

## Devoir surveillé n° 4

### Comptage de chaînes

EXERCICE 4.1 (2 points).

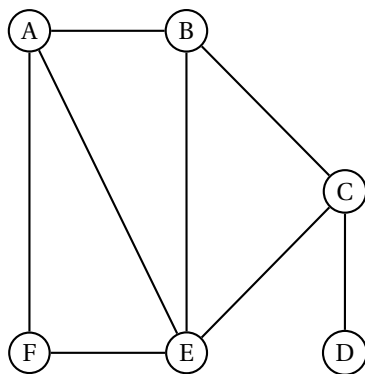
La matrice  $M$  ci-dessous est la matrice d'adjacence d'un graphe  $G$  :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construire le graphe  $G$ .

EXERCICE 4.2 (5 points).

On donne le graphe  $G$  ci-dessous :



1. Répondre aux questions suivantes en justifiant brièvement :

- (a) Ce graphe est-il complet ?
- (b) Ce graphe est-il connexe ?
- (c) Ce graphe est-il eulérien ?

2. (a) Donner sa matrice d'adjacence  $M$ , les sommets étant considérés dans l'ordre alphabétique.
- (b) Donner le nombre de chaînes de longueur 4 entre les sommets  $A$  et  $D$  en expliquant comment ce nombre a été obtenu puis donner la liste de ces chaînes.

EXERCICE 4.3 (8 points).

On donne la matrice d'adjacence  $M$  d'un graphe  $G$  et quelques unes de ses puissances. Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses soigneusement uniquement à l'aide des matrices données.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 & 4 & 13 & 8 & 8 \\ 9 & 23 & 9 & 15 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 15 & 2 & 6 & 2 \\ 13 & 4 & 7 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- Quel est l'ordre du graphe  $G$  ?
- Ce graphe est-il orienté ?
- Quel est le degré du sommet 3 ?
- Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Une chaîne eulérienne ?
- Quelle est la distance entre le sommet 2 et le sommet 7 ?
- Quel est le diamètre de  $G$  ?
- Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 qui partent du sommet 6 et qui y reviennent ?
- Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui partent du sommet 3 et qui n'y reviennent pas ?