

Chapitre 2

Vecteurs

Sommaire

2.1 Translation	7
2.1.1 Définition et activités d'introduction	7
2.1.2 Bilan et compléments	9
2.2 Vecteurs	9
2.2.1 Définition – Égalité	9
2.2.2 Notation \vec{u}	10
2.2.3 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES	11
2.2.4 Vecteur nul – Vecteurs opposés	13
2.2.5 Produit d'un vecteur par un réel	14
2.3 Exercices	15

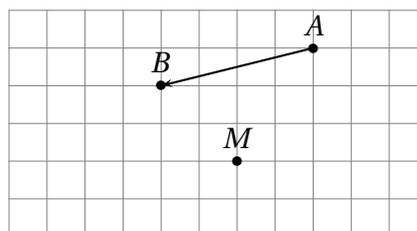
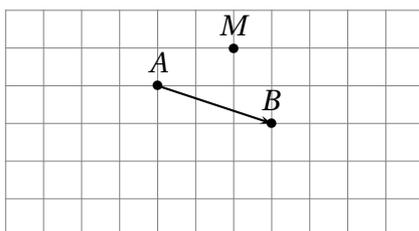
2.1 Translation

2.1.1 Définition et activités d'introduction

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

ACTIVITÉ 2.1 (Image d'un point par une translation).

Sur chacune des figures ci-dessous, construire M' , image de M par la translation qui transforme A en B .



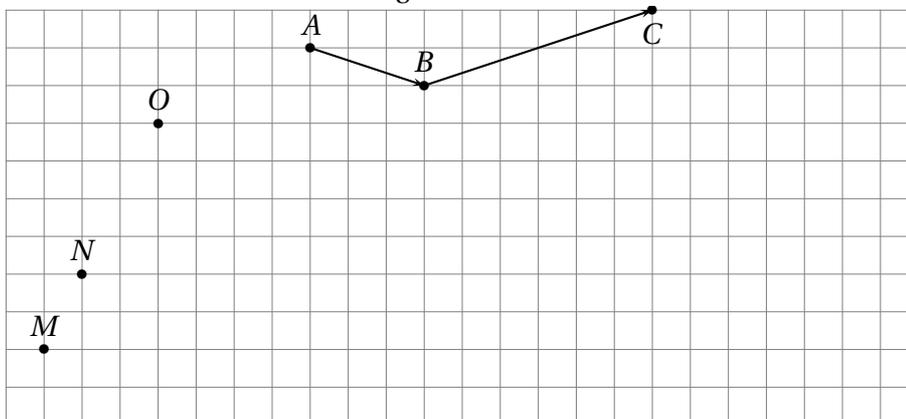
Dans chaque construction, on voit apparaître une figure familière. Laquelle?
Démontrer que c'est toujours le cas.

ACTIVITÉ 2.2 (Quelques propriétés de la translation).

Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 2.1 de la présente page.

1. Construire M' , N' et O' , images respectives de M , N et O par la translation qui transforme A en B .

FIGURE 2.1: Figure des activités 2.2 et 2.3



2. Construire P , image de O la translation qui transforme M en M' . Que constate-t-on?
3. Les points M , N et O sont alignés. Cela semble-t-il être aussi le cas des points M' , N' et O' ? Démonstrons-le.
 - (a) D'après la propriété obtenue dans le cas général, quels sont les parallélogrammes issus de la translation?
 - (b) Quelles sont alors les droites parallèles à (AB) ? Quelles sont les longueurs égales à AB ?
 - (c) Que peut-on en déduire pour les quadrilatères $MNN'M'$, $NOO'N'$?
 - (d) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et $(M'N')$? Et pour les droites (ON) et $(O'N')$?
 - (e) Conclure.
4. Construire l'image d'un autre point situé sur le segment $[OM]$. Sur quel segment est située cette image? Conjecturer quelle est l'image du segment $[OM]$ et celle de la droite (OM) .
5. Que peut-on dire des longueurs MN et $M'N'$? Et des longueurs ON et $O'N'$? Justifier, en utilisant éventuellement un résultat de la démonstration de la question 3.

ACTIVITÉ 2.3 (Enchaînement de deux translations).

Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 2.1 de la présente page.

1. Construire M'' , N'' et O'' , images respectives de M' , N' et O' par la translation qui transforme B en C .
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ONN''O''$? Justifier.
3. Quelle est la transformation qui permet de passer des points M , N et O aux points M'' , N'' et O'' ?

2.1.2 Bilan et compléments

Définition 2.1 (Rappel). Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Propriété 2.1. Soient A et B deux points du plan et M ayant pour image M' par la translation qui transforme A en B .
Alors $ABM'M$ est un

Cela a été démontré dans l'activité.

Propriété 2.2. Soient A et B deux points du plan et M, N et O ayant pour images respectives M', N' et O' par la translation qui transforme A en B . Alors :

- Si M, N et O sont alignés alors
- L'image du segment $[MN]$ est de même
- Si O est le milieu du segment $[MN]$ alors

On dit que la translation conserve, et

Le premier et le deuxième points ont été démontrés dans l'activité. Le troisième point est une conséquence triviale des deux premiers.

Propriété 2.3 (admise). L'image d'une droite par une translation est
L'image d'un cercle par une translation est

Enfin, comme on l'a vu en activité :

Propriété 2.4. L'enchaînement (on parle de la composition) de deux translations est une translation.

2.2 Vecteurs

2.2.1 Définition – Égalité

Définition 2.2. On appelle note et on appelle *vecteur* \overrightarrow{AB} le bipoint associé à la translation qui transforme A en B .
 A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 2.3. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

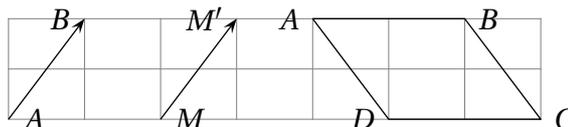
On a vu précédemment que

- d'une part, M' est l'image de M par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} si et seulement si $ABM'M$ parallélogramme (éventuellement aplati),
- d'autre part que les translations de vecteur \overrightarrow{AB} et de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Ce cas est général. Ainsi :

Propriété 2.5.

- $\vec{AB} = \vec{MM'}$ \Leftrightarrow
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ \Leftrightarrow $ABCD$ est un parallélogramme



Remarque. Attention à l'ordre des lettres!

Ainsi, on peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

Définition 2.4. Un vecteur non nul est déterminé par :

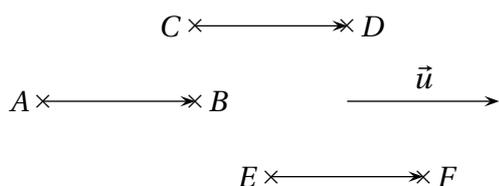
- sa direction;
- son sens;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 2.6. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

En effet, en appelant \vec{AB} et \vec{CD} ces deux vecteurs, $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB}$ et \vec{CD} ont la même direction, le même sens et la même norme.

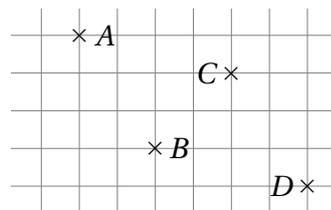
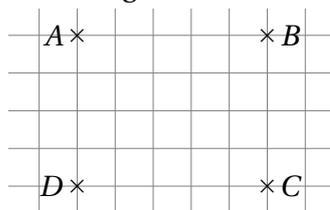
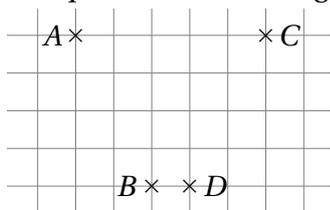
2.2.2 Notation \vec{u}



Sur le schéma ci-contre, on a $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$.
 \vec{AB} , \vec{CD} et \vec{EF} sont appelés des *représentants* du vecteur \vec{u} .

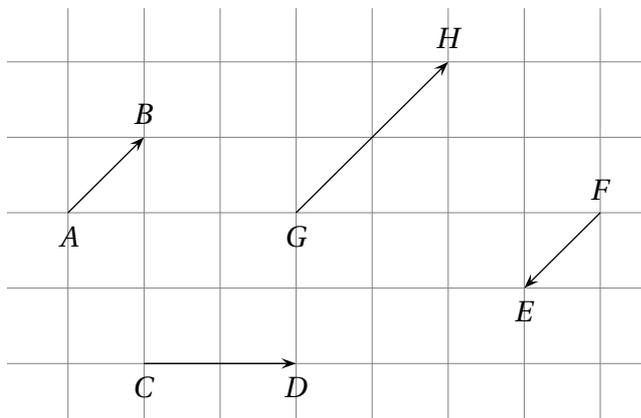
EXERCICE 2.1.

Sur chaque schéma de la figure ci-dessous, l'égalité $\vec{AB} = \vec{CD}$ est-elle vraie?



EXERCICE 2.2.

Sur la figure ci-dessous, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur \vec{AB} n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.

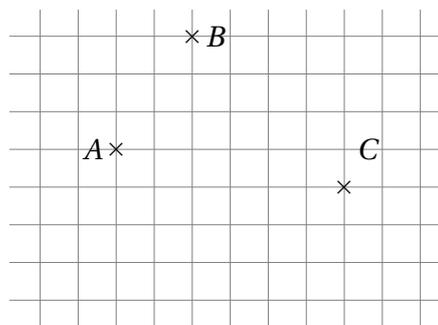


EXERCICE 2.3.

Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C , les points D, E et F tels que :
 $\vec{AB} = \vec{CD}$, $\vec{EA} = \vec{AB}$, $\vec{CF} = \vec{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
 $\vec{BD} = \dots = \dots$ $\vec{BC} = \dots$ $\vec{BF} = \dots$

4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?

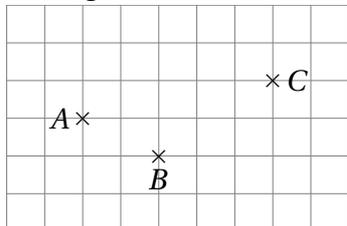


2.2.3 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

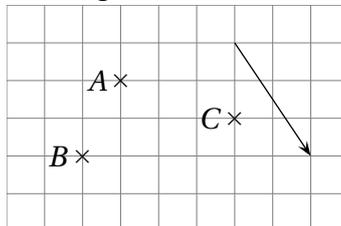
Définition 2.5. La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur \vec{u} et de vecteur \vec{v} .

EXERCICE 2.4.

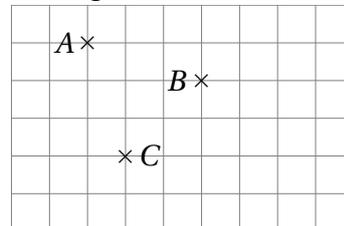
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\vec{AB} + \vec{BC}$.



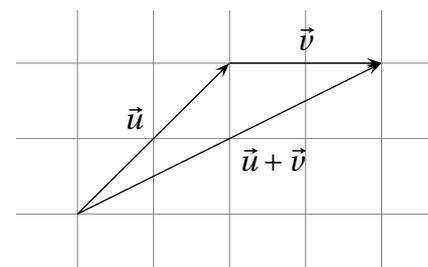
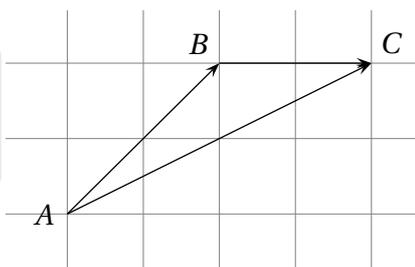
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\vec{AB} + \vec{BC}$?



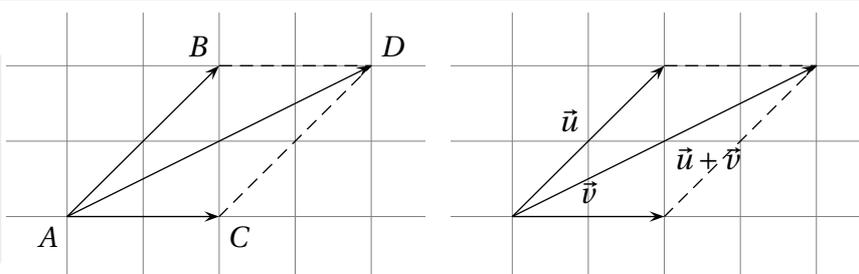
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\vec{AB} + \vec{AC}$.



Propriété 2.7 (Relation de CHASLES). Pour tous points A, B et C , on a : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



Propriété 2.8 (Règle du parallélogramme). Pour tous points A, B, C et D on a : $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme.



EXERCICE 2.5 (Relation de CHASLES).

Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

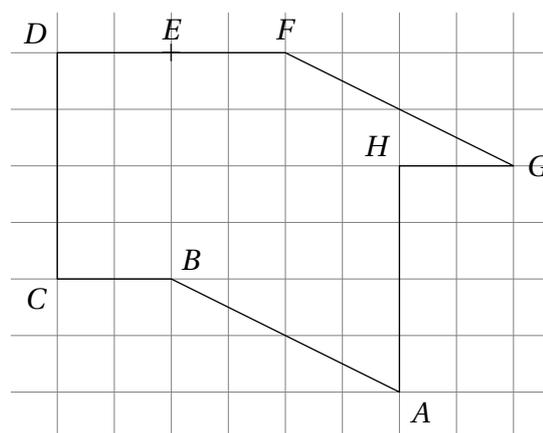
- $\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{B...}$
- $\vec{XK} = \vec{XL} + \vec{...K}$
- $\vec{CD} = \vec{...A} + \vec{A...}$
- $\vec{MN} = \vec{...P} + \vec{...}$
- $\vec{...E} = \vec{F...} + \vec{G...}$
- $\vec{H...} = \vec{...} + \vec{IJ}$
- $\vec{RS} = \vec{R...} + \vec{...S}$
- $\vec{...} = \vec{JK} + \vec{...M}$
- $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{...}$
- $\vec{AB} = \vec{...C} + \vec{...D} + \vec{...}$
- $\vec{...Y} = \vec{XJ} + \vec{...} + \vec{R...}$

EXERCICE 2.6 (Vecteurs égaux, somme).

On considère le motif représenté ci-contre.

1. Citer tous les vecteurs égaux :
 - (a) au vecteur \vec{AB} et représentés sur ce motif;
 - (b) au vecteur \vec{FE} et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\vec{AB} + \vec{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :

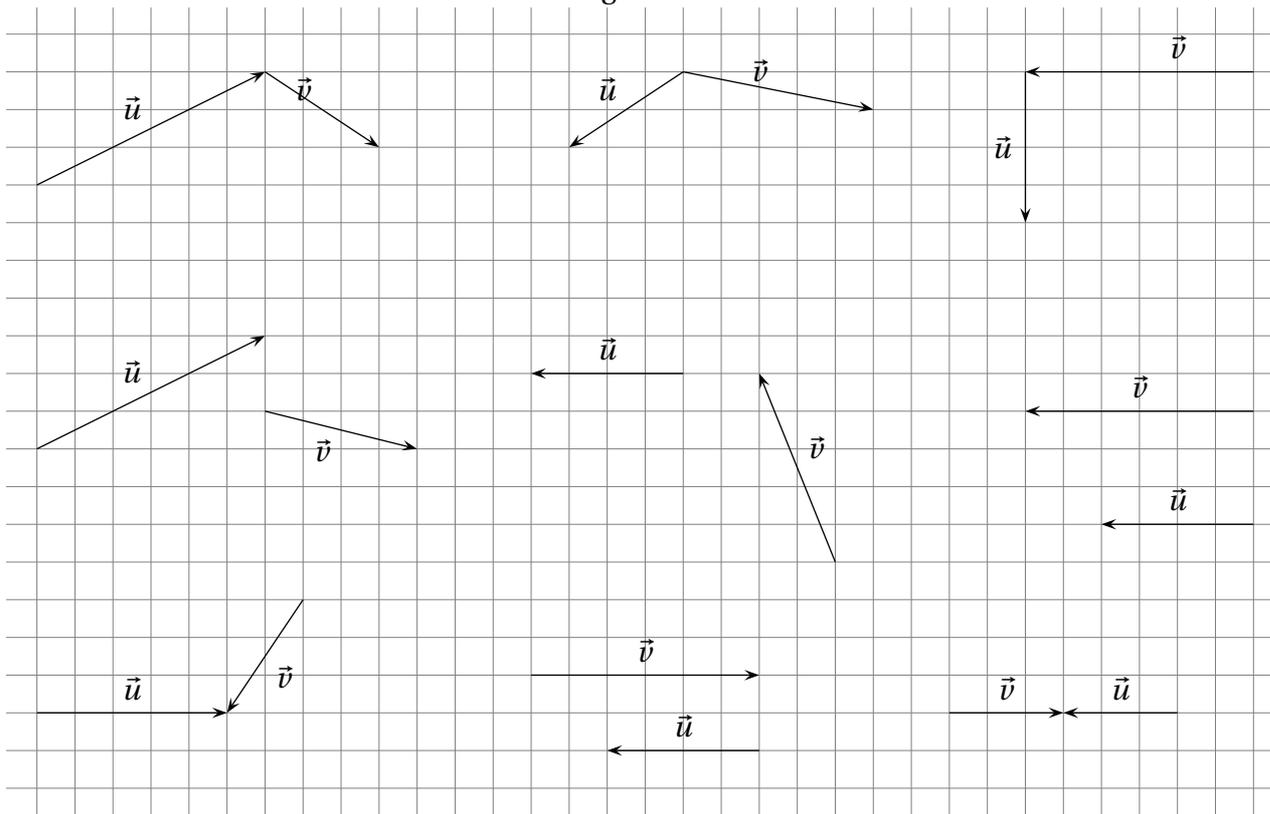
(a) $\vec{AB} + \vec{AH}$	(d) $\vec{BF} + \vec{GF}$
(b) $\vec{BA} + \vec{BC}$	
(c) $\vec{BC} + \vec{DE}$	(e) $\vec{AE} + \vec{FB}$



EXERCICE 2.7 (Sommes).

Dans chacun des cas de la figure 2.2 page ci-contre, construire en couleur le vecteur \vec{w} tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

FIGURE 2.2: Figure de l'exercice 2.7



2.2.4 Vecteur nul – Vecteurs opposés

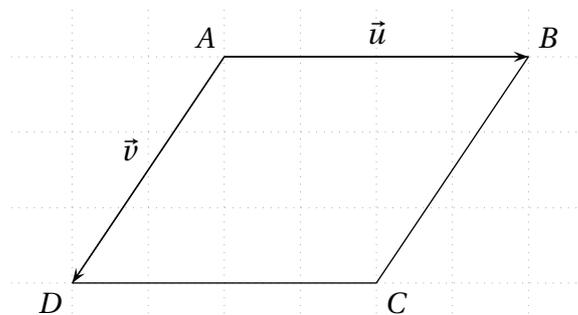
Définition 2.6. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. On peut noter $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$. On a donc :

Propriété 2.9. Les vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} sont des vecteurs opposés. On a donc $\vec{AB} = \dots$ et $\vec{BA} = \dots$.

EXERCICE 2.8 (Différence).

Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AD}$.



\vec{u} et \vec{v} seulement :

- $\vec{BA} = \dots$;
- $\vec{DA} = \dots$;
- $\vec{CB} = \dots$;
- $\vec{DC} = \dots$;
- $\vec{AC} = \dots$;
- $\vec{CD} = \dots$;
- $\vec{CA} = \dots$;
- $\vec{DB} = \dots$;
- $\vec{BD} = \dots$;
- $\vec{BC} = \dots$;

Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs

Enfin on a la propriété suivante :

Propriété 2.10. Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors $\dots \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

2.2.5 Produit d'un vecteur par un réel

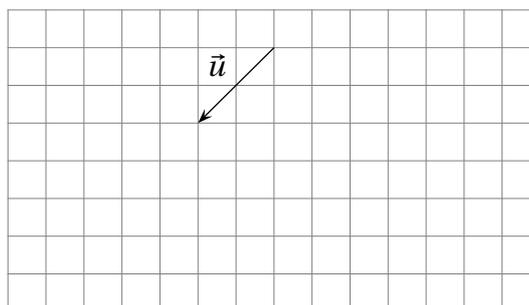
ACTIVITÉ 2.4.

Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.

Quelles propriétés géométriques partagent \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ? Quelles sont leurs différences?

2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{i} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{j} = 1,5\vec{u}$.



On a ainsi :

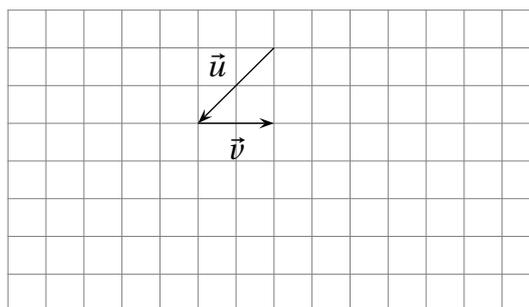
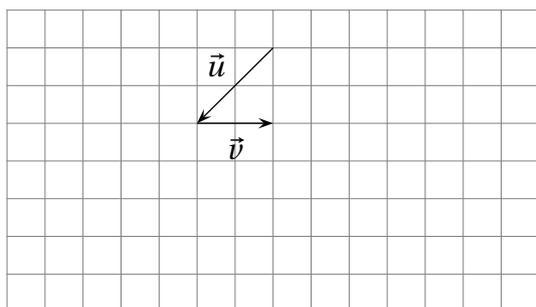
Définition 2.7. Soit k un réel non nul et \vec{u} un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est
- le sens est
- la norme est

ACTIVITÉ 2.5.

On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.

Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on?



On a ainsi :

Propriété 2.11. Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u} + \vec{v}) = \dots\dots\dots$ et $k\vec{u} + k'\vec{v} = \dots\dots\dots$

On a de plus :

Propriété 2.12. Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout nombre k , $0\vec{u} = \dots\dots\dots$ et $k\vec{0} = \dots\dots\dots$

Propriété 2.13. Soient A et B deux points distincts et I un point du plan, alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \vec{AI} = \dots\dots\dots \vec{AB}$.

2.3 Exercices

EXERCICE 2.9.

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I , J , K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\vec{LK} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 2.10.

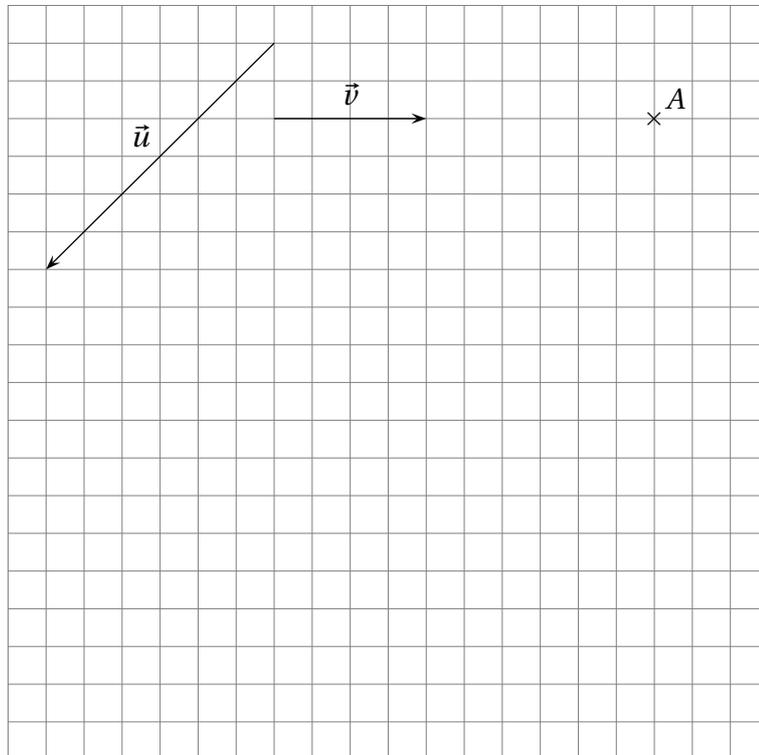
Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ et $\vec{DF} = \frac{3}{5}\vec{DC}$. Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

EXERCICE 2.11.

On considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de directions différentes. A est un point donné (voir la figure 2.3 de la présente page).

1. Construire les points B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P , Q et R tels que $\vec{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\vec{PQ} = -2\vec{v}$ et $\vec{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on? Le justifier par un calcul sur les vecteurs.

FIGURE 2.3: Figure de l'exercice 2.11

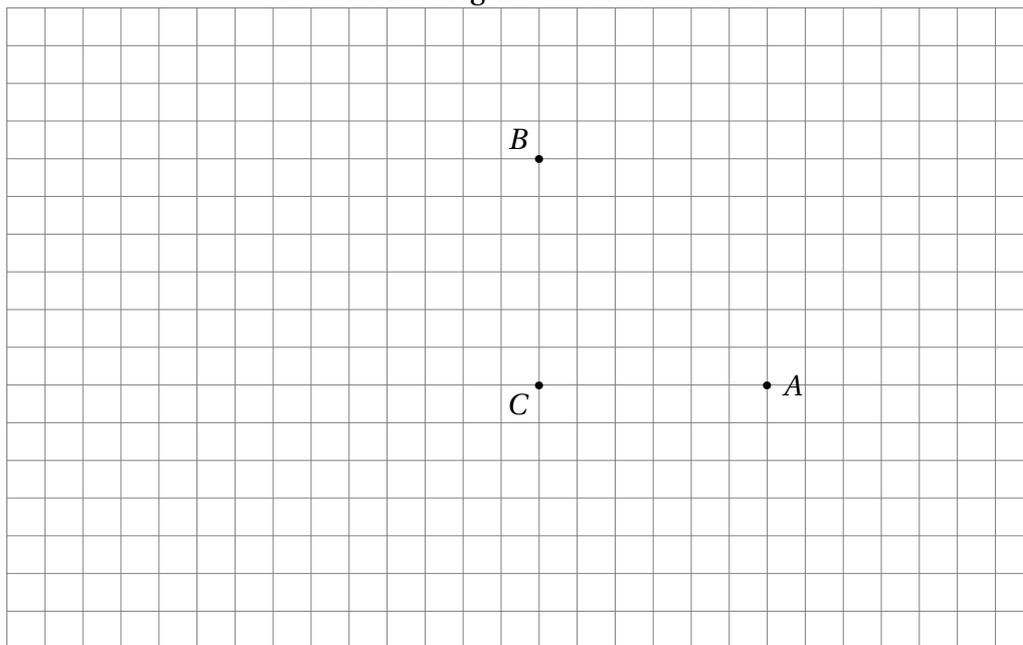


EXERCICE 2.12.

Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 2.4 de la présente page).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
 - $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$;
 - $\vec{BJ} = 2\vec{BA}$;
 - $\vec{CK} = -\frac{2}{3}\vec{CA}$;
 - $\vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{BC} - \frac{13}{6}\vec{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
 - (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer \vec{IJ} en fonction de \vec{AI} , \vec{AB} et \vec{BJ} .
En déduire \vec{IJ} en fonction de \vec{AB} .
 - (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer \vec{LK} en fonction de \vec{CK} et \vec{CL} .
Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir \vec{LK} en fonction de \vec{AB} .
 - (c) Conclure.

FIGURE 2.4: Figure de l'exercice 2.12

**EXERCICE 2.13.**

Écrire les vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , \vec{x} et \vec{t} en fonction des seuls vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} .

- $\vec{u} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}(\vec{AB} - 5\vec{BC}) + \vec{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\vec{AB} + \vec{CB}$.
- $\vec{v} = \vec{AB} + 3\vec{CA} - 2\vec{BC}$.
- $\vec{t} = 2\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{CA}$.

EXERCICE 2.14.

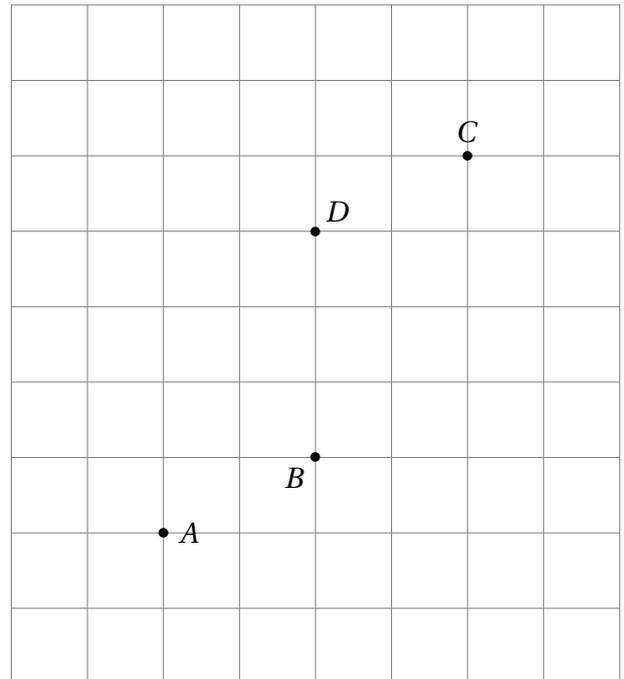
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E .
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
 - (a) Exprimer \overrightarrow{ED} en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AC}$ et \overrightarrow{CE} puis en fonction des seuls vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 - (b) Exprimer \overrightarrow{BD} en fonction des seuls vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
 - (c) Conclure.

EXERCICE 2.15.

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.



1. Construire A' et E .
2. Exprimer \overrightarrow{DE} d'une part et $\overrightarrow{DA'}$ d'autre part en fonction des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} .
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs \overrightarrow{DE} et $\overrightarrow{DA'}$?
4. Que peut-on en déduire pour les points A', E et D ?