

Chapitre 14

Suites récurrentes doubles

Sommaire

14.1 Un exemple	97
14.1.1 Obtention d'une formule explicite	97
14.1.2 Par le calcul matriciel	97
14.2 Bilan	97
14.3 Exercices	98

14.1 Un exemple

Une usine émet chaque mois des matières polluantes et cette production augmente de 10 % chaque mois. Un système est mis en place pour réduire cette production et l'on constate qu'il permet une diminution équivalente à 30 % de la production de polluant émis deux mois avant.

On note u_n la masse de matières polluantes n mois après le début de la mise en place du système. Avant l'installation du système, la production de polluant est $u_0 = 3500$ kg et, le mois suivant, après un mois de traitement, $u_1 = 1900$ kg.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n . On appellera $\mathcal{R}$ cette relation de récurrence.

On se propose d'étudier le comportement de cette suite. Pour cela deux approches sont possibles.

14.1.1 Obtention d'une formule explicite

1. Montrer que si une suite géométrique du type $v_n = q^n$ vérifie $\mathcal{R}$ alors q est solution de l'équation du second degré $q^2 - 1,1q + 0,3 = 0$.
2. Résoudre cette équation. On appellera q_1 et q_2 ses solutions.
3. On admet que toutes les suites (s_n) qui vérifient $\mathcal{R}$ sont de la forme $s_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - (a) À l'aide de u_0 et de u_1 déterminer α et β pour la suite (u_n) .
 - (b) Vérifier que u_2 et u_3 peuvent s'obtenir à l'aide de la formule $u_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - (c) Donner alors la masse de polluant au bout de 10 mois d'utilisation du système.
 - (d) Étudier la convergence de (u_n) .

14.1.2 Par le calcul matriciel

1. Montrer que $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & 1,1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

3. Donner alors la masse de polluant au bout de 10 mois d'utilisation du système.

14.2 Bilan

Définition 14.1. Soit f une fonction de deux variables. Une suite (u_n) définie par u_0, u_1 et $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ est appelée *suite récurrente double*.

14.3 Exercices

EXERCICE 14.1.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 & \text{et} & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$

- Calculer u_2, u_3 et u_4 .
- On veut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}$ suivante est vérifiée : $\mathcal{P} : u_n = A \times 5^n + B$ où A et B sont deux réels à déterminer.
 - À l'aide de u_0 et u_1 , déterminer les seules valeurs possibles pour A et B et regarder si u_2, u_3 et u_4 vérifient $\mathcal{P}$.
 - On suppose que u_n et u_{n+1} vérifient $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que $u_n = A \times 5^n + B$ et que $u_{n+1} = A \times 5^{n+1} + B$. Montrer qu'alors u_{n+2} vérifie $\mathcal{P}$.
 - Conclure.
- En déduire u_{10} .

EXERCICE 14.2 (Suite de FIBONACCI¹).

La suite de Fibonacci est la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $\mathcal{R} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

- Déterminer les cinq premiers termes de la suite.
- Montrer que si une suite géométrique du type $v_n = q^n$ vérifie $\mathcal{R}$ alors q est solution de l'équation du second degré $q^2 - q - 1 = 0$.
 - Résoudre cette équation. On appellera q_1 et q_2 ses solutions.
 - On admet que toutes les suites (s_n) qui vérifient $\mathcal{R}$ sont de la forme $s_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - À l'aide de u_0 et de u_1 déterminer α et β pour la suite (u_n) .
 - Donner la terme de la suite de rang 20.
- Montrer que $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier le terme de rang 20.

EXERCICE 14.3 (Oscillateur de SAMUELSON²).

On part des hypothèses suivantes :

- il y a égalité en chaque période n entre le revenu national R_n d'un pays et sa dépense effective, décomposée en dépenses de consommation C_n et en dépenses d'investissement I_n : $R_n = C_n + I_n$;
- la consommation et l'investissement sont eux-mêmes déterminés par les relations :
 - $C_{n+1} = cR_n$ où c est un réel appartenant à $[0; 1]$ appelé *propension marginale à consommer* ;
 - $I_{n+1} = v(C_{n+1} - C_n)$ où v est un réel positif appelé *coefficient d'accélération*.

1. Des observations

- Montrer que pour tout entier naturel n , $R_{n+2} = c(1+v)R_{n+1} - cvR_n$.
- Dans chacun des cas suivants, déterminer avec l'éditeur de suites de la calculatrice les valeurs de R_n demandées en prenant $R_0 = R_1 = 1$ et commenter les « oscillations » des résultats obtenus :
 - $c = 0,4$ et $v = 1,5$ pour n variant de 2 à 36 ;
 - $c = 0,7$ et $v = 1,2$ pour n variant de 2 à 38 ;
 - $c = 0,8$ et $v = 2$ pour n variant de 2 à 72 ;

1. Leonardo FIBONACCI (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien qui a, entre autres, introduit la notation arabe des chiffres en Europe

2. Paul Anthony SAMUELSON est un économiste américain. Il a participé à la mise au point des premiers ordinateurs à la fin de la Seconde Guerre mondiale. Dans ses analyses économiques, il fait une large place aux outils mathématiques. Il a obtenu le prix Nobel de sciences économiques en 1970

- $c = 0,8$ et $v = 1,25$ pour n variant de 2 à 39 ;
- $c = 0,4$ et $v = 2,5$ pour n variant de 2 à 31.

Pour SAMUELSON le seul cas où ce modèle est pertinent pour décrire les fluctuations du revenu national est celui où $c = \frac{1}{v}$ (deux derniers des cas précédents).

2. Avec les matrices

- (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ R_{n+1} \end{pmatrix}$
- (b) En reprenant les données du premier cas de la question 1b, calculer les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} R_9 \\ R_{10} \end{pmatrix}$. Vérifier ainsi les résultats obtenus.
- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\begin{pmatrix} R_n \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \end{pmatrix}$
- (d) En reprenant les données de l'avant dernier cas de la question 1b, déterminer les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix}^n$ pour n variant de 1 à 6 et en déduire $R_2, R_3, \dots, R_7$. Vérifier ainsi les résultats obtenus.

EXERCICE 14.4.

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note p_0 la population initiale et p_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de p_n par la relation :

$$\mathcal{R} : \text{Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n).$$

On suppose que $p_0 = 40\,000$ et $p_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence $p_n - p_{n-1}$.

- Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire p_2 et p_3
- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_n = p_{n+1} - p_n$ et $v_n = p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n$.
 - Prouver que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n .
 - En utilisant la relation $\mathcal{R}$, calculer $v_{n+1} - v_n$.
En déduire que, pour tout n , on a : $v_n = p_1 - \frac{1}{2}p_0$.
Calculer v_n .
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $p_n = 2(v_n - u_n)$.
En déduire une expression de p_n en fonction de n .
 - Montrer que la suite (p_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?