Devoir surveillé n° 3

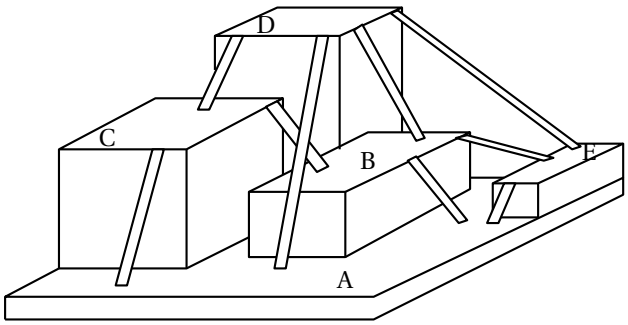
Graphes eulériens

EXERCICE 3.1.
On considère un espace de jeu réservé à des enfants.

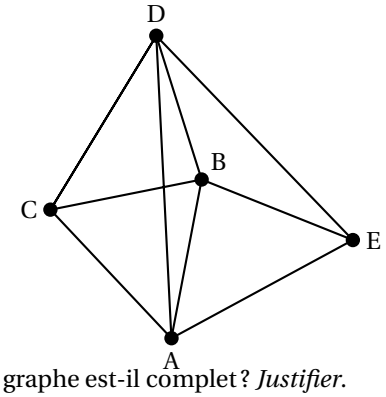
Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E.

A est la plate-forme de départ.

Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-contre.



Partie A
On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-dessous où une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.



1. Ce graphe est-il complet ? *Justifier.*
2. Ce graphe est-il connexe ? *Justifier.*
3. Ce graphe contient-il un sous-graphe complet d'ordre 3 ? Et d'ordre 4 ? *Si la réponse est oui, on indiquera les sommets par lequel ce sous-graphe est engendré.*
4. Ce graphe contient-il une chaine eulérienne ? *Justifier.*

Partie B
Une étude a montré que sur ce genre de structure les déplacements des usagers étaient plus ou moins fluides et a classé ces structures en trois catégories :

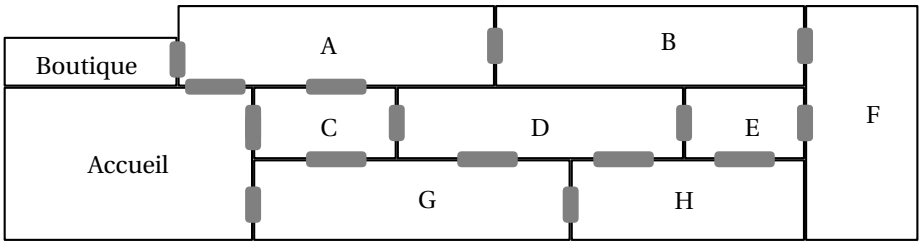
Catégorie 1 : déplacements très peu fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il n'existe pas de trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe.

Catégorie 2 : déplacements assez fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il existe au moins un trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe mais que ce trajet ne démarre pas sur la plate-forme de départ.

Catégorie 3 : déplacements très fluides ; c'est le cas lorsque, sur la structure, il existe au moins un trajet permettant d'emprunter une et une seule fois chaque rampe et que ce trajet démarre sur la plate-forme de départ.

Déterminer dans quelle catégorie est la structure et, si jamais elle n'est pas dans la catégorie 3, proposer une modification simple permettant qu'elle soit dans cette catégorie.

EXERCICE 3.2.
Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.



1. Est-il possible de trouver un trajet où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ? *On justifiera très rigoureusement.*
2. Si oui, donner un tel trajet ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel trajet.