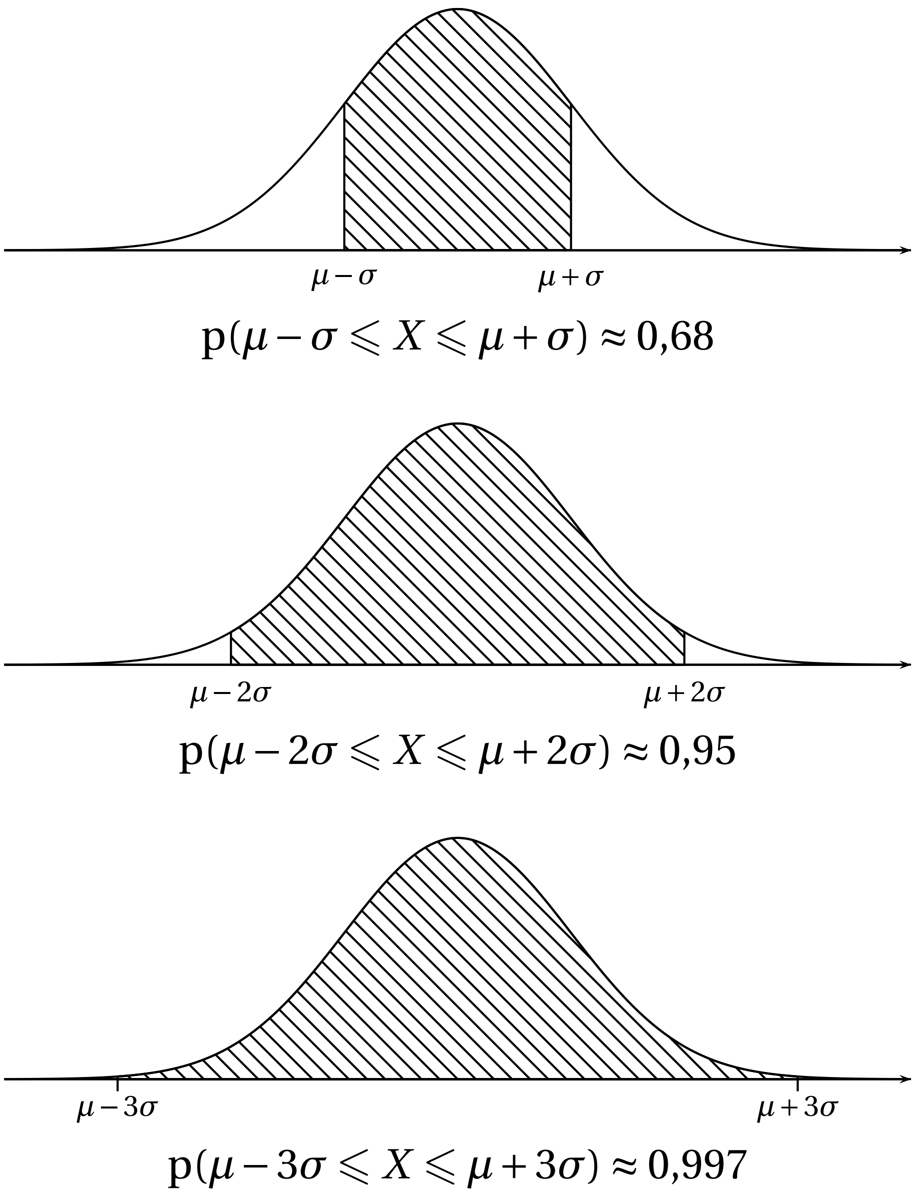


TABLE 8.1: Commandes spécifiques des calculatrices concernant la loi normale

	TI	Casio
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$	DISTR puis 2 : normalFRep(α,β,μ,σ)	Menu Stat Dist Norm NCD puis renseigner Lower = α ; Upper = β ; σ ; μ
x tel que $p(X \leqslant x) = a$	DISTR puis 3 : FracNormale(a,μ,σ)	Menu Stat Dist Norm InvN puis renseigner Area = a ; σ ; μ

Si jamais μ ou σ ne sont pas connus, on pourra repasser par la variable aléatoire $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ qui suit la loi normale centrée réduite donc d'espérance et d'écart-type connus puisqu'alors $\mu_Y = 0$ et $\sigma_Y = 1$ ce qui pourra parfois permettre de retrouver l'espérance et l'écart-type de X.

Pour d'autres calculs, on pourra au besoin utiliser les résultats suivants :

Propriété 8.10. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$ et a et b deux réels. Alors :*

- *Si $a \geqslant \mu$:*
  - $p(X \leqslant a) = p(X \leqslant \mu) + p(\mu \leqslant X \leqslant a) = 0{,}5 + p(\mu \leqslant X \leqslant a)$;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0{,}5 - p(\mu \leqslant X \leqslant a)$.
- *Si $a \leqslant \mu$:*
  - $p(X \leqslant a) = 0{,}5 - p(a \leqslant X \leqslant \mu)$;
  - $p(X \geqslant a) = 1 - p(X \leqslant a) = 0{,}5 + p(a \leqslant X \leqslant \mu)$.

Ces résultats seront prouvés ou illustrés en classe.

Il est conseillé d'être capable de les retrouver graphiquement plutôt que de les apprendre.

8.3.6 Lien entre le discret et le continu

Variable aléatoire discrète	**Variable aléatoire continue**
Univers des valeurs de X fini	Intervalle I infini
Évènement E : partie (sous-ensemble) de l'univers	Évènement J : sous-intervalle de I (ou partie engendrée par des intervalles)
Probabilités $p(X=k)$ où k appartient à l'univers des valeurs possibles pour X $\displaystyle\sum_k p(X=k)=1$	Densité de probabilité f $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
Espérance d'une variable aléatoire discrète X où k appartient à l'univers des valeurs possibles pour X $E(X)=\displaystyle\sum_k k\times p(X=k)$	Espérance d'une variable aléatoire continue X $\displaystyle\int_I t f(t)\,\mathrm{d}t$

8.4 Exercices

8.4.1 Lois à densité

EXERCICE 8.1.
Soit a un réel et f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = ax(1-x)$

1. Déterminer le nombre réel a pour que cette fonction f soit une loi de densité sur $[0;1]$.
2. On considère X une variable aléatoire continue de densité f avec a ayant la valeur trouvée ci-dessus.
   Calculer la probabilité de l'évènement $\{0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}75\}$.

EXERCICE 8.2.
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. f est la fonction définie sur $[0;1]$ par
   $$f(x) = 3x^2$$
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{2})$
   - $p(X \in [0{,}4;0{,}6])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
2. f est la fonction définie sur $[0;2]$ par
   $$f(x) = \frac{x}{2}$$
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[0;2]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$
   - $p(X \in [1;2])$

   (c) Déterminer $E(X)$.
3. f est la fonction définie sur $[-1;]$ par $f(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)$.
   (a) Justifier que f est une fonction de densité sur $[-1;1]$.
   (b) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
   Calculer les probabilités des évènements suivants :
   - $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
   - $p\left(X \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)$

   (c) Déterminer $E(X)$.

EXERCICE 8.3.
On s'intéresse à la durée de vie X, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de densité f, définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, par $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.
Ainsi $p(0 \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années, et λ un réel positif.

1. Calculer $p(0 \leqslant X \leqslant 1)$ en fonction de λ.
2. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18.
   Calculer λ.

EXERCICE 8.4.
On s'intéresse à la fonction $\ln x$, définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. (a) Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.
   (b) Trouver un nombre réel $b > 1$ tel que $\displaystyle\int_1^b \ln x \,\mathrm{d}x = 1$.

   On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\,;b]$.

2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1\,;b]$.
   (a) Calculer $p(X \leqslant 2)$.
   (b) Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

8.4.2 Loi uniforme

EXERCICE 8.5.
Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station 14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0\,;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

EXERCICE 8.6.
Suite à un problème sur sa ligne téléphonique, Christophe contacte le service après-vente de son opérateur. Le conseiller l'informe qu'un technicien le contactera pour une intervention à distance jeude entre 18 h et 19 h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire, donc uniforme, sur le créneau donné, quelle est la probabilité que Christophe attende entre 15 et 40 min ?

EXERCICE 8.7.
Lors de la restitution des notes d'une interrogation notée sur 20, le professeur annonce que, suite à de nombreuses tricheries, il a décidé de noter chaque élève aléatoirement et uniformément entre 5 et 15.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève ait une note supérieure à 12 ?
2. Quelle note un élève peut-il espérer obtenir ?
3. Un élève qui n'a pas triché est effondré à l'annonce de ce système de notation. Il espérait avoir une note supérieure à 14. Pour le rassurer, le professeur lui indique que sa note est supérieure à 12. Quelle est la probabilité que sa note soit supérieure à 14 sachant qu'elle est supérieure à 12 ?

8.4.3 Loi normale

EXERCICE 8.8.
Une étude menée sur l'eau du robinet provenant d'un même captage affirme que la quantité en milligrammes par litre (mg.L^{-1}) de nitrates suit la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type 8. Selon le code de santé publique, la teneur en nitrates doit être inférieure à 50 mg.L^{-1} afin d'assurer la protection des femmes enceintes et des nouveaux-nés.
Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, que l'eau du robinet provenant de ce captage présente, par sa teneur élevée en nitrates, un risque pour la santé ?

EXERCICE 8.9.
Une étude sur le teck, arbre recherché pour la qualité de son bois, affirme que, cinq années après sa plantation, la hauteur d'un tel arbre suit la loi normale de paramètres $\mu = 23$ m et $\sigma = 1{,}5$ m.
Suite à des relevés, le propriétaire d'une exploitation de tecks plantés cinq ans auparavant apprend que la hauteur du plus grand teck sur son exploitation est de 20 m et celle du plus petit teck est de 16 m.
Doit-il s'inquiéter de la croissance des tecks plantés sur son exploitation ?

EXERCICE 8.10.
Le test le plus employé actuellement pour mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) standard est le test de DAVID WECHSLER.
On appelle X la variable aléatoire qui à toute personne choisie au hasard associe son Q.I. mesuré à l'aide de ce test. On admet que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 15$.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un Q.I. entre 90 et 110 ?
2. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. entre 85 et 115 ?
   (b) ayant un Q.I. entre 70 et 130 ?
   (c) ayant un Q.I. entre 55 et 145 ?
3. Quelle est la proportion de personnes :
   (a) ayant un Q.I. supérieur à 115 ?
   (b) ayant un Q.I. supérieur à 130 ?
   (c) ayant un Q.I. supérieur à 145 ?
4. D'après la littérature sur le sujet, une personne est considéré comme un génie si son Q.I. est supérieur à 140. Quelle est la proportion de génies dans la population ?

Remarque. La fiabilité du test de Q.I., censé mesurer l'intelligence, est parfois contestée, certains prétendant que ce test ne mesure pas l'intelligence d'une personne mais seulement sa réussite au test de Q.I.

EXERCICE 8.11.
La taille exprimée en centimètres d'un enfant de cinq ans suit la loi normale d'espérance 105,5 cm et d'écart-type 4,7 cm.

1. Déterminer la probabilité qu'un enfant de cinq ans mesure entre 97 cm et 115 cm.
2. Peut-on affirmer qu'environ 94 % des enfants de cinq ans mesurent entre 97 et 115 cm ? Expliquer.

EXERCICE 8.12.
Le fabricant d'un jeu, après avoir effectué une enquête auprès d'un grand nombre de joueurs, a estimé que les durées des parties constituaient des données gaussiennes avec une moyenne $\mu = 62$ s et un écart-type $\sigma = 6$ s. Ce fabricant annonce : « Vous avez 95 % de chances de jouer chaque partie dans une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s. »

1. Sur quoi se fonde cette affirmation du fabriquant ?
2. Jean, passionné de ce jeu, a joué 40 parties. Peut-on affirmer que 95 % des 40 parties jouées par Jean ont une durée comprise entre 50 s et 1 min 14 s ?

EXERCICE 8.13.
Une machine remplit des paquets de pâtes dont le poids est supposé être de 500 g. On appelle X la variable aléatoire qui à tout paquet rempli par cette machine associe son poids en grammes. On admet que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(500\,;2^2\right)$.

1. On choisit au hasard un paquet rempli par cette machine. Quelle est la probabilité que ce paquet ait un poids compris entre 490 g et 505 g ?
2. Un grand magasin affirme qu'un de ses clients a acheté un paquet de moins de 480 g. Que peut-on en penser ?

EXERCICE 8.14.
La quantité d'eau contenue dans une bouteille d'eau d'une certaine marque, exprimée en litres (L), suit la loi normale d'espérance 1 L et d'écart-type 0,02 L. On choisit au hasard une bouteille de cette marque.

1. Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement un litre ?
2. Préciser, sans calculatrice, la probabilité que cette bouteille contienne entre 0,96 et 1 L.
3. Est-il probable que cette bouteille contienne plus de 1,1 L ? Expliquer.
4. En déduire la probabilité qu'une bouteille choisie au hasard contienne plus d'un litre sachant qu'elle ne peut en contenir au maximum qu'un 1,1 L.

EXERCICE 8.15.
Le fréquence cardiaque est le nombre de pulsations du cœur par minute. La fréquence cardiaque au repos, en abrégé FCR, est la fréquence cardiaque la plus faible rencontrée chez une personne après une longue période de calme. On admet que la FCR d'un sportif régulier (qui pratique un sport 2 à 4 fois par semaine) suit la loi normale de paramètres $\mu = 52$ et $\sigma = 4$.

1. Sans calculatrice, préciser la probabilité (arrondie au centième) que la FCR d'un sportif régulier soit comprise entre 44 et 60.
2. Mehdi, cycliste régulier, affirme qu'il a une FCR comprise entre 38 et 40 pulsations par minutes. Ses camarades sont très sceptiques : sa FCR serait très proche de celle de RICHARD VIRENQUE.
   Que peut-on en penser ? *Argumenter à l'aide d'un calcul.*

EXERCICE 8.16.
La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de type « Française Frissone Pis Noir » (FFPN) peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6\,000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de ce type souhaite disposer de probabilité.
   (a) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise moins de 5 800 L par an.
   (b) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise entre 5 900 et 6 100 L de lait par an.
   (c) Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de ce type produise plus de 6 520 L par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :
   - la production maximale prévisible des 30 % des vaches les moins productives du troupeau ;
   - la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

   Répondre aux souhaits de l'éleveur.

8.4.4 Problèmes

PROBLÈME 8.1.
L'entreprise Granulex distribue un certain aliment dans un contenant métallique dont le poids après remplissage est en moyenne de 340 grammes.
Le poids est distribué normalement avec un écart-type de 4 grammes.
Toutefois on peut ajuster le processus de remplissage pour obtenir une valeur moyenne désirée sans changer l'écart-type.

1. Quelle est la probabilité qu'un contenant choisi au hasard de la production ait un poids entre 334 et 346 g ?
2. Sur une production de 1 000 contenants, combien auront un poids inférieur à 330 grammes ?
3. À quel niveau moyen doit-on fixer le remplissage de sorte que seulement 5 % des contenants aient un poids supérieur à 348 grammes ?

PROBLÈME 8.2.
Un ascenceur peut supporter une charge de 1 000 kg. On admet qu'un individu pris au hasard parmi les utilisateurs de cet ascenseur a une masse, en kg, qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 75$ kg et $\sigma = 16$ kg et que la somme des masses de n personnes dont la masse suit cette loi normale suit elle-même une loi normale de d'espérance $n \times \mu$ et d'écart-type $\sigma \times \sqrt{n}$.

1. L'ascenseur peut-il supporter 9 personnes ?
2. L'ascenseur peut-il supporter 11 personnes ?
3. Quel est le nombre maximum de personnes que l'on peut autoriser à monter dans l'ascenseur si l'on veut que le risque de surcharge ne dépasse pas 10^{-6} ? *Justifier.*

PROBLÈME 8.3.
Lors d'une consultation, le médecin informe le couple Leïla et Nathanaël qu'« un garçon de trois mois pèse en moyenne 5,3 kg » et qu'« il y a 50 % de chances que son poids soit compris entre 4,8 kg et 5,8 kg ». Il ajoute toutefois qu'« il n'y a aucun inquiétude à avoir tant que le poids de l'enfant est *normal* », c'est-à-dire tant qu'il se situe dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$.
Le fils du couple pèse 4,1 kg et est âgé de trois mois.
En admettant que le poids en kilogrammes d'un garçon de trois mois suit une loi normale, la situation est-elle préoccupante ?

PROBLÈME 8.4 (D'après BTS Chimiste 2007)**.**
Deux chaînes de production, A et B, d'un laboratoire pharmaceutique fabriquent en très grande quantité le comprimé d'un nouveau médicament dont la masse théorique de vente est de 900 mg.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un comprimé pris au hasard dans la production de la chaîne A (respectivement B), associe sa masse en milligrammes.
   On sait que X_A (respectivement X_B) suit la loi normale de paramètres $(m_A\,;\,\sigma_A)$ (respectivement $(m_B\,;\,\sigma_B)$).
   Un comprimé est jugée conforme au cahier des charges si sa masse est comprise entre 880 mg et 920 mg.
   (a) On donne $m_A = 896$ mg et $\sigma_A = 10$ mg. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un comprimé pris au hasard dans la chaîne A soit conforme.

(b) On donne $m_B = 900$ mg. La probabilité qu'un comprimé fabriqué par la chaîne B soit conforme est 0,97. Déterminer, à l'unité près, l'écart-type σ_B.

2. Dans la production totale, 40 % des comprimés proviennent de la chaîne A et 60 % de la chaîne B. La chaîne A produit 4 % de comprimés non conformes et la chaîne B en produit 3 %. On prélève au hasard un comprimé dan la production du laboratoire. On note :
   - A l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne A » ;
   - B l'évènement « Le comprimé a été fabriqué par la chaîne B » ;
   - C l'évènement « Le comprimé est conforme ».

   (a) À partir de l'énoncé, préciser les probabilités des évènements A et B ainsi que les probabilités conditionnelles de C sachant A et de C sachant B, notées $p_A(C)$ et $p_B(C)$.

   (b) Calculer alors la probabilité $p(C)$ de l'évènement C.

   (c) On prélève un comprimé au hasard dans la production et on constate qu'il est conforme. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il provienne de la chaîne A.

PROBLÈME 8.5.
Une entreprise fabrique en grande série des tubes de 2 m de longueur à utiliser lors d'une installation électrique. Si une plus grande longueur est nécessaire lors de l'installation, ces tubes sont prévus pour s'emboîter les uns dans les autres grâce à une forme évasée à l'une des deux extrémités.
Dans ce problème, les résultats seront à arrondir à 10^{-3}.
Un tube fabriqué par cette entreprise est dit conforme lorsque le diamètre d_1 de l'extrémité de forme évasée du tube, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[17{,}5\,;\,18{,}5]$ **et** lorsque le diamètre d_2 de l'autre extrémité, exprimé aussi en millimètres, appartient à l'intervalle $[15{,}5\,;\,16{,}5]$.

1. On note D_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire D_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(18\,;\,0{,}2^2\right)$.
   Calculer $p(17{,}5 \leqslant D_1 \leqslant 18{,}5)$.

2. On note D_2 la variable aléatoire qui, à chaque tube prélevé au hasard dans la production de cette entreprise, associe le diamètre en millimètres de l'extrémité de forme non évasée du tube.
   On suppose que la variable aléatoire D_2 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(16\,;\,\sigma_2^2\right)$.
   On admet que $p(15{,}5 \leqslant D_2 \leqslant 16{,}5) = 0{,}97$.
   Déterminer une valeur approchée au centième près de l'écart-type σ_2.

3. On admet que : $p(\{17{,}5 \leqslant D_1 \leqslant 18{,}5\} \cap \{15{,}5 \leqslant D_2 \leqslant 16{,}5\}) = 0{,}98$.
   Interpéter ce résultat.

PROBLÈME 8.6.
Dans une population, la glycémie, taux de sucre dans la sang, exprimée en grammes par litre (g.L^{-1}), vérifie les résultats suivants :

- 15 % des individus présentent une glycémie inférieure à 0,82 g.L^{-1} ;
- 20 % des individus présentent une glycémie supérieure à 0,95 g.L^{-1}.

On suppose que la glycémie de cette population suit une loi normale.

1. Déterminer l'espérance et l'écart-type de cette loi.
2. Préciser la probabilité d'avoir un taux de glycémie *normal*, c'est-à-dire compris entre $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.
3. L'hyperglycémie correspond à une glycémie supérieure à 1,26 g.L^{-1}.
   Quelle est la probabilité pour un individu de cette population de souffrir d'une hyperglycémie ?

PROBLÈME 8.7.
Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut-être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La machine peut être réglée pour modifier la valeur moyenne sans changer l'écart-type.
La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur minimum de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?
2. La contenance maximale des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?
3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1 % de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
   (a) Quelle est alors la valeur de μ ?
   (b) Quelle est, dans les conditions de la question précédente, la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?
   (c) Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles de moins d'un litre **et** moins de 1 % de bouteilles qui débordent.

PROBLÈME 8.8.
Un appareil portatif multimédia fabriqué par la société Multisonic est garanti contre tout défaut de fabrication durant une période de 2 ans.
D'après l'expérience de la compagnie, il y a un appareil sur 1 000 qui présente une défectuosité majeure dans des conditions normales d'utilisation, 26 mois après l'achat.
D'autre part, les chances d'observer une défectuosité majeure durant les 52 mois suivant l'achat sont de 975 sur 1 000.
Supposons que le temps requis après l'achat pour qu'une défectuosité majeure survienne est distribué normalement.
Quelle est la probabilité qu'un appareil présente une défectuosité majeure avant la fin de sa période de garantie ?