Chapitre 5

Fonction exponentielle

Sommaire

5.1 Activité

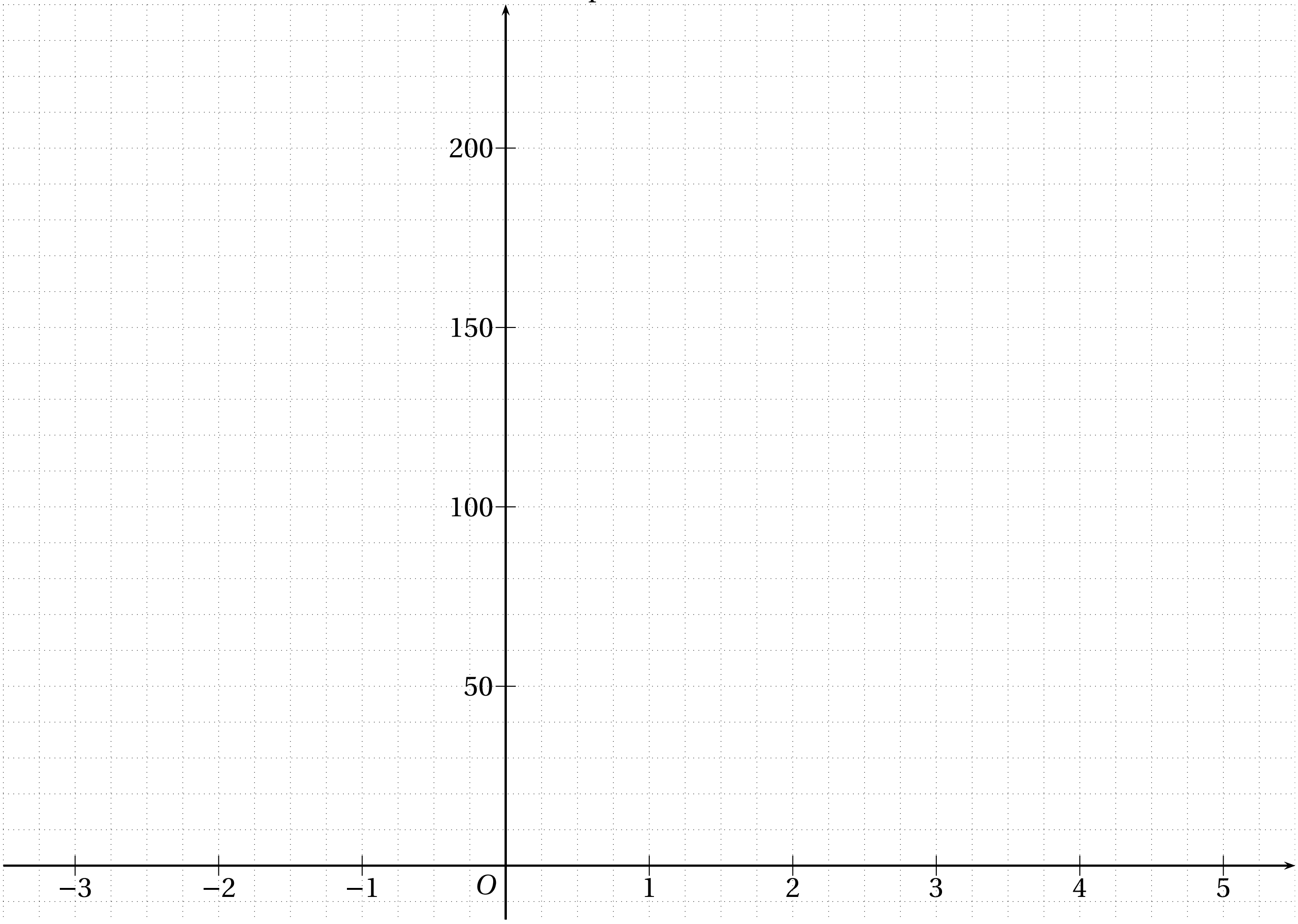
ACTIVITÉ 5.1 (Une nouvelle fonction)**.**
Max a placé le 1er janvier 2000 un capital de 100 € à intérêts composés à un taux annuel de 20 % [1].
Il peut à tout moment retirer le capital augmenté des intérêts produits.
On appelle C_n le capital disponible le 1er janvier de l'année $2000 + n$. Ainsi $C_0 = 100$.

1. (a) Déterminer C_1, C_2, C_3 et C_4. De quelle nature est la suite (C_n) ?
On précisera ses caractéristiques.

   (b) Représenter la suite dans le repère de la figure 5.1 page suivante.
On rappelle que la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage constitué des points $(n\,;\,u_n)$.
Les points sont-ils alignés ?

1. Les taux d'intérêt sont en général plutôt de l'ordre de 3 à 4 %, la situation de l'activité est donc purement fictive.

FIGURE 5.1: Repère de l'activité 5.1



2. Le 30 juin 2003, un imprévu oblige Max à retirer l'intégralité de son capital. La banque lui reverse alors sur son compte 189,29 €. Max est surpris car ce montant ne lui semble correspondre à rien. Après renseignement, il apprend que la banque a transformé son taux annuel de 20 % en un taux mensuel équivalent. Max n'a pas bien compris mais n'a pas osé insister et il vous demande d'essayer de déterminer ce taux.

   (a) Soit t un taux mensuel quelconque.

      i. Que devient un capital C placé à ce taux mensuel au bout d'un an ?

      ii. En déduire que le taux mensuel t appliqué par la banque est solution de l'équation :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2$$

      iii. Déterminer, en tatonnant à la calculatrice, une valeur approchée de t à 10^{-3} près et vérifier que ce taux donne bien la somme versée par la banque.

   (b) Étienne, un ami de Max, après avoir pris connaissance de votre travail, vous demande s'il n'y a pas plus simple.
   « Regarde : au bout de trois ans, le capital de Max est $100 \times 1{,}2^3$, au bout de quatre ans, il est de $100 \times 1{,}2^4$ et bien au bout de trois ans et demi, il doit être de $100 \times 1{,}2^{3,5}$. Non ? »
   Julie est intriguée par la proposition d'Étienne :
   « Je ne comprend pas ce que veut dire "1,2 exposant 3,5" ».
   « Moi non plus, répond Étienne, mais essayons de voir ce que cela donne à la calculatrice ».

i. Regarder, à la calculatrice, si le calcul proposé par Étienne donne la somme versée par la banque.
ii. Représenter la courbe de la fonction $f(x) = 1{,}2^x$ dans le repère de la figure 5.1 pour x positif. Que constate-t-on ?
iii. Compléter le tracé pour x négatif. Comment interpréter cette partie de la courbe ?

ACTIVITÉ 5.2 (Recherche d'une valeur particulière)**.**
On considère la fonction f_q définie sur $\mathbb{R}$ par $f_q(x) = q^x$ où q est un réel strictement positif. On nomme $\mathscr{C}_q$ sa représentation graphique dans un repère et T_q sa tangente au point d'abscisse 0.

1. À l'aide de sa calculatrice, représenter les courbes $\mathscr{C}_q$ pour les valeurs de q suivantes :
   - $q = 2$
   - $q = 3$
   - $q = 5$
   - $q = 1$
   - $q = 0{,}9$
   - $q = 0{,}5$
2. Ces courbes semblent concourantes en un même point. Donner ses coordonnées.
3. Faire apparaître dans le tableau de valeur de votre calculatrice les nombres dérivés des fonctions et indiquer, lorsque le réel q croit, comment varie le coefficient directeur de la tangente T_q.
4. En tatonnant à la calculatrice, modifier la valeur de q pour obtenir une valeur approchée au dixième puis au centième de la valeur pour laquelle le coefficient directeur de T est 1.

5.2 Fonctions exponentielles de base q ($q > 0$)

5.2.1 Définition

Définition 5.1. Soit q un réel strictement positif.
On appelle *fonction exponentielle de base q*, la fonction f_q définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_q(x) = q^x$$

5.2.2 Propriétés algébriques

On admettra la propriété suivante :

Propriété 5.1. *La fonction exponentielle de base q transforme les sommes en produits :*

$$q^{x+y} = q^x \times q^y$$

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers, s'étendent aux exposants réels non entiers. On a alors :

Propriété 5.2. *Pour tous réels q et p strictements positifs et pour tous réels x et y, on a :*
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$
- $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$
- $\left(q^x\right)^y = q^{xy}$
- $q^x p^x = (qp)^x$

Preuve.

- $q^{-x} \times q^x = q^{-x+x} = q^0 = 1$ donc q^{-x} est l'inverse de q^x donc $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.
- $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = q^x \times \frac{1}{q^y} = \frac{q^x}{q^y}$
- On admettra les deux derniers points.

♢

5.2.3 Cas particulier : racines n-ièmes d'un réel q ($q > 0$)

Propriété 5.3. *Soit q un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. Alors le nombre $a = q^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre positif tel que $a^n = q$. On l'appelle la racine n-ième de q (on le note parfois $\sqrt[n]{q}$).*

Preuve. En effet $a^n = \left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q^{\frac{1}{n}\times n} = q^1 = q$.
On admettra que ce nombre est unique. ◊

Remarque. Dans le cas de la racine "deuxième", on retrouve la racine carrée et on peut omettre le 2 dans la notation $\sqrt[2]{q}$.

Exemple 5.1. Dans l'activité au point 2(a)ii, où $t \geqslant 0$, on peut résoudre l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2 &\Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} = 1{,}2^{\frac{1}{12}}\\ &\Leftrightarrow \frac{t}{100} = 1{,}2^{\frac{1}{12}} - 1\\ &\Leftrightarrow t = 100\left(1{,}2^{\frac{1}{12}} - 1\right) \approx 1{,}531\end{aligned}$$

5.2.4 Étude des fonctions $x \mapsto q^x (q > 0)$

Propriété 5.4. *Pour $q > 0$ la fonction $x \mapsto q^x$ est :*

- *définie sur $\mathbb{R}$*
- *strictement positive*
- *convexe sur $\mathbb{R}$ si $q \neq 1$*
- *et, selon les valeurs de q on a les propriétés résumées dans le tableau 5.1 de la présente page.*

TABLE 5.1: Propriétés de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q

Lorsque $0 < q < 1$	**Lorsque** $q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante
$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x = 0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} q^x = +\infty$

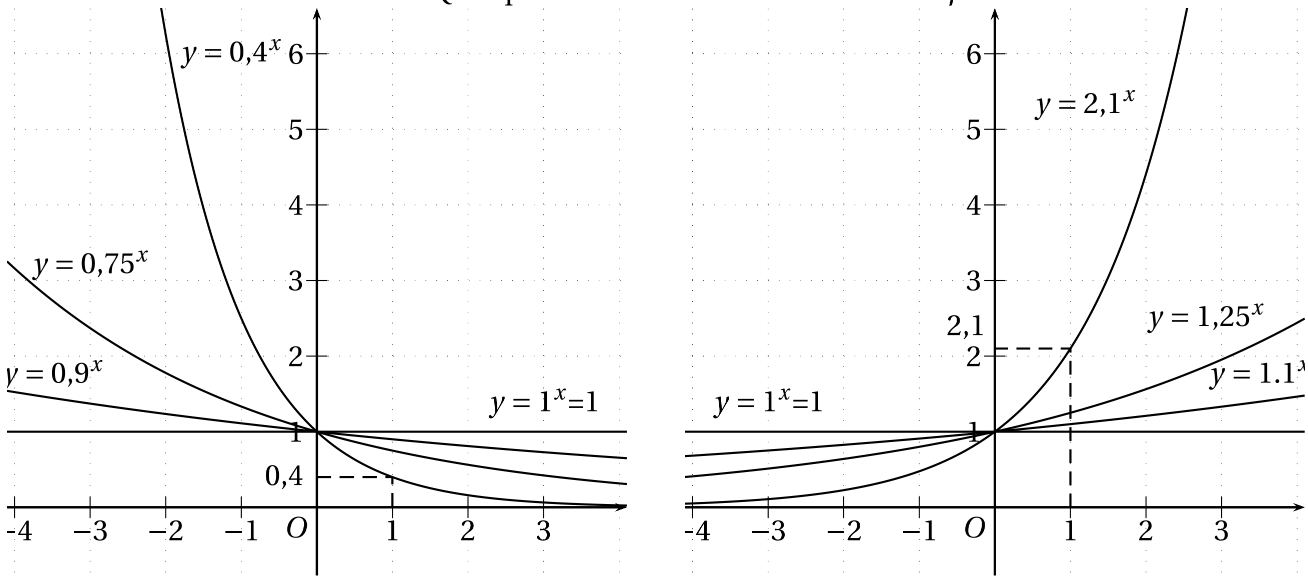
On l'admettra.

Courbes représentatives

Trois types de courbes, donc, selon si $0 < q < 1$, si $q = 1$ ou si $q > 1$. Plusieurs exemples sont donnés sur la figure page suivante.
On remarquera que, pour tout réel q ($q > 0$) :

- $q^0 = 1$ et donc toutes les courbes passent par le point $(0; 1)$;
- $q^1 = q$ et donc toutes les courbes passent par le point $(1; q)$.

FIGURE 5.2: Quelques courbes selon les valeurs de q



5.3 Fonction exponentielle de base e

Propriété 5.5. *Il existe une unique valeur de q telle que la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1. Cette valeur particulière est notée e et on a $e \approx 2{,}718$.*

Définition 5.2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle *la fonction exponentielle* et est parfois notée $x \mapsto \exp(x)$.

Comme toutes les fonctions exponentielles de base $q > 1$, on a :

Propriété 5.6. *La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est :*

- *définie sur $\mathbb{R}$*
- *convexe sur $\mathbb{R}$*
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- *strictement positive*
- *strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Les propriétés algébriques sont aussi vérifiées :

Propriété 5.7. *Pour tous réels x et y on a :*

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^y = e^{x\times y}$

Enfin, on admettra que :

Propriété 5.8. *Pour tout réel x $\exp'(x) = e^x$.*

5.4 Fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

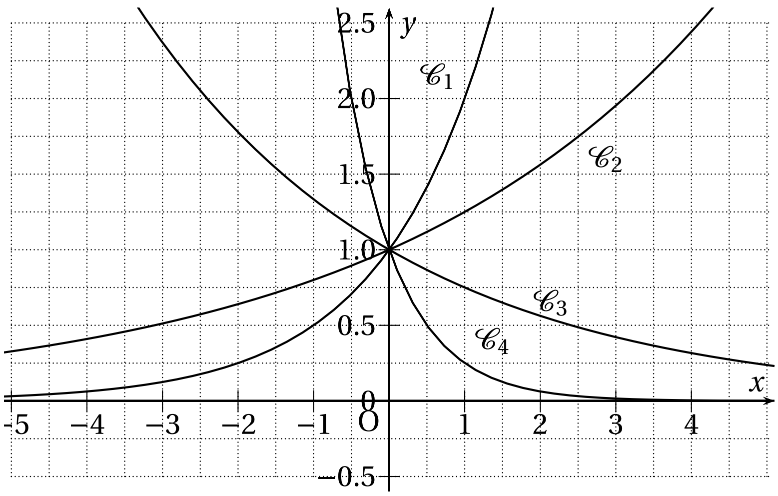
Propriété 5.9. *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto u'(x) \times e^{u(x)}$*

Propriété 5.10. *Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations.*

5.5 Exercices

5.5.1 Technique

EXERCICE 5.1.
Dans le repère de la figure ci-dessous quatre fonctions exponentielles sont représentées. Identifier la base q de la fonction exponentielle associée à chacun de ces courbes.



EXERCICE 5.2.
Simplifer chacune des expressions suivantes :

- $A = 1{,}25^{\frac{1}{3}} \times 1{,}25^{\frac{5}{3}}$
- $B = \frac{1{,}21^{1{,}43} \times 1{,}21^{3{,}17}}{1{,}21^{4{,}1}}$
- $C = \left(0{,}87^{1{,}2}\right)^5 \times 0{,}87^{-4}$
- $D = (1 - 0{,}81^x)^2 - 0{,}9^{4x}$

EXERCICE 5.3.
Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres suivants :

- $A = \exp(-2)$
- $B = \exp(0{,}8) \times \exp(1) \times \exp(1{,}2)$
- $C = \frac{\exp(1{,}23}{\exp(0{,}23)}$

EXERCICE 5.4.
Simplifier chacune des expressions :

- $A = \frac{e^{1{,}5}}{e}$
- $B = \left(e^{0{,}5}\right)^4 \times e^{-1}$
- $C = (e^x \times e^{-x})^2$
- $D = \left(\frac{e^{1+0{,}25x}}{e^{1-0{,}25x}}\right)^2$

EXERCICE 5.5.
Simplifer les expressions suivantes :

1. $\frac{e^{2x}}{e^x}$
2. $(e^x + 1)(e^x - 1)$
3. $\left(e^{x+1}\right)\left(e^{x-1}\right)$
4. $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$

5.5.2 Études de fonctions comportant e^x

EXERCICE 5.6.
Dériver chacune des fonctions suivantes :

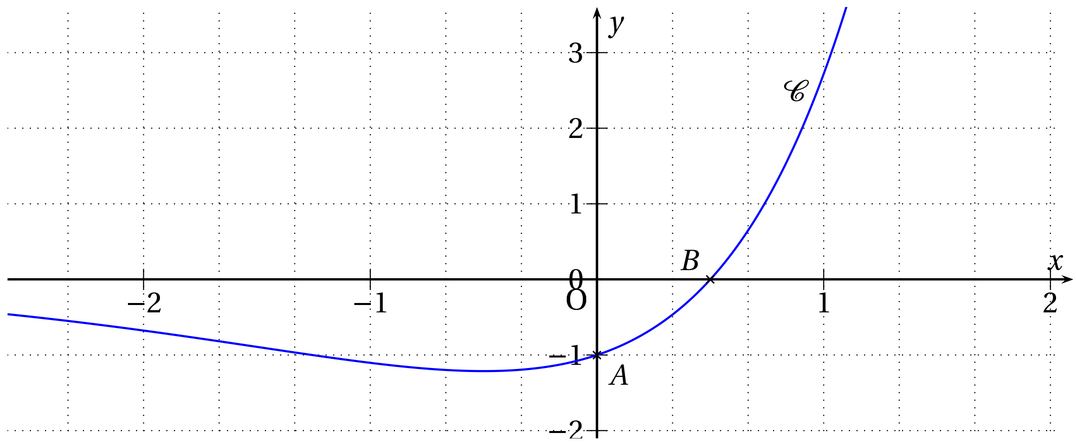
- $f(x) = 3 - 2e^x$
- $k(x) = \frac{1+x}{e^x}$
- $g(x) = 1 + x + e^x$
- $h(x) = (1 + x)e^x$
- $l(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$

EXERCICE 5.7.
Étudier les variations de g, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

EXERCICE 5.8.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$d'unité 1 cm.

1. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.
3. On donne $f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x-1)^3}$.
   Étudier la convexité de f et montrer que sa courbe admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées $(x_I\,;\,y_I)$.
4. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en I. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

EXERCICE 5.9.
On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure ci-dessous.



1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Montrer que f', la dérivée de f, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis en déduire le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et la tracer sur le graphique.
3. Étudier la convexité de f et déterminer si $\mathscr{C}$ admet des points d'inflexions.

5.5.3 Études de fonctions comportant e^u

EXERCICE 5.10.
Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = e^{-0,5x}$
- $g(x) = x + e^{-x}$
- $h(x) = 3e^{1-2x}$
- $k(x) = \frac{1}{2}e^{-0,5x^2}$

EXERCICE 5.11.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = e^{(x^2)}$
3. $f(x) = (e^x)^2$
4. $f(x) = e^{-x}$
5. $f(x) = 3e^{2x} - 5e^x$
6. $f(x) = xe^{-x}$
7. $f(x) = (2x+1)e^{2x}$
8. $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$
9. $f(x) = \frac{2}{8+e^{-x}}$

EXERCICE 5.12 (D'après France métropolitaine, Réunion – Septembre 2009).
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
3. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
   Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;8]$ dans le plan.

EXERCICE 5.13 (D'après Polynésie – Septembre 2007).
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0\,;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)\mathrm{e}^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
3. Étudier la convexité de f et l'existence de point d'inflexion pour sa courbe.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\,;4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q+1)\mathrm{e}^{-q}$.
À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

EXERCICE 5.14 (Métropole – La Réunion – Septembre 2007)**.**
La courbe ($\mathscr{C}$) donnée sur la figure 5.3 de la présente page, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

Partie I : Lectures graphiques

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

Partie II : Étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 5.3, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

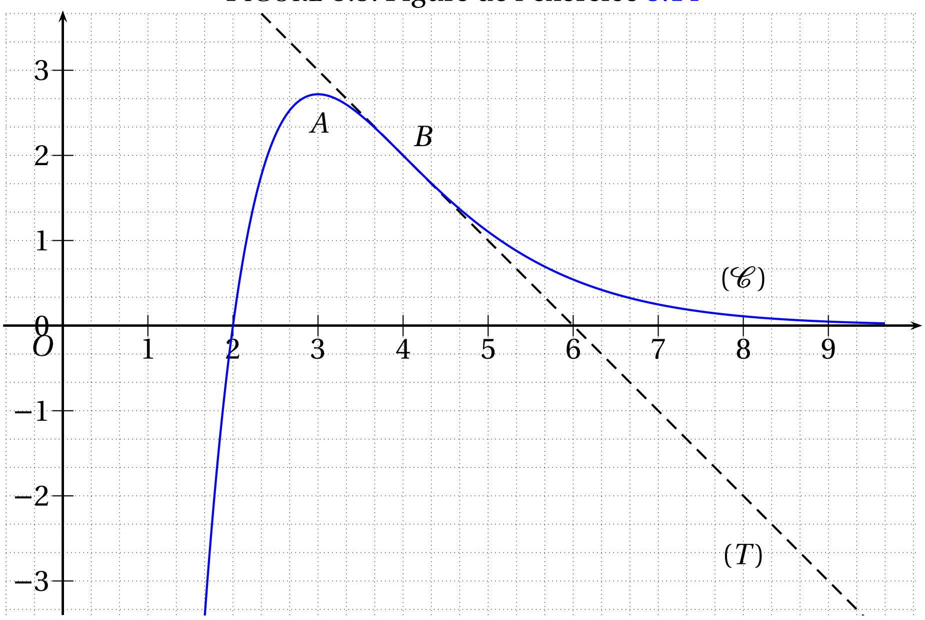
1. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

Partie III : Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1{,}8 \leqslant x \leqslant 4{,}5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1{,}8\,;\,4{,}5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

FIGURE 5.3: Figure de l'exercice 5.14



5.5.4 Problèmes

PROBLÈME 5.1.
Un banquier propose à son client un placement au taux annuel de 3,5 % sur 10 ans. Quel taux le client doit-il négocier avec son banquier pour obtenir au moins la même somme S en 7 ans et demi ?

PROBLÈME 5.2.
Une personne se demande en combien de temps son capital C_0 doublera en le laissant placé aux taux annuels de t %.
À l'aide d'un algorithme de seuil, déterminer le nombre d'années qu'il faut pour que le capital C_0 double dans chacun des cas suivants :

- $t = 1$
- $t = 2$
- $t = 3$
- $t = 5$
- $t = 6$

PROBLÈME 5.3.
Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998.
On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998
rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter l'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 0,5 cm représente un an sur l'axe des abscisses ;
   - 0,5 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Cette évolution est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 85{,}115(0{,}905)^x$, où x désigne le rang de l'année, et y le pourcentage de logiciels piratés.
   (a) Quel est le sens de variation de f ?
   (b) Représenter $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, dans le même repère que celui utilisé au 1.
   (c) Peut-on dire que le pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998 a une décroissance exponentielle ? Pourquoi ?
   (d) Donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en France en 2 004. Vérifier graphiquement.

PROBLÈME 5.4 (Amérique du nord – 2 005)**.**
Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   (b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

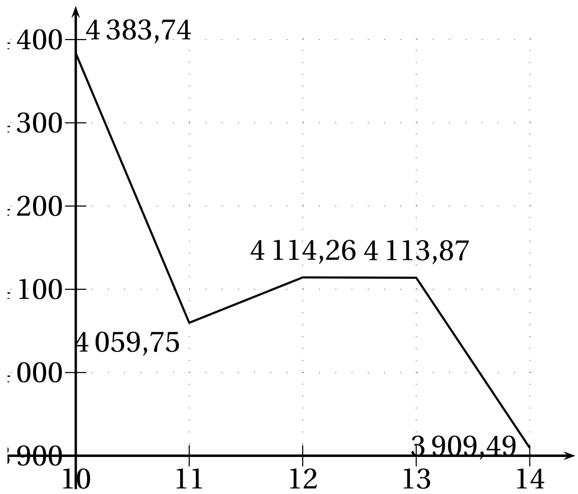
PROBLÈME 5.5.

Le CAC 40 est un indice de valeurs françaises, concernant les 40 plus importantes valeurs cotées à la bourse de Paris (Michelin, France Télécom, Alcatel, etc.). Le Dow Jones est un équivalent à New York du CAC 40.

Voici un extrait du *Journal des Finances* du 15 au 21 septembre 2 001 :

Cotations : Violente rechute *par* ROLAND LASKINE

Après le choc du 11 septembre qui a fait plonger, mardi, toutes les places boursières mondiales, les investisseurs se sont ressaisis, refusant de céder au marasme ambiant. Vendredi, la crainte d'une reprise des cotations en forte baisse à New York dès le début de la semaine prochaine a tétanisé les marchés. Ceux-ci sont de nouveau violemment repartis à la baisse en Europe. Les actions qui ont subi les plus fortes attaques ne sont pas les technologiques, mais des valeurs plus traditionnelles appartenant au secteur des assurances, des transports, du luxe et des loisirs. Dès lundi, tous les yuex seront braqués sur les trente valeurs de l'indice Dow Jones, qui constitue le désormais baromètre de la tendance sur tous les marchés mondiaux.



1. C_i représente l'indice CAC 40 le $(10+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. Que valent C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ?

2. t_i est le pourcentage de variation du CAC 40 du $(10+i)$ septembre 2 001 au $(11+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Calculer t_0, t_1, t_2, t_3.

3. On appelle pourcentage journalier moyen de variation du cours du CAC 40, le pourcentage t_j % tel que, si le cours du CAC 40 avait varié chaque jour de ce taux constant t_j %, son cours serait encore C_4 le 14 septembre 2 001.

   (a) Vérifier que $C_0\left(1+\frac{t_j}{100}\right)^4 = C_4$.

   (b) Calculer l'arrondi au dixième de t_j. En donner une interprétation économique.