

FONCTIONS CIRCULAIRES

1 Enroulement de la droite des réels

Définition 1

On se place dans le plan.

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé sens direct (ou positif). L'autre sens est appelé sens indirect (négatif ou rétrograde).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi sens trigonométrique).
- Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

ACTIVITÉ 1

Soit un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I .

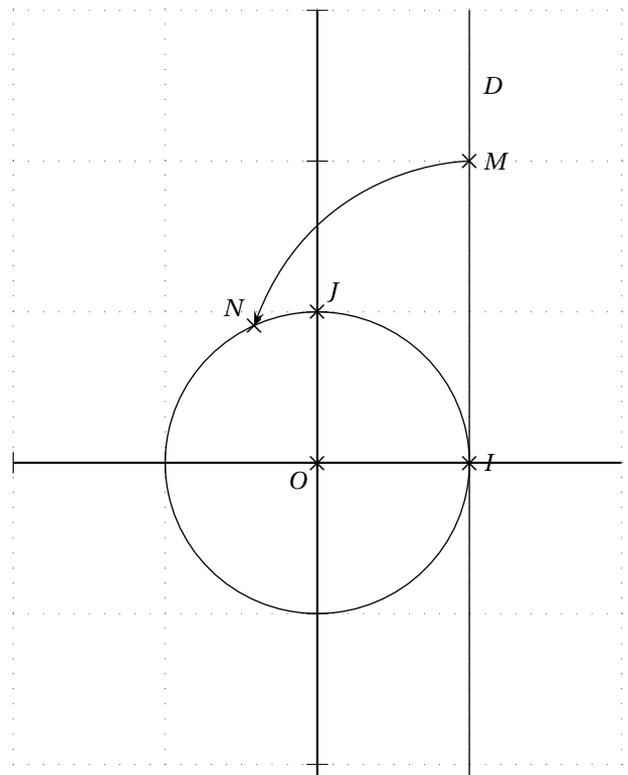
À tout nombre a , on associe le point M de la droite D , d'abscisse 1 et d'ordonnée a .

« L'enroulement » de la droite D autour du cercle \mathcal{C} met en coïncidence le point M avec un point N de \mathcal{C} .

Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\widehat{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\widehat{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le point N est le point du cercle \mathcal{C} associé au nombre a .

1. Placer les points $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9$ de la droite D dont les ordonnées respectives sont : $0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \pi; -\pi; 2\pi$ et -2π (refaire le dessin sur votre feuille au besoin).
2. Placer les points $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9$ du cercle associés à ces nombres.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points $I, J, B(-1; 0)$ et $B'(0; -1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J .



2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 2

La mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Avec les notations de l'activité précédente, la mesure de l'angle \widehat{ION} en radian est égale à la longueur \widehat{IN} , c'est-à-dire à a .

EXERCICE 1

Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc \widehat{IN}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en radian de l'angle \widehat{ION}							
Mesure en degré de l'angle \widehat{ION}							

3 Cosinus et sinus d'un réel x

ACTIVITÉ 2

Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc \widehat{IN}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Abscisse de N							
Ordonnée de N							

Définition 3

Soit x un réel et N le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos x = x_n \quad \sin x = y_n \quad \text{et, quand } \cos x \neq 0, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriété 1

Pour tout réel x on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXERCICE 2

1. Compléter le tableau suivant :

x	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$													
$\sin x$													
$\tan x$													

2. Tracer dans trois repères orthogonaux (ordonnées : 5 cm = une unité ; abscisses : 6 cm = π unités) les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.
3. Dresser le tableau des variations de ces fonctions pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$