Devoir surveillé n° 4

Fonction exponentielle – Probabilités conditionnelles

EXERCICE 4.1 (5 points)**.**
Pierre pratique la course à pied plusieurs fois par semaine. Il a trois parcours différents, notés A, B et C et deux types de séances d'entraînement : Endurance, notée E et Vitesse, notée V.
Chaque fois que Pierre va courir, il choisit un parcours (A, B ou C), puis un type d'entraînement (E ou V).

Pierre va courir aujourd'hui.
On considère les évènements suivants :
A : « Pierre choisit le parcours A »
B : « Pierre choisit le parcours B »
C : « Pierre choisit le parcours C »
E : « Pierre fait une séance d'endurance »
V : « Pierre fait une séance de vitesse »

On sait que :
- Pierre choisit le parcours A dans 30 % des cas et le parcours B dans 20 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours A, alors il fait une séance d'endurance dans 40 % des cas ;
- si Pierre choisit le parcours B, alors il fait une séance d'endurance dans 80 % des cas.

1. Faire un arbre de probabilité décrivant la situation ci-dessus.
2. Déterminer la probabilité que Pierre choisisse le parcours A et une séance de vitesse.
3. On sait que Pierre fait une séance d'endurance dans 70 % des cas. Montrer que : $p(E \cap C) = 0,42$.
4. On sait que Pierre a choisi le parcours C. Quelle est la probabilité qu'il fasse une séance d'endurance ?

EXERCICE 4.2 (3 points)**.**
Les questions sont indépendantes. Les réponses seront arrondies au centième.

1. Un capital est placé à intérêts composés à un taux annuel de 5 % pendant 10 ans. À quel taux annuel faudrait-il le placer pour qu'il rapporte la même somme en 7 ans ?
2. Le cours d'une action a baissé de 20 % sur 4 mois. Déterminer la baisse mensuelle moyenne.

EXERCICE 4.3 (9 points)**.**
Une entreprise fabrique chaque mois x tonnes d'un certain produit, avec x appartenant à l'intervalle $]0;6]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de x tonnes est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0,01\mathrm{e}^{x} + 2}{x}.$$

1. À l'aide de la calculatrice :
   (a) conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0;6]$;
   (b) estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;
   (c) dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4 000 euros. On précisera la méthode utilisée.
2. On désigne par C' la fonction dérivée de la fonction C. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;6]$:
$$C'(x) = \frac{0,01x\mathrm{e}^{x} - 0,01\mathrm{e}^{x} - 2}{x^2}.$$
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;6]$ par :
$$f(x) = 0,01x\mathrm{e}^{x} - 0,01\mathrm{e}^{x} - 2.$$
   On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0;6]$
$$f'(x) = 0,01x\mathrm{e}^{x}.$$
   (b) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;6]$.
   (c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $[4;5]$.
   Donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.
   (d) Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;6]$.
4. À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit.

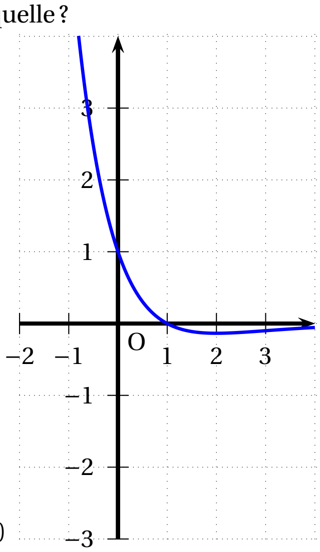
EXERCICE 4.4 (3 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

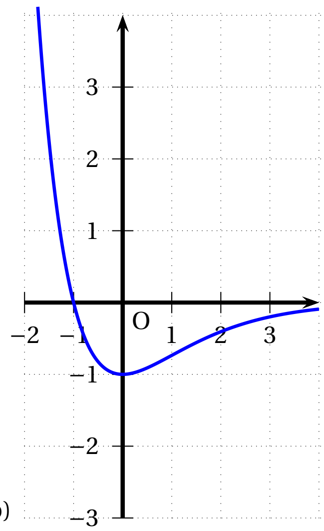
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 *point ; une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est attendue.*

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout réel x on a :
   (a) $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (b) $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ (c) $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$
2. La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est
   (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}$ (c) $0,303$
3. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g telle que $g' = f$.
   Laquelle ?

(a) 

(b) 

(c)