COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

1 Études de fonctions

Étudier une fonction comporte plusieurs étapes systématiques qui sont :

1. Examiner l'ensemble de définition de la fonction, s'il n'est pas donné au préalable.
2. Étudier la parité de la fonction pour éventuellement limiter l'étude à $[0\,;\,+\infty[$.
3. Étudier le comportement de la fonction aux extrémités de son ensemble de définition.
4. Étudier les variations de la fonction.
5. Tracer sa courbe représentative.

Le point 3 sera traité en Première.
Le point 4 et 5 ont déjà été vus cette année.
Nous détaillerons les points 1 et 2 ci-dessous puis nous étudierons les fonctions de référence et quelques autres fonctions.

2 Ensemble de définition

En Seconde les seules fonctions qui posent un problème de définition sont celles qui comportent un quotient (la division par 0 n'étant pas possible) ou une racine (seuls les nombres réels positifs ont une racine).

2.1 Exemple : un quotient

La fonction f qui à x associe $\dfrac{2x+1}{3x-5}$ n'est pas définie quand $3x-5=0$ or

$$\begin{aligned} 3x-5=0 &\Leftrightarrow 3x=5 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Donc D_f, l'ensemble de définition de f, est $D_f = \left]-\infty\,;\,\frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$ qu'on peut aussi noter $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$, qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de $\frac{5}{3}$ ».

2.2 Exemple : une racine

La fonction f qui à x associe $\sqrt{1-2x}$ n'est définie que lorsque $1-2x \geq 0$ or

$$\begin{aligned} 1-2x \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq 2x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq x \end{aligned}$$

Donc D_f, l'ensemble de définition de f, est $D_f = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

3 Parité

3.1 Intervalle centré en 0

Définition 1
Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles.
On dit que I est centré en zéro *(ou symétrique par rapport à zéro) si, pour tout $x \in I$, $(-x) \in I$.*

Exemples.

1. $\mathbb{R}$ est centré en zéro car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x) \in \mathbb{R}$.
2. $]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$ car,pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$, $(-x) \in]-\infty\,;\,-2] \cup [2\,;\,+\infty[$.
3. $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ l'est aussi.
4. $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$ n'est pas centré en zéro car $-\frac{5}{3} \in D$ mais $\frac{5}{3} \notin D$.
5. $D = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$ n'est pas centré en zéro car, par exemple, $-1 \in D$ mais $1 \notin D$.

3.2 Fonction paire

3.2.1 Définition

Définition 2

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.
On dit que f est une fonction paire *si :*
- *D_f est centré en zéro*
- *pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$*

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$ est paire car :
   - elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro ;
   - pour tout x, $f(-x) = 2 - (-x)^2 = 2 - x^2 = f(x)$
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ n'est pas paire car elle est définie sur $D = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ qui n'est pas centré en zéro.
3. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ n'est pas paire car même si elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro, on a $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \neq f(x)$.
4. La fonction $f : x \mapsto x^5 + 1$ n'est pas paire car même si elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro, on a $f(-x) = (-x)^5 + 1 = -x^5 + 1 \neq f(x)$.

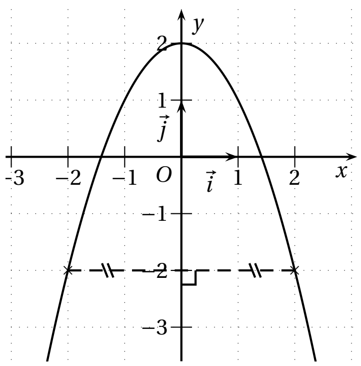
3.2.2 Conséquence graphique

Propriété 1

Soit f une fonction paire et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal, alors $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

On l'admettra

Exemple. On a vu que $f : x \mapsto 2 - x^2$ était paire. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet bien l'axe des ordonnées comme axe de symétrie :



3.2.3 Conséquence sur le sens de variation

Propriété 2

Soit f une fonction paire définie sur D_f
- *Si f est croissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ alors f est décroissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$*
- *Si f est décroissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ alors f est croissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$*

En d'autres termes : les sens de variations sont inversés entre la partie positive et négative de son ensemble de définition.

On l'admettra.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$ est paire.

Montrons qu'elle est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ comme semble l'indiquer sa représentation graphique.

$$\begin{aligned} 0 \leq a < b &\Leftrightarrow 0 \leq a^2 < b^2 \\ &\Leftrightarrow -b^2 < -a^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 - b^2 < 2 - a^2 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow f(b) < f(a) \leq 2 \end{aligned}$$

Donc f est bien décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et, comme elle est paire, elle est donc croissante sur $]-\infty ; 0]$.

3.2.4 Conséquence sur l'étude de la fonction

On pourra n'étudier une fonction paire que sur la partie positive de son ensemble de définition. Il suffira ensuite de déduire ses variations et sa représentation graphique sur la partie négative de son ensemble de définition à l'aide des deux propriétés précédentes.

3.3 Fonction impaire

3.3.1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.
On dit que f est une fonction impaire *si :*
- *D_f est centré en zéro*
- *pour tout $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$*

Exemples.

1. La fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$ n'est pas impaire car, si elle est bien définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro $f(-x) = 2-(-x)^2 = 2-x^2 \neq -f(x)$
2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ n'est pas impaire car elle est définie sur $D = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ qui n'est pas centré en zéro. Elle n'est donc ni paire, ni impaire.
3. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est impaire car
   - elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro ;
   - pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$.
4. La fonction $f : x \mapsto x^5 + 1$ n'est pas paire car même si elle est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en zéro, on a $f(-x) = (-x)^5 + 1 = -x^5 + 1 \neq -f(x)$. Elle n'est donc ni paire, ni impaire.

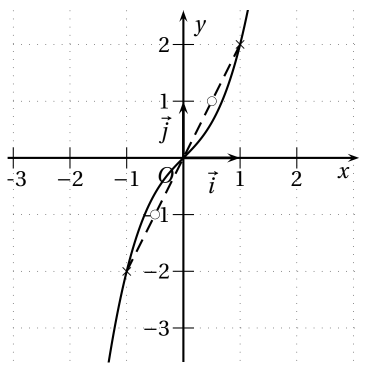
3.3.2 Conséquence graphique

Propriété 3

Soit f une fonction impaire et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal, alors $\mathscr{C}$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

On l'admettra

Exemple. On a vu que $f : x \mapsto x^3 + x$ était impaire. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ admet bien l'origine du repère comme centre de symétrie :



3.3.3 Conséquence sur le sens de variation

Propriété 4

Soit f une fonction impaire définie sur D_f
- *Si f est croissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ alors f est croissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$*
- *Si f est décroissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ alors f est décroissante sur $D_f \cap \mathbb{R}^-$*

En d'autres termes : les sens de variations sont conservés entre la partie positive et négative de son ensemble de définition.

On l'admettra.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^3 + x$ est impaire.

Montrons qu'elle est croissante sur $[0; +\infty[$ comme semble l'indiquer sa représentation graphique.

$$\begin{aligned} 0 \le a < b &\Leftrightarrow 0 \le a^3 < b^3 \\ &\Leftrightarrow 0 \le a^3 + a < b^3 + b \\ &\Leftrightarrow 0 \le f(b) < f(a) \end{aligned}$$

Donc f est bien croissante sur $[0; +\infty[$ et, comme elle est impaire, elle est donc aussi croissante sur $]-\infty; 0]$.

3.3.4 Conséquence sur l'étude de la fonction

On pourra n'étudier une fonction impaire que sur la partie positive de son ensemble de définition. Il suffira ensuite de déduire ses variations et sa représentation graphique sur la partie négative de son ensemble de définition à l'aide des deux propriétés précédentes.

4 Étude des fonctions de références

4.1 Fonctions constantes, linéaires et affines

Définition 4

On appelle fonction affine *toute fonction qui à x associe $mx + p$.*
Quand $m = 0$ la fonction est une fonction constante.
Quand $p = 0$ la fonction est une fonction linéaire.

4.1.1 Ensemble de définition

Les fonctions constantes, linéaires et affines sont définies sur $\mathbb{R}$.

4.1.2 Parité