Chapitre 4

Matrices

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1 (Le promeneur)**.**
Un promeneur perdu dans ses pensées mathématiques se retrouve subitement marchant sur un terre-plein central entre deux voies de bus. Le terre-plein prenant la forme d'un trottoir de 1 m de large, on suppose que la marche de notre promeneur, aussi hasardeuse soit-elle, respecte les règles suivantes :

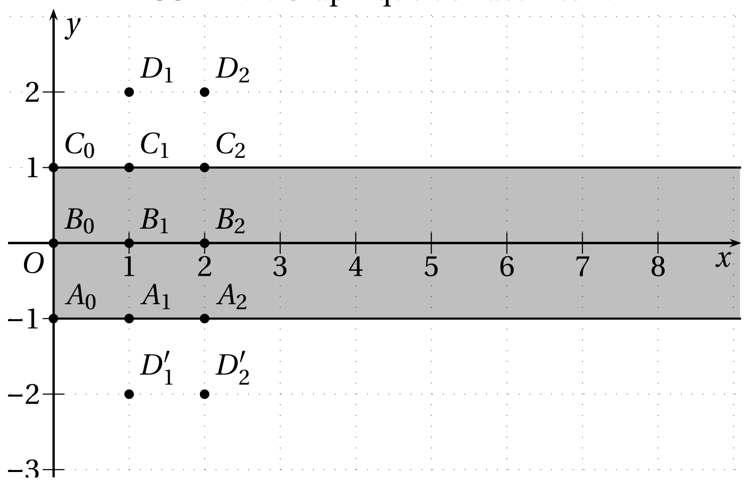
- il se déplace uniquement en diagonale de façon équiprobable vers la gauche ou vers la droite et indépendamment des pas effectués auparavant ;
- chaque pas le fait progresser de 50 cm sur le terre-plein central ;
- il ne revient jamais en arrière ;
- un seul pas dans une des voies de bus de part et d'autre du terre-plein entraîne un accident et la fin de la marche.

On cherche à estimer quelles sont les chances du promeneur d'atteindre l'extrémité du terre-plein, située à 15 m de lui.

Partie A : Modélisation dans un repère orthornormé
Le terre-plein est matérialisé en gris sur la figure 4.1 page suivante.
On suppose que notre promeneur débute sa marche à partir de l'un des points A_0, B_0 ou C_0. Une unité sur chaque axe représente 50 cm en réalité.

- Du point A_0, il ne peut rejoindre que B_1 ou D'_1.

FIGURE 4.1: Graphique de l'activité 4.1



- Du point B_0, il ne peut rejoindre que C_1 ou A_1.
- Du point C_0, il ne peut rejoindre que D_1 ou B_1.

Les règles sont les mêmes de l'étape 1 vers l'étape 2, à la différence près qu'il ne peut revenir sur le terre-plein à partir de D_1 ou de D'_1 : un accident met fin à sa marche.
Pour la commodité de la situation, on confond les positions D_1 et D'_1 ainsi que D_2 et D'_2.

1. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de C_0 arrive en A_1 ? En B_1 ? En C_1 ? En D_1 ?
2. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de B_1 arrive en B_2 ? En A_2 ? En C_2 ? Sur une des voies de bus, c'est à dire en D_2 ou D'_2 ? On pourra recourir à un arbre.
3. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de B_0 arrive en B_2 ? En C_2 ? En D_2 (ou D'_2) ?
4. Quelle est la probabilité que le promeneur partant de A_0 arrive en B_3 ? En A_3 ? En D_3 (ou D'_3) ? L'utilisation d'un arbre est-elle toujours aisée ?

Partie B : Des matrices en guise d'arbre de probabilité
L'objet mathématique présenté ci-dessous est une matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} désignent des nombres, ce sont les coefficients de la matrice.
Le nombre i indique le numéro de la ligne, le nombre j indique le numéro de la colonne dans laquelle se trouve le nombre a_{ij}.
Ainsi, a_{23} désigne le terme situé à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne.
Dans notre modèle, on associe :

- la première ligne et la première colonne aux positions de type A de notre marcheur,
- la deuxième ligne et la deuxième colonne aux positions de type B,
- la troisième ligne et la troisième colonne aux positions de type C,
- et la quatrième ligne et la quatrième colonne aux positions de type D,

de la manière suivante : le nombre a_{23}, par exemple, représente la probabilité de passer de la position B à la position C en une étape.

1. Remplacer chacun des nombres a_{ij} par leur valeur dans notre problème.

   La matrice M contient ainsi les probabilités correspondant à tous les déplacements possibles de notre marcheur **en un pas**, quelle que soit sa position de départ.

2. (a) Quelle serait la matrice présentant les probabilités correspondant à tous les déplacements possibles de notre marcheur **en deux pas**, quelle que soit sa position de départ ? On note M^2 cette matrice et on appelle b_{ij} ses coefficients.
   (b) Justifier que $b_{13} = a_{11} \times a_{13} + a_{12} \times a_{23} + a_{13} \times a_{33} + a_{14} \times a_{43}$.
   (c) On appelle produit de CAYLEY de la matrice M par elle-même la matrice dont les coefficients sont définis de la façon suivante :

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \times a_{kj}$$

   Écrire un algorithme permettant de calculer M^{30}. Conclure.

ACTIVITÉ 4.2 (Sommes et combinaisons linéaires de matrices)**.**
Un carré magique est un tableau carré dans lequel la somme des termes des lignes, des colonnes ou des diagonales est la même.
Un exemple de tel tableau est donné ci-dessous :

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Carré magique sur le portail de la basilique Sagrada Familia de Barcelone où la somme correspond à l'âge auquel le Christ est mort.

Pour la suite de l'activité, on écrira ces tableaux sous forme de matrice.

1. Montrer que la matrice ci-dessous correspond à un carré magique.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que la matrice précédente peut s'écrire sous la forme de la « somme » des trois matrices ci-dessous.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   On écrira simplement $A = B + C + D$.
3. Montrer qu'en multipliant tous les coefficients de la matrice A par 5, on obtient une matrice E correspondant encore à un carré magique.

   On écrira simplement $E = 5A$.
4. En utilisant les notations introduites précédemment, déterminer la matrice F telle que $F = 2B + 3C + 4D$.
   Cette matrice correspond-elle à un carré magique ?

ACTIVITÉ 4.3 (Sommes et multiplications de matrices)**.**
Le tableau a contient les notes de quatre élèves lors de 3 devoirs : D_1, D_2 et D_3.
Les élèves terminent la correction chez eux et gagnent de 0 à 2 points supplémentaires comme indiqué dans le tableau b.
Les coefficients des trois devoirs sont donnés dans le tableau c.

Tableau a

	D_1	D_2	D_3
Sarah	12	15	8
David	10	12	13
Nina	16	18	17
Louis	8	15	9

Tableau b

	D_1	D_2	D_3
Sarah	1	0	2
David	2	1	0
Nina	1	0	2
Louis	2	2	2

Tableau c

D_1	1
D_2	4
D_3	2

On appelle A, B et C les matrices correspondant respectivement aux tableaux a, b et c.

1. Calculer les notes finales obtenues par les élèves.
   Comment pourrait-on obtenir la matrice D correspondant à ces notes finales en fonction des matrices A et B ?
2. Calculer le total des points obtenu par chaque élève en tenant compte des coefficients.
   Comment pourrait-on obtenir la matrice E correspondant à ces totaux en fonction des matrices D et C ?
3. Calculer la moyenne de chacun des élèves.
   Comment pourrait obtenir la matrice F correspondant à ces moyennes en fonction de la matrice E ?

ACTIVITÉ 4.4 (Produits de matrices)**.**
Le tableau m ci-dessous donne les prix, en euros, de trois shampooings avec ou sans remise de fidélité.
Le tableau n indique les quantités achetées par deux clientes A et B.

Tableau m

	Nutri	Color	Milky
Prix unitaire	6	7	9
Prix avec remise	5	5	8

Tableau n

Quantités	A	B
Nutri	3	2
Color	1	1
Milky	2	2

On appelle M et N les matrices correspondant respectivement aux tableaux m et n.

Calculer le prix total payé par chaque cliente selon qu'elle bénéficie ou non de la remise.
Comment pourrait obtenir la matrice O correspondant à ces prix en fonction des matrices M et N ?

4.2 Définitions

Définition 4.1. Une *matrice* A de dimension (ou d'ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
Les nombres sont appelés *coefficients* (ou éléments) de la matrice.
Le coefficient situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est noté a_{ij} ou $a_{i,j}$. On note parfois $A = \left(a_{ij}\right)$.

Définition 4.2. Certaines matrices particulières portent des noms :

- Matrice ligne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une ligne ;
- Matrice colonne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une colonne ;
- Matrice carrée : C'est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes ; on dit qu'elle est d'ordre n (lorsqu'il y a n lignes et n colonnes) ;
- Matrice unité : C'est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la première diagonale qui sont tous égaux à 1 ; on note I_n la matrice unité d'ordre n ;
- Matrice nulle : C'est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro ;

4.3 Égalité de deux matrices

Définition 4.3. Deux matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

4.4 Addition de matrices

Définition 4.4. La *somme de deux matrices* $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ de même dimension est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que les coefficients de C sont la somme des coefficients de A et de B situés à la même place : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Définition 4.5. La *multiplication par un réel k d'une matrice* $A = \left(a_{ij}\right)$ est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k : $kA = \left(ka_{ij}\right)$

Théorème 4.1. *Soient A, B et C trois matrices de même dimension et k et k' deux réels. On a :*

1. $A + B = B + A$ *(on dit que l'addition des matrices est commutative) ;*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(on dit que l'addition des matrices est associative) ;*
3. $k(A + B) = kA + kB$ *;*
4. $(k + k')A = kA + k'A$ *;*
5. $k(k'A) = (kk')A$.

Preuve.

1. $A+B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ et $B + A = \left(b_{ij} + a_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$
2. $(A+B)+C = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)+\left(c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$ et $A+(B+C) = \left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$
3. $k(A+B) = k\left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \left(k(a_{ij} + b_{ij})\right) = \left(ka_{ij} + kb_{ij}\right)$ et $kA+kB = \left(ka_{ij}\right)+\left(kb_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + kb_{ij}\right)$
4. $(k+k')A = (k+k')\left(a_{ij}\right) = \left((k + k')a_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + k'a_{ij}\right)$ et $kA+k'A = \left(ka_{ij}\right)+\left(k'a_{ij}\right) = \left(ka_{ij} + k'a_{ij}\right)$
5. $k(k'A) = k\left(k'a_{ij}\right) = \left(kk'a_{ij}\right)$ et $(kk')A = \left(kk'a_{ij}\right)$

♢

4.4.1 Matrices opposées, différence de deux matrices

Définition 4.6. Deux matrices A et B sont dites opposées si elles sont de même dimension et si $A + B$ est une matrice nulle.

Propriété 4.2. *Toute matrice A a une matrice opposée : la matrice $(-1) \times A$. On la notera $-A$.*

Preuve. $A + (-1) \times A = \left(a_{ij}\right) + \left(-a_{ij}\right) = (0)$ ♢

Définition 4.7. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors la différence de A et B, notée $A - B$, est la matrice $A + (-B)$.

4.5 Multiplication de matrices

Définition 4.8. Soient A une matrice ligne de dimension $n \times p$ et B une matrice colonne de dimension $p \times m$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$. Alors le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n \times m$ telle que le premier coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la première colonne de B, le deuxième coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la deuxième colonne de B, et ainsi de suite.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \cdots + a_{1p}b_{pm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1m} + a_{22}b_{2m} + \cdots + a_{2p}b_{pm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{np}b_{p1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{np}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{1m} + a_{n2}b_{2m} + \cdots + a_{np}b_{pm} \end{pmatrix}$$

4.5.1 Propriétés de la multiplication des matrices

Théorème 4.3. *Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :*

1. *En général $A \times B \neq B \times A$ (on dit que la multiplication des matrices n'est pas commutative) ;*
2. *$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (on dit que la multiplication des matrices est associative) ;*
3. *$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$*
4. *$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$*

On l'admettra.

Remarque. On notera $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots A}_{n \text{ fois}}$ quand ce produit est défini.

4.5.2 Inverse d'une matrice

Définition 4.9. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A \times B = B \times A = I$ où I est une matrice unité. On notera alors $B = A^{-1}$ (ou $A = B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

4.6 Exercices

4.6.1 Technique

EXERCICE 4.1.
Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV1, LV2 et LV3 pour plusieurs élèves. Ces notes ont été placées dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice.
2. Combien d'élèves ont passé ces épreuves ?
3. Quelle est la note obtenue en LV3 par l'élève 2 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{36}.

EXERCICE 4.2.
Préciser le type de chacune des matrices suivantes :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

EXERCICE 4.3.
On pose $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $A = B$.

EXERCICE 4.4.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $4A - 2B$.

EXERCICE 4.5.
Dans chacun des cas suivants, préciser si le produit $A \times B$ existe et, si oui, le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4.6.
On donne $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-2&1\\1&2\end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer BC, puis $A(BC)$.
   (b) Calculer AB puis $(AB)C$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(BC)A$?
2. (a) Calculer $(B+C)$, puis $A\times(B+C)$.
   (b) Calculer AB et AC puis $AB+AC$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(B+C)\times A$?

EXERCICE 4.7.
Démontrer que les matrices A et B suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A=\begin{pmatrix}5&-1\\-9&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&1\\9&5\end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix}-3&-5&5\\2&3&-3\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&5&0\\1&2&1\\3&5&1\end{pmatrix}$

EXERCICE 4.8.

1. Trouver l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}3&2\\6&4\end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

EXERCICE 4.9.
À l'aide de la calculatice, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

- $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\3&1&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$;
- $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.10.
On donne $A=\begin{pmatrix}1&5&-3&2\\3&-2&-1&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&6\\3&-1\\4&5\\-2&7\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A\times B$. Que constate-t-on ?
2. B est-elle la matrice inverse de A ?

4.6.2 Pour aller plus loin

EXERCICE 4.11.
On pourra effectuer tous les calculs demandés à la calculatrice.

1. Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.
   Calculer :
   - $A\times B$;
   - $B\times A$;
   - A^2 ;
   - A^3 ;
   - B^2 ;
   - B^3.
2. Mêmes questions avec $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

EXERCICE 4.12.
Soit $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&0&1\\0&-4&-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 4.13.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

EXERCICE 4.14.

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

Calculer $J - I_3$ puis $(J - I_3)^2$ puis $(J - I_3)^3$.

EXERCICE 4.15.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B = A^2$. Déterminer l'inverse de B.

EXERCICE 4.16.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

1. Vérifier que A^3 est la matrice nulle.
2. Développer le produit matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$.
3. Déduire des résultats précédents la matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4.17.

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.
2. Calculer D^2, D^3 et D^4.
3. Expliquer pourquoi $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$, $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ et $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$