Mathématiques en Terminale ES

David ROBERT

2011–2012

Sommaire

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions : Rappels et compléments

Sommaire

1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions affines

EXERCICE 1.1.

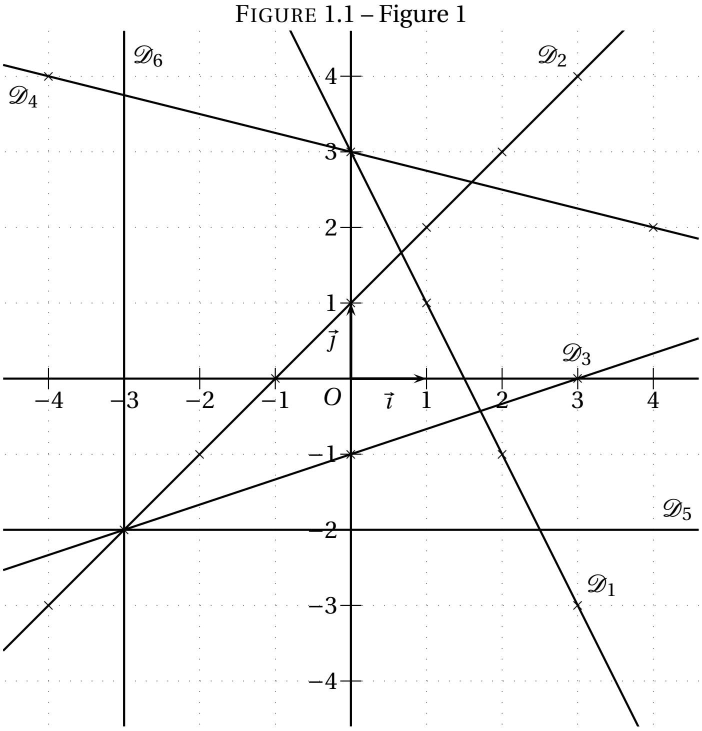
1. Dans un même repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 5$;
   - $f_2(x) = 4x - 2$;
   - $f_3(x) = -3$;
   - $f_4(x) = \frac{3}{4}x - 4$.
2. Dans un autre repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $g_1(x) = -5x + 10$;
   - $g_2(x) = \frac{3x-1}{6}$;
   - $g_3(x) = 6x - 14$;
   - $g_4(x) = \frac{-2x+1}{4}$.
3. Dans un autre repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $H(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $I(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $K(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $L(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $M(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;

EXERCICE 1.2.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (PQ) :

- $P(1;2)$ et $Q(3;-1)$;
- $P(0;-1)$ et $Q(2;3)$;
- $P(1;3)$ et $Q(1;4)$;
- $P(4;4)$ et $Q(-1;2)$;
- $P(-2;2)$ et $Q(3;2)$;

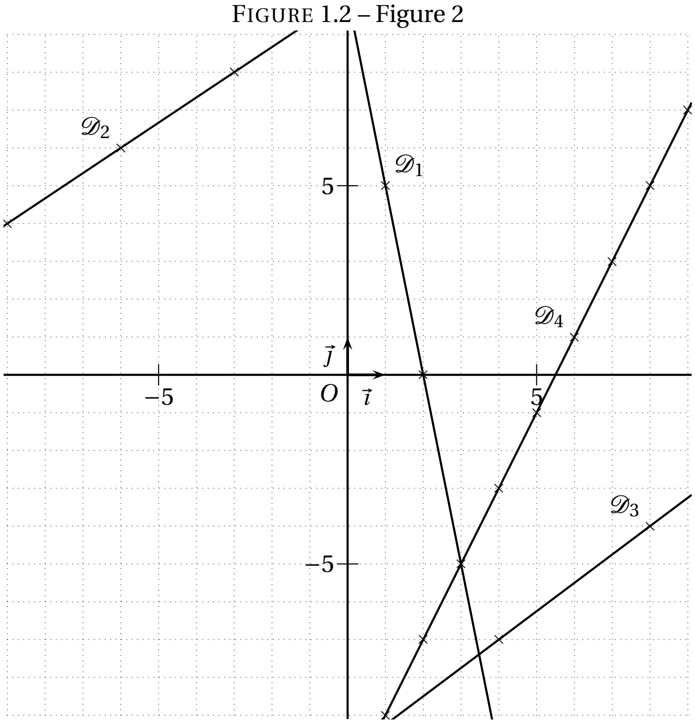
EXERCICE 1.3.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

FIGURE 1.1 – Figure 1



Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 page suivante.

FIGURE 1.2 – Figure 2



1.1.2 Autres fonctions usuelles

EXERCICE 1.4.
Compléter le tableau 1.4, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

1.1.3 Fonction trinôme

EXERCICE 1.5.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) tracer la courbe représentant le bénéfice ; quelle est sa nature ?
   (b) déterminer graphiquement puis par le calcul la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (c) déterminer graphiquement puis par le calcul la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

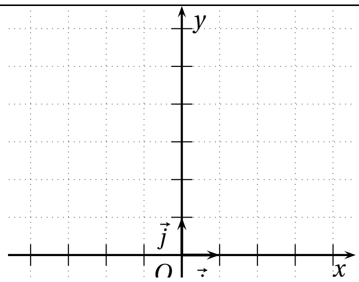
EXERCICE 1.6.
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
2. En déduire graphiquement puis par le calcul pour quelles valeurs de p la séance est rentable.
3. Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

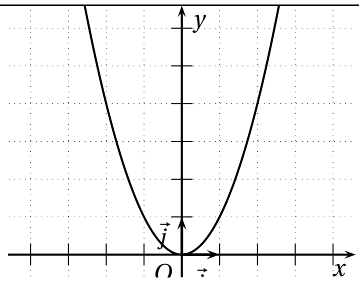
TABLE 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 1.1.2

<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine

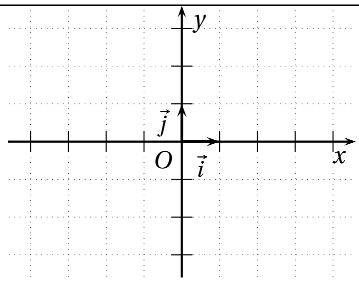
$f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$D_f = \ldots\ldots\ldots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Carré

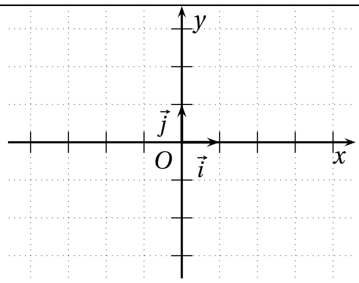
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td>
Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube

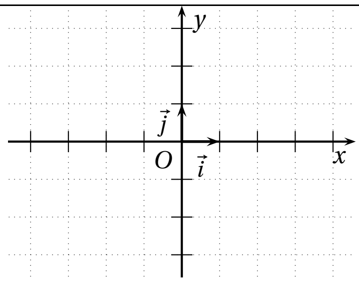
$f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$D_f = \ldots\ldots\ldots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inverse

$f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$D_f = \ldots\ldots\ldots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Racine carrée

$f(x) = \ldots\ldots\ldots$

$D_f = \ldots\ldots\ldots$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.1.4 La continuité (approche graphique)

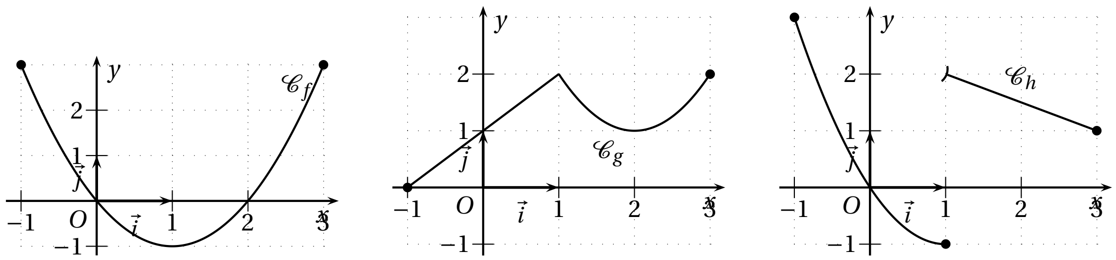
EXERCICE 1.7.
Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2$;
- $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$;
- $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.
- $l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$;

Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.

EXERCICE 1.8.
Les fonctions f, g et h représentées sur la figure 1.3 de la présente page par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1; 3]$.

FIGURE 1.3 – Trois courbes



1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1; 3]$?
2. Si la fonction n'est pas continue sur $[-1; 3]$, donner les intervalles sur lesquels elle est continue.

EXERCICE 1.9.
La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note E cette fonction.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

x	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	$-0,01$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	$0,99$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	$1,99$	2	$2,25$
$E(x)$																	

2. Représenter graphiquement E.

EXERCICE 1.10.
f est la fonction définie sur $[-2; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2; 1[\\ x+p & \text{si } x \in [1; 5] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $p = 2$;
   - $p = 1$;
   - $p = -2$.
2. f est-elle continue sur $[-2; 1[$? Sur $[1; 5]$?
3. Comment choisir p pour que f soit continue sur $[-2; 5]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.11.
f est la fonction définie sur $[-2; 3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 3 & \text{si } x \in [-2; 2] \\ 2x+1 & \text{si } x \in]2; 3] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $b = 1$;
   - $b = -2$.
2. Comment choisir b pour que f soit continue sur $[-2; 3]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.12.
f est la fonction définie sur $[-3; 2]$ par : $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 2 & \text{si } x \in [-3; -1[\\ x+1 & \text{si } x \in [-1; 2] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $a = 1$;
   - $a = 0$;
   - $a = -2$.
2. Comment choisir a pour que f soit continue sur $[-3; 2]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

1.1.5 Composition de fonctions

EXERCICE 1.13.
Une entreprise raffine de la matière première puis vend le produit raffiné.
La fonction f qui donne le nombre de tonnes de produit raffiné en fonction du nombre de tonnes x de matière première est $f(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$.
La fonction g qui donne le bénéfice de la vente (en milliers d'€) de X tonnes de produit raffiné est $g(X) = -2X^2 + 7X - 5$.

1. Que représente la fonction $h(x) = g(f(x))$?
2. Déterminer h pour $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.
3. Déterminer l'expression de h en fonction de x.

EXERCICE 1.14.
Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x + 2$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f\left(g(x)\right)$.

1. Déterminer, s'ils existent, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ et $h(5)$.
2. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
3. Déterminer l'expression de $l(x) = g\left(f(x)\right)$. A-t-on $l = h$?
4. Mêmes questions avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
5. Mêmes questions avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

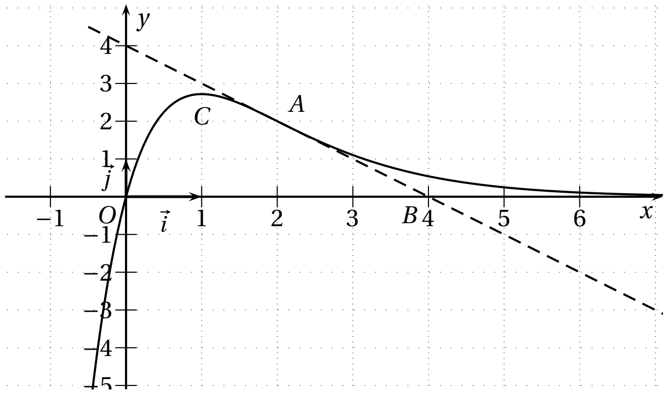
1.2 Dérivation

1.2.1 Lectures graphiques

EXERCICE 1.15.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthogonal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

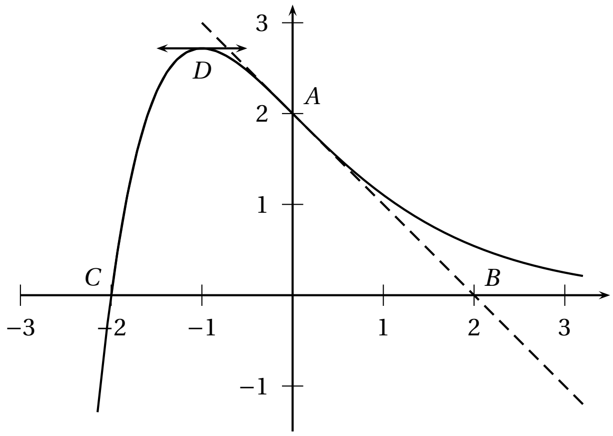


1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.4, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.4, représente une fonction h telle que $h' = g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

EXERCICE 1.16.

On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \geqslant 3$;
   - $f(x) \leqslant 2$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 1.5 page suivante, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

1.2.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

EXERCICE 1.17.

Compléter le tableau 1.2 de la présente page.

TABLE 1.2 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) =$	

FIGURE 1.4 – Courbes de l'exercice 1.15

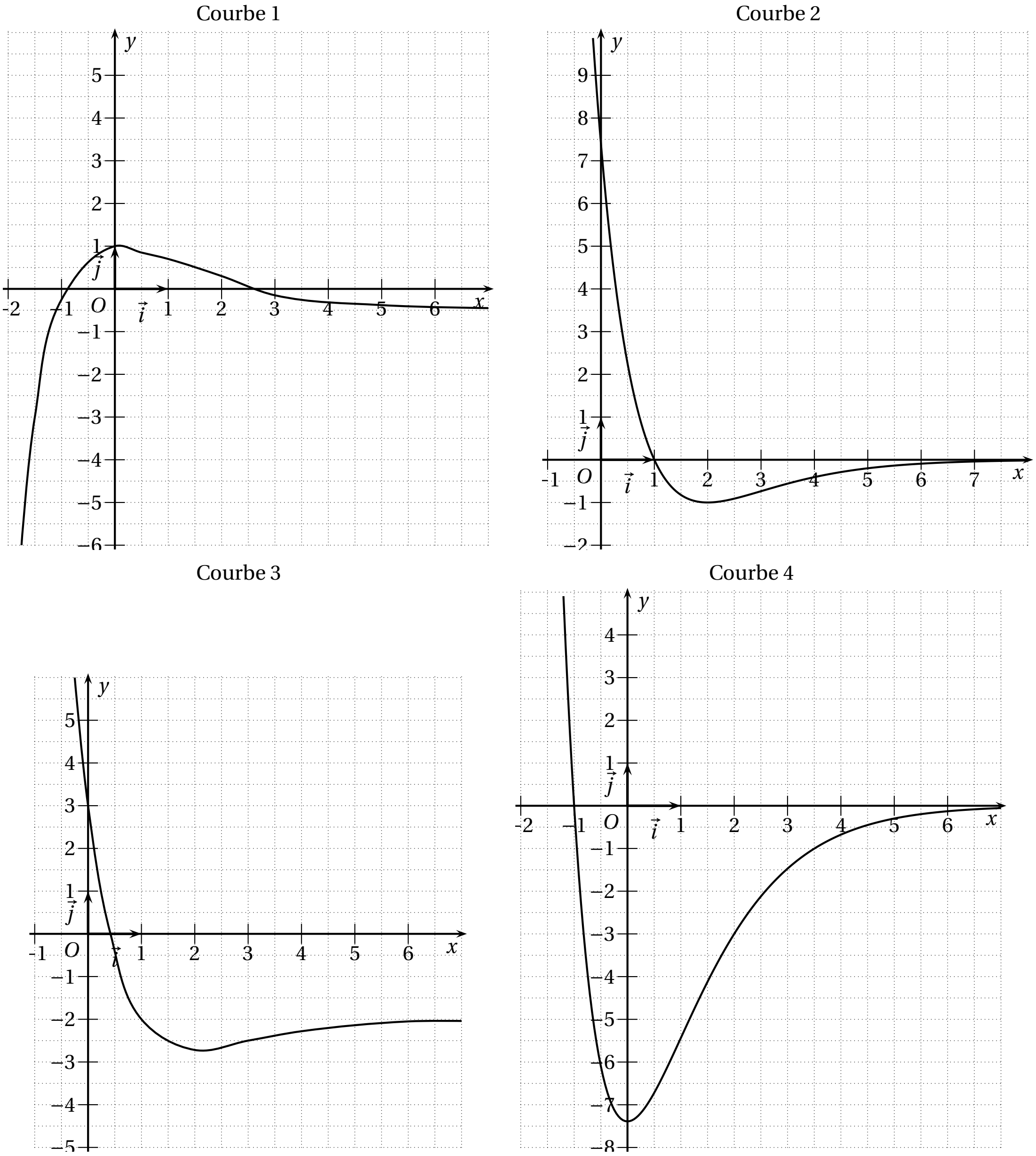
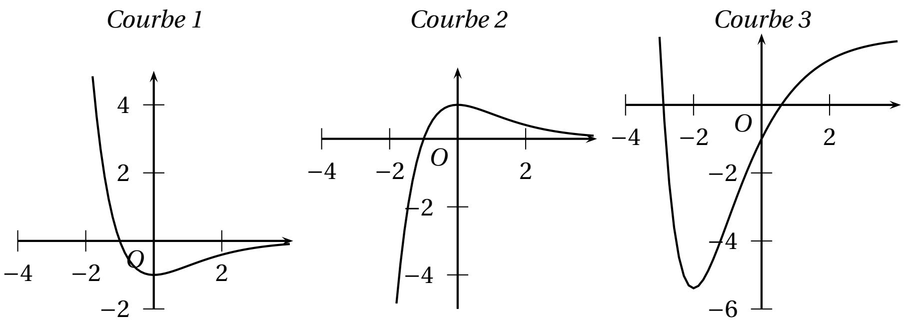


FIGURE 1.5 – Courbes de l'exercice 1.16



1.2.3 Opérations algébriques et dérivation

EXERCICE 1.18.
Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 1.3 de la présente page.

TABLE 1.3 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	Fonction dérivée
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u+v$	
$u \times v$	
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

1.2.4 Fonctions rationnelles

EXERCICE 1.19.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.
6. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

EXERCICE 1.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -1.
   (d) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. (a) Dans un repère orthogonal placer les points et représenter les tangentes rencontrés dans les questions précédentes. (*unités graphiques 1 cm = 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm = 2 unités sur l'axe des ordonnées*)
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

EXERCICE 1.21.
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-11x+28}{x-3}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
   (d) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4 et T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la droite T.
2. Dans un repère :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de f et A ;
   (b) tracer T et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$;
   (c) tracer $\mathscr{C}$.

1.2.5 Dérivée et composition

EXERCICE 1.22.
On donne dans le tableau ci-dessous pour plusieurs fonctions f données, la dérivée de $f(x)$ et la dérivée de $f(g(x))$ où g est une fonction définie, dérivable et telle que la composée de f et de g est aussi définie et dérivable.

$f(x)$	$f'(x)$	$(f(g(x))'$
$mx+p$	m	$m\times g'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{-n}{(g(x))^{n+1}}\times g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x)$

1. Conjecturer la formule générale qui donne la dérivée de la fonction $f(g(x))$.
2. Appliquer cette formule pour $f(x)=x^5$ et :
   - $g(x)=2x-4$;
   - $g(x)=x^2+3x-4$.
3. Appliquer la formule pour déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, où u est une fonction dérivable et strictement positive, à l'aide de la formule générale obtenue en 1 :
   - u^n ;
   - $\frac{1}{u}$;
   - $\sqrt{u}$.
4. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes à l'aide des formules obtenues en 3 :
   - $f(x)=(3x^2+2x+7)^5$;
   - $g(x)=\frac{1}{x^3+2x+1}$;
   - $h(x)=\sqrt{x^2+x+4}$;
   - $l(x)=\sqrt{(x+1)^5}$.

EXERCICE 1.23.
On pose $h(x)=f(g(x))$ pour tout réel x.

1. Recopier et compléter les inégalités suivantes dans chacun des cas suivants :
   (a) en supposant que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
   (b) en supposant que f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   (c) en supposant que l'une est croissante et l'autre décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Soient a et b tels que $a<b$
   alors $g(a)\ldots\ldots g(b)$ car $g\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   et $f(g(a))\ldots\ldots f(g(b))$ car $f\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   finalement $h(a)\ldots\ldots h(b)$
   La fonction h est donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ sur $\mathbb{R}$

   Conjecturer alors le sens de variation de la fonction h en fonction des sens de variations de f et de g.
2. Soient f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x)=x^3$, $g(x)=2x+1$ et $h(x)=-x+2$ et l la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$.
   En utilisant la propriété obtenue en 1, déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :
   - $x\longmapsto f(g(x))$;
   - $x\longmapsto g(f(x))$;
   - $x\longmapsto f(h(x))$;
   - $x\longmapsto g(h(x))$;
   - $x\longmapsto h(g(x))$;
   - $x\longmapsto h(l(x))$.

1.3 Limites

1.3.1 Lectures graphiques

EXERCICE 1.24.
On donne, sur les figures 1.6 et 1.7 de la présente page, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition ;
3. indiquer les asymptotes à chacune des courbes.

FIGURE 1.6 – Lectures graphiques : premier cas

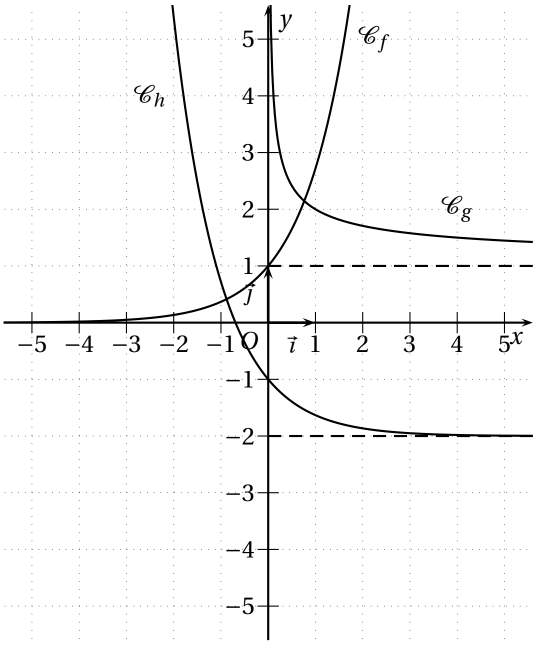
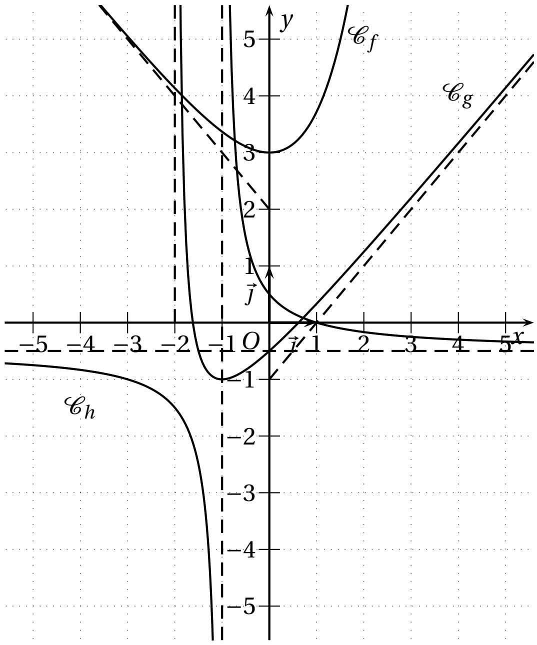


FIGURE 1.7 – Lectures graphiques : second cas (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties)



1.3.2 Limites des fonctions usuelles

EXERCICE 1.25.
Compléter le tableau 1.4 de la présente page.

TABLE 1.4 – Tableau du 1.25

f	D_f	Limites
$f(x)=mx+p$	$\mathbb{R}$	Si $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ Si $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p)=\ldots\ldots$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=\ldots\ldots$
$f(x)=x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\ldots\ldots$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=\ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\ldots\ldots$

1.3.3 Opérations sur les limites

EXERCICE 1.26.
Compléter les tableaux 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8 de la présente page en indiquant dans chaque case, lorsqu'on peut conclure, respectivement, les valeurs de $\lim_{x\to\alpha}\left[f(x)+g(x)\right]$, de $\lim_{x\to\alpha}\left[f(x)\times g(x)\right]$, de $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{1}{f(x)}\right]$ et de $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ (l et l' sont des réels).

TABLE 1.5 – Limite d'une somme

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

TABLE 1.6 – Limite d'un produit

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq 0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

TABLE 1.7 – Limite de l'inverse

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq 0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}$					

TABLE 1.8 – Limite d'un quotient

$\lim_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq 0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

1.3.4 Détermination de limites

EXERCICE 1.27.
Déterminer les limites suivantes et indiquer les asymptotes que l'on peut en déduire :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{-6}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+2x+3\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5}{x}+x^2\right)$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}+3x^2-2\right)$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{3}{x-2}+5x+7\right)$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2}\right)$

1.3.5 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

EXERCICE 1.28.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

EXERCICE 1.29.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+3}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE 1.30.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 1.31.
Soit f la fonction qui a x associe $f(x) = \dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

1.3.6 Inégalités et limites

EXERCICE 1.32.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1}-2x$.

1. Montrer que $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.
2. En déduire que $f(x) \geqslant x$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

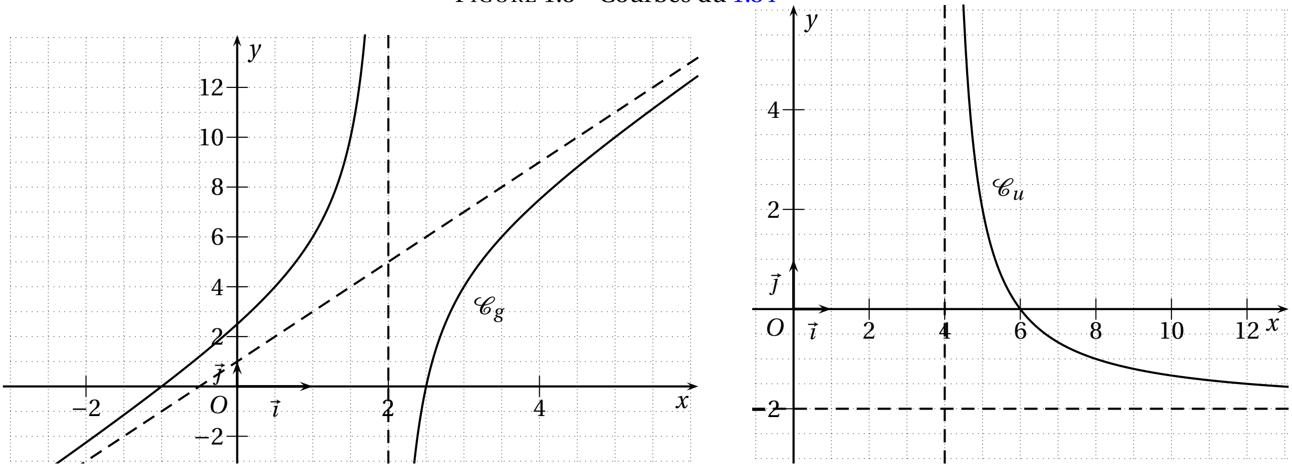
EXERCICE 1.33.
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

1.3.7 Limites de fonctions composées

EXERCICE 1.34 (Lectures graphiques)**.**
Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_u$ de la figure 1.8 page suivante représentent respectivement la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et une fonction u définie sur $]4\,;+\infty[$.
On considère la fonction composée $f = u\circ g$ définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;2\right[\cup]3\,;+\infty[$.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(3,5)$ et $f(5)$
2. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$?
4. Déterminer $a = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to a} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$?
5. Déterminer de la même manière la dernière limite aux bornes de son ensemble de définition de f.

FIGURE 1.8 – Courbes du 1.34



EXERCICE 1.35 (Calculs)**.**
On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
On pose $h(x) = g\left(f(x)\right)$ pour $x \in]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; 1[\cup]1\,; +\infty[$.

1. Compléter :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to\ldots\ldots} g(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\}\text{ donc, par }\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ldots\ldots$$
2. Compléter :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to\ldots\ldots} g(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\}\text{ donc, par }\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x) = \ldots\ldots$$
3. En procédant de la même manière, déterminer les autres limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 1.36 (Calculs)**.**
On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
On pose $h(x) = g\left(f(x)\right)$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\,; 0\}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2. (a) Étudier le signe de $f(x)+1$ selon les valeurs de x.
   (b) En déduire les solutions des inéquations :
   - $f(x) > -1$;
   - $f(x) < -1$.

   (c) i. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\x<-\frac{1}{2}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\x>-\frac{1}{2}}} f(x)$.
   ii. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)$.
   iii. En déduire $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} h(x)$.
3. Déterminer l'expression de h et retrouver les limites de h en $+\infty$ et $-\dfrac{1}{2}$

1.4 Bilan et compléments

1.4.1 Fonction continue

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou, aucune asymptote verticale. Cependant la continuité est définie précisément en mathématiques de la façon suivante :

Définition (non exigible)**.** Une fonction f est dite continue en un réel a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques. Cette définition implique que :
- il est nécessaire que $f(x)$ soit définie en a pour être éventuellement continue ;
- il faut en plus que $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$ pour qu'elle y soit continue.

Définition (non exigible)**.** Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si, pour tout réel $a \in I$, f est continue en a.

Propriété 1.1. *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où leur dénominateur ne s'annule pas.

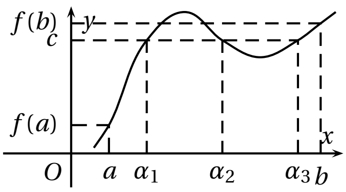
On l'admettra.

Valeurs intermédiaires

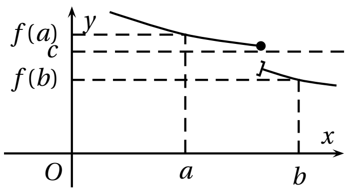
Propriété 1.2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a; b]$.*

On l'admettra.

Exemples 1.1.



f est continue sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ a au moins une solution ; elle peut en avoir plusieurs.

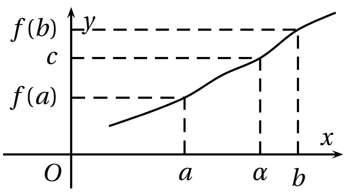


f n'est pas continue sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

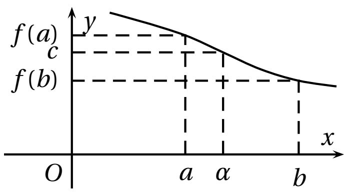
Théorème 1.3 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a; b]$.*

On l'admettra.

Exemples 1.2.



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.

Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifient que sur l'intervalle considéré la fonction est soit *continue **et** strictement croissante*, soit *continue **et** strictement décroissante*. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur cet intervalle (voir l'exercice 1.39 page 18).

1.4.2 Inégalités et limites

Propriété 1.4. *Soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I et soient α et β pouvant être des réels ou $\pm\infty$.*
- *Si $f(x) \geqslant u(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.*
- *Si $f(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.*
- *Si $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.*

On l'admettra.

Remarque. La dernière propriété est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

1.4.3 Fonctions composées

Définition 1.1. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
On appelle fonction composée de f et de g la fonction h définie pour tout $x \in D_f$ par $h(x) = g\left(f(x)\right)$.
On notera parfois $h = g \circ f$.

Propriété 1.5. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si f et g sont dérivables alors la fonction $h = g \circ f$ est dérivable et $h'(x) = g'\left(f(x)\right) \times f'(x)$.

On l'admettra.

Exemples 1.3. On démontre facilement les formules suivantes (qui sont plus faciles à appliquer que celle de la propriété) :
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 1.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g telles que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Soit $h = f \circ g$. On a :
- *si f et g ont le même sens de variation, alors h est croissante ;*
- *si f et g ont des sens de variation différents, alors h est décroissante.*

Preuve. Cette propriété a été démontrée au paragraphe 1.2.5 page 10. ♢

Propriété 1.7. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.*
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} g(X) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\left(f(x)\right) = \gamma$ où α, β et γ peuvent être des réels ou $\pm\infty$.

On l'admettra.

1.5 Exercices

EXERCICE 1.37.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. (a) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;1]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. (a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Étudier les variations de f.

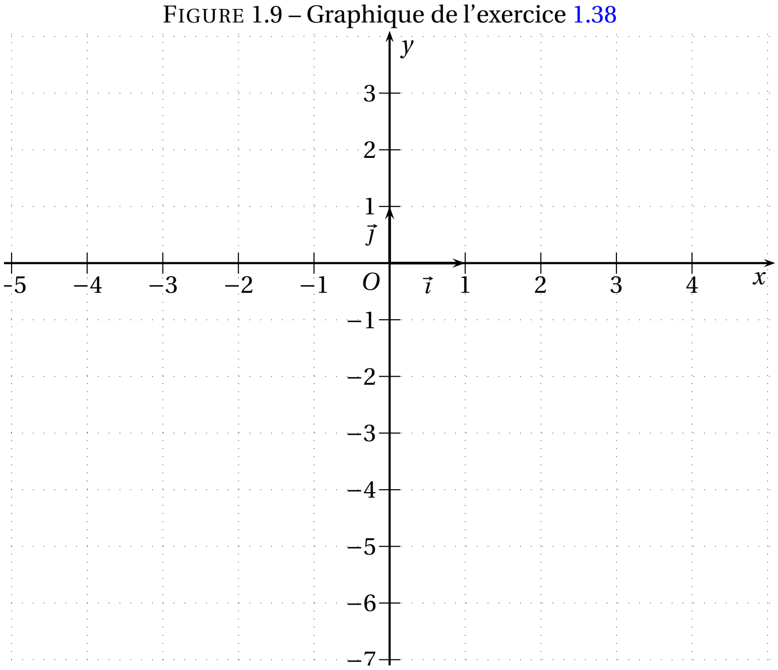
EXERCICE 1.38.
Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

1. Étudier la fonction g (limites aux bornes et variations).
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-2x \times g(x)}{\left(2x^2 + 2\right)^2}$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
5. Donner les équations des tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectviement aux points d'abscisses 1 et -1.
6. Représenter dans le repère de la figure 1.9 de la présente page les droites Δ, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ puis $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 1.9 – Graphique de l'exercice 1.38



EXERCICE 1.39 (Tableau de variations)**.**
Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

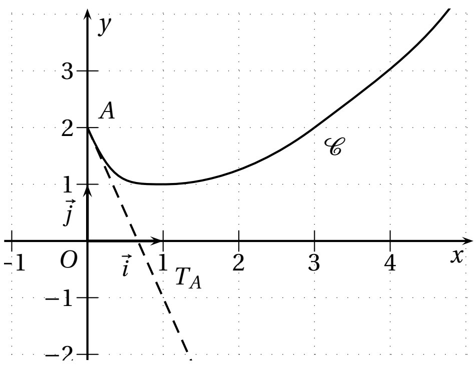
x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2)=0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y=4$
   - $y=4(x-2)$
   - $x=4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;2)$ est $y=3x-1$.
   On a :
   - $f(2)=1$
   - $f'(1)=-1$
   - $f'(1)=3$.
4. Sur l'intervalle $[-1\,;0]$, la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

EXERCICE 1.40 (Fonctions composées, sujet d'annales)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.10 de la présente page représente une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ dans le repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite T_A est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin, la fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

FIGURE 1.10 – Courbe de l'activité 1.40

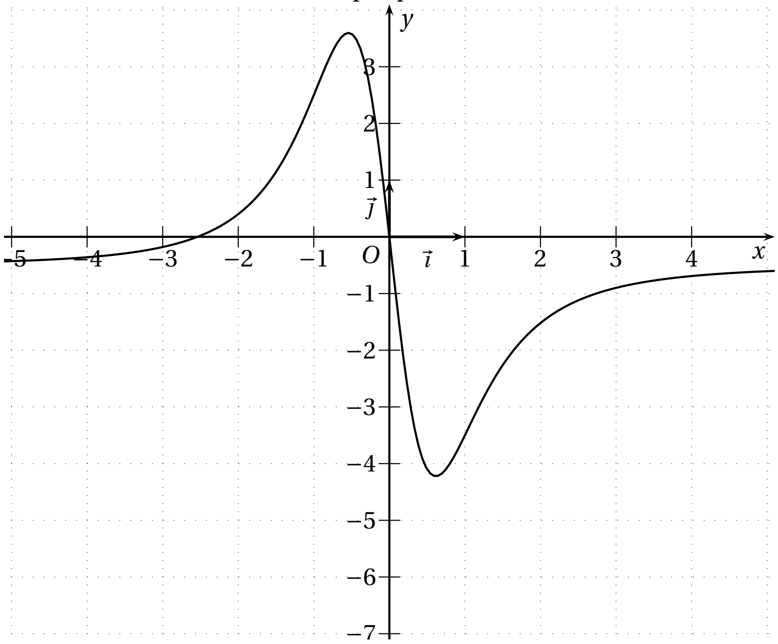


1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes.
   (a) Déterminer, sans justifier, $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Donner le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.
2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g=\frac{1}{f}$. On note g', la fonction dérivée de g.
   (a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.
   (b) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$? Justifier la réponse donnée.
   (c) Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.
   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g.
   Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité : 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

EXERCICE 1.41.
La courbe de la figure 1.11 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique :
   (a) Déterminer le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) Déterminer le signe de $u'(x)$ selon les valeurs de x.
2. On pose $f = u^2$.
   (a) Déterminer une expression de f'.
   (b) En déduire le signe de f' puis les variations de f.

FIGURE 1.11 – Graphique de l'exercice 1.41



EXERCICE 1.42 (D'après Liban 2005)**.**
Le tableau d'informations ci-dessous fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $u'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.
2. On considère maintenant les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, $g(x) = (u(x))^2$ et $h(x) = (u(x))^3$ où u désigne la fonction de la question précédente.
   (a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :
   Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;
   Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».
   (b) Pour chacune de ces trois fonctions :
      i. Déterminer une expression de leur fonction dérivée.
      ii. En déduire le signe de leur fonction dérivée et les variations de la fonction.
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$.
   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des trois phrases 3a, 3b et 3c par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées en justifiant votre choix.

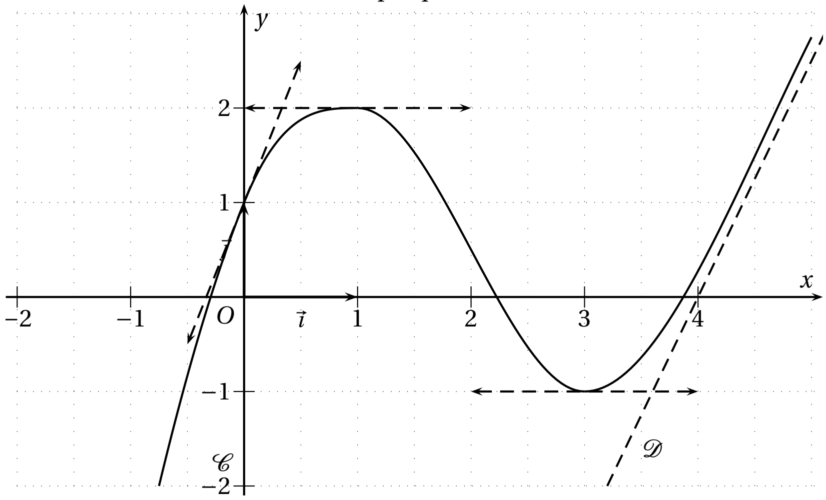
(a) Le nombre $f'(-2)$:
- n'existe pas
- vaut -20
- vaut $-\frac{16}{5}$
- vaut $-\frac{5}{16}$
- vaut $\frac{5}{16}$

(b) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :
- à l'axe des abscisses
- à la droite d'équation $y = x$
- à la droite d'équation $y = 3x$

(c) Le nombre dérivé de la fonction h en 0 :
- n'existe pas
- vaut 0
- vaut -12
- vaut 1
- vaut 12

EXERCICE 1.43 (D'après Liban 2006).
La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 1.12 de la présente page est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

FIGURE 1.12 – Graphique de l'exercice 1.43



I. Étude graphique de la fonction f

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer laquelle.

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   - $y = -1$
   - $x = 1$
   - $x = -1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   - $y = \frac{5}{2}x - 10$
   - $y = \frac{5}{2}x - 9$
   - $y = 3x - 10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   - 1
   - 3
   - -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ est :
   - 2
   - 1
   - 3

II. Étude d'une fonction g

On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \left(f(x)\right)^2$.

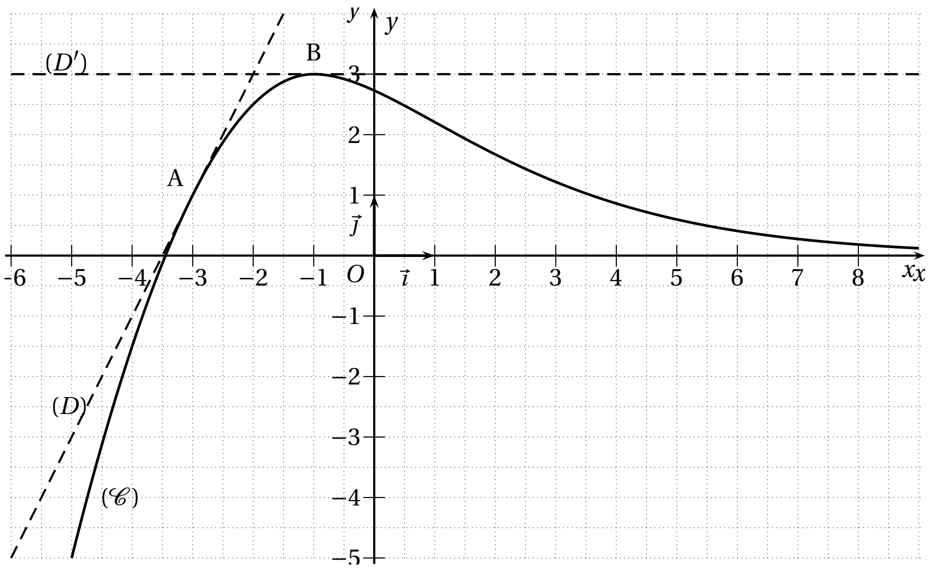
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
2. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
3. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1\,;\,+\infty[$ de l'inéquation $g(x) \leqslant 1$.

EXERCICE 1.44 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2007)**.**

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3	↘ 0

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3\ 1)$ et B$(-1\,;3)$ et son intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse α. Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(f(x)\right)^3$.
   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition (on justifiera le résultat).
   (b) Calculer $h'(-3)$.

Devoir surveillé n°1

Continuité – Composition – Dérivation – Graphes

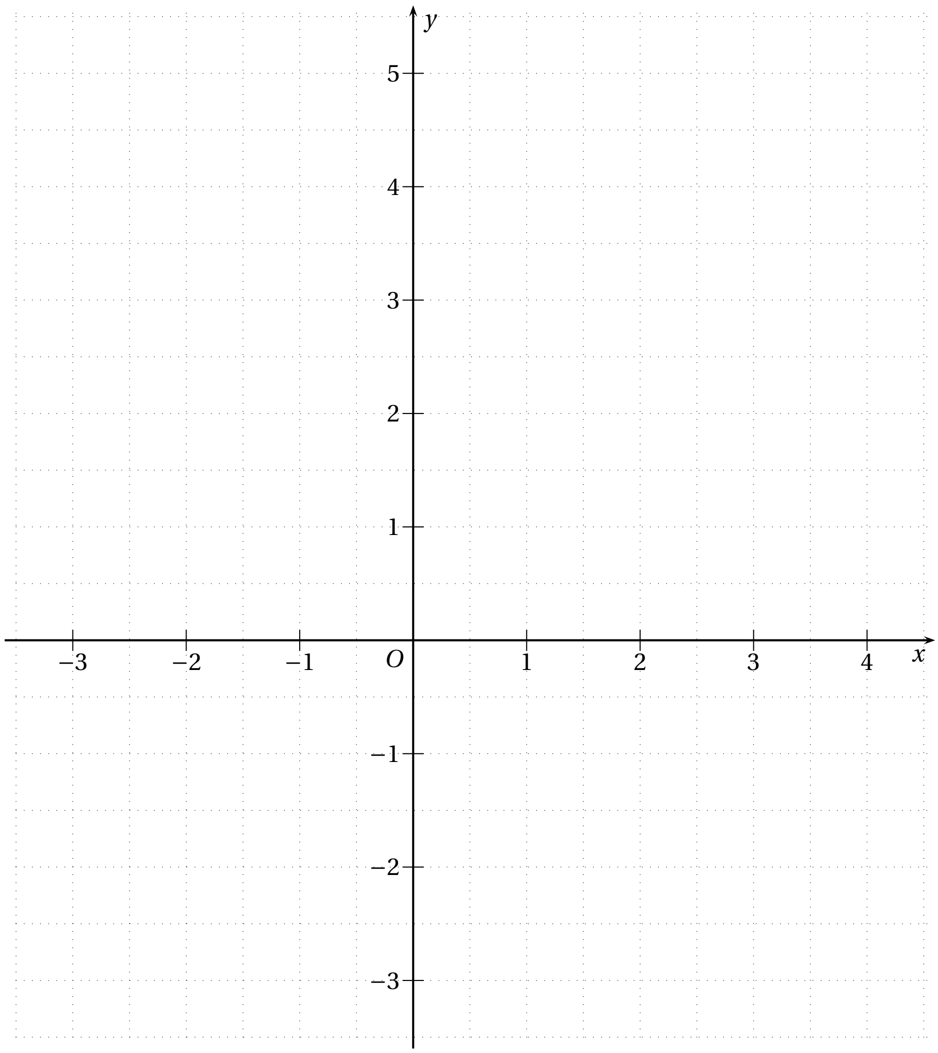
EXERCICE 1.1 (3 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 2x^2 + x + 1$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f\big(g(x)\big)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $h(-3)$, $h(-1)$, $h(0)$ et $h(1)$.
2. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
3. On pose $\ell(x) = g\big(f(x)\big)$. Sur $\mathbb{R}^+$, a-t-on $\ell = h$? *On justifiera.*

EXERCICE 1.2 (3 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

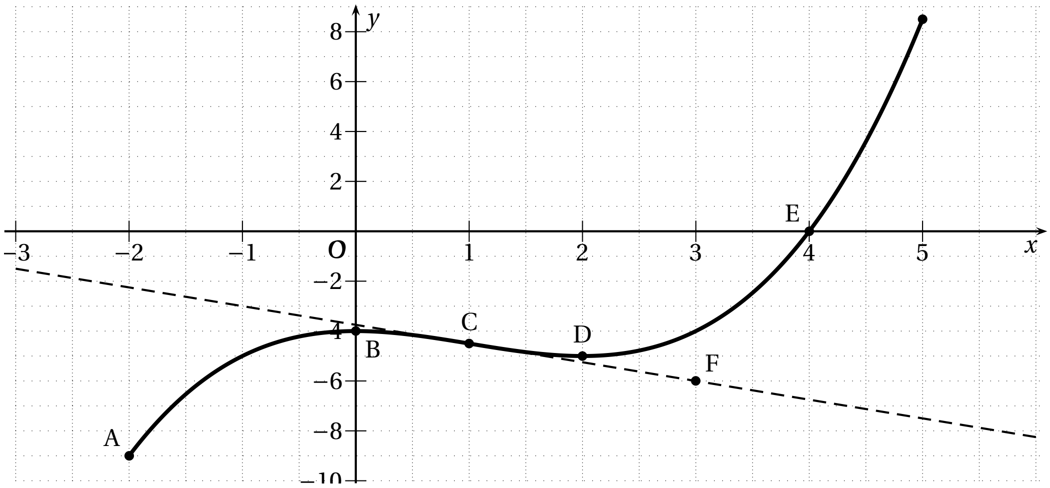
1. Dans le repère de la figure 1.1 de la présente page tracer en bleu $\mathscr{C}_1$ et en vert $\mathscr{C}_{-2}$ *(c'est-à-dire les représentations de f pour $m = 1$ et $m = -2$).*
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.
3. Déterminer m pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer alors sa représentation en rouge.

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.2



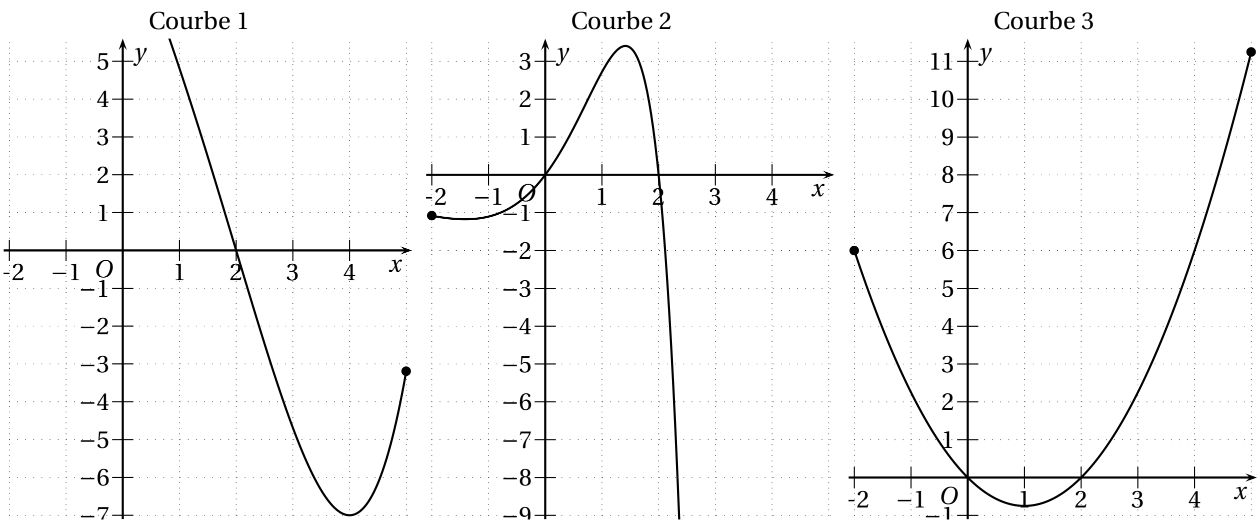
EXERCICE 1.3 (5 points).
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$, croissante sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[2;5]$ et décroissante sur l'intervalle $[0;2]$. On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2;5]$.
La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée sur la figure 1.2 de la présente page dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2;-9)$, $B(0;-4)$, $C(1;-4,5)$, $D(2;-5)$ et $E(4;0)$.
En chacun des points B et D la tangente à la courbe Γ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3;-6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe Γ au point C.

FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.3 (non spécialistes)



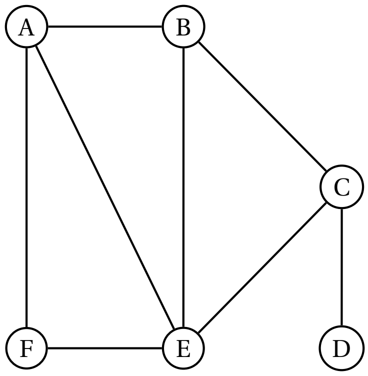
1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$.
2. Parmi les trois représentations graphiques 1.3 de la présente page, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $[-2;5]$.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

FIGURE 1.3 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.3 (non spécialistes)



EXERCICE 1.3 (5 points)**.**
Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.
   (a) Citer deux sommets non adjacents (*justifier brièvement*).
   (b) Ce graphe est-il connexe (*justifier brièvement*) ?
   (c) Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*
   (d) Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*
   (e) Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).
   (f) Déterminer le diamètre de ce graphe.



2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :
   (a) quatre d'entre elles aient 4 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 6 amis ?
   (b) trois d'entre elles aient 5 amis, deux d'entre elles 3 amis et la dernière 2 amis ?
   (c) deux d'entre elles aient 3 amis, deux d'entre elles 2 amis et les deux dernières 1 ami ?

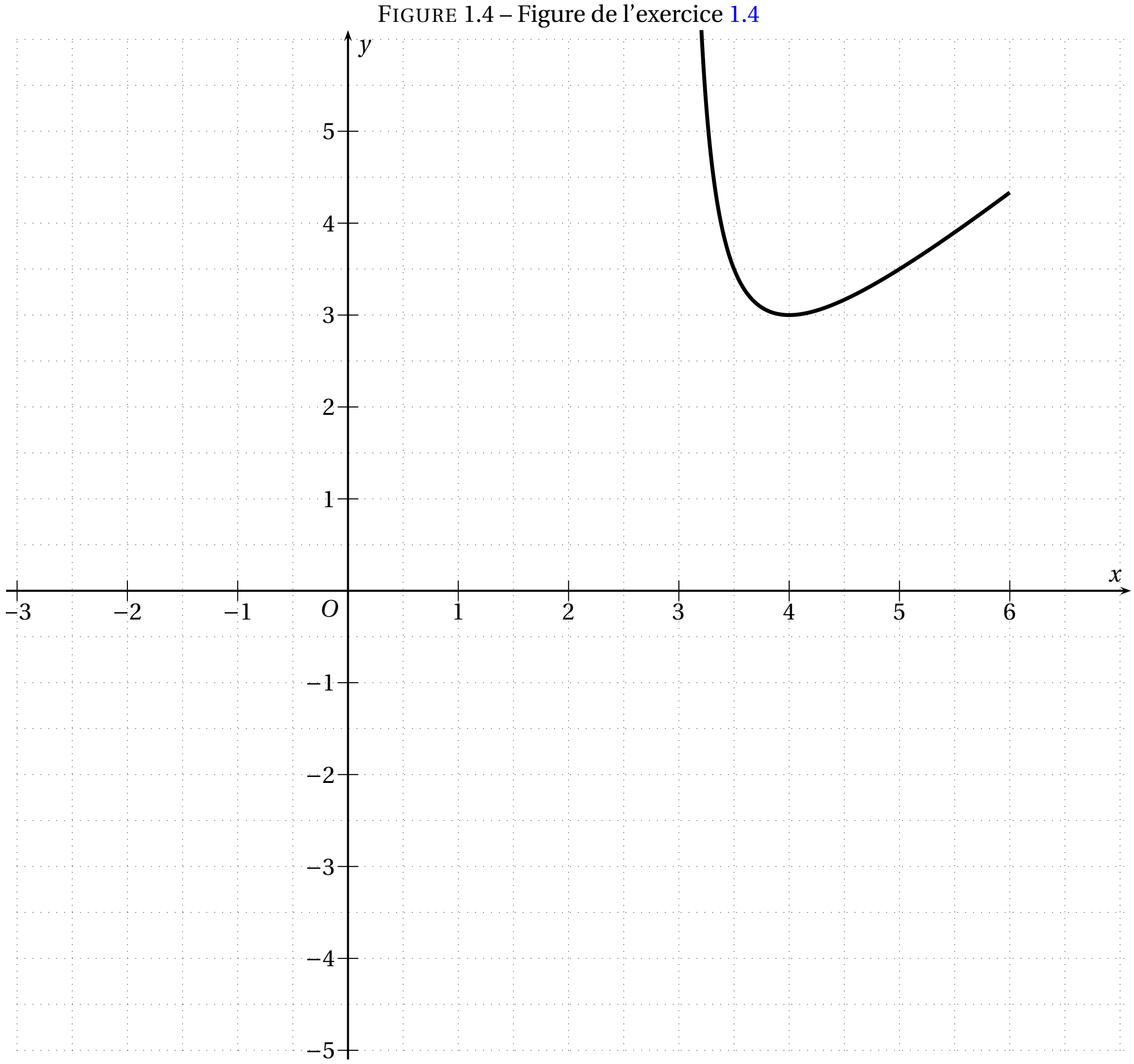
EXERCICE 1.4 (9 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.
2. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
3. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Dans le repère de la figure 1.4 de la présente page où une partie de la courbe $\mathscr{C}$ a déjà été tracée :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 3 ;
   (d) compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}$.

FIGURE 1.4 – Figure de l'exercice 1.4



Devoir surveillé n°2

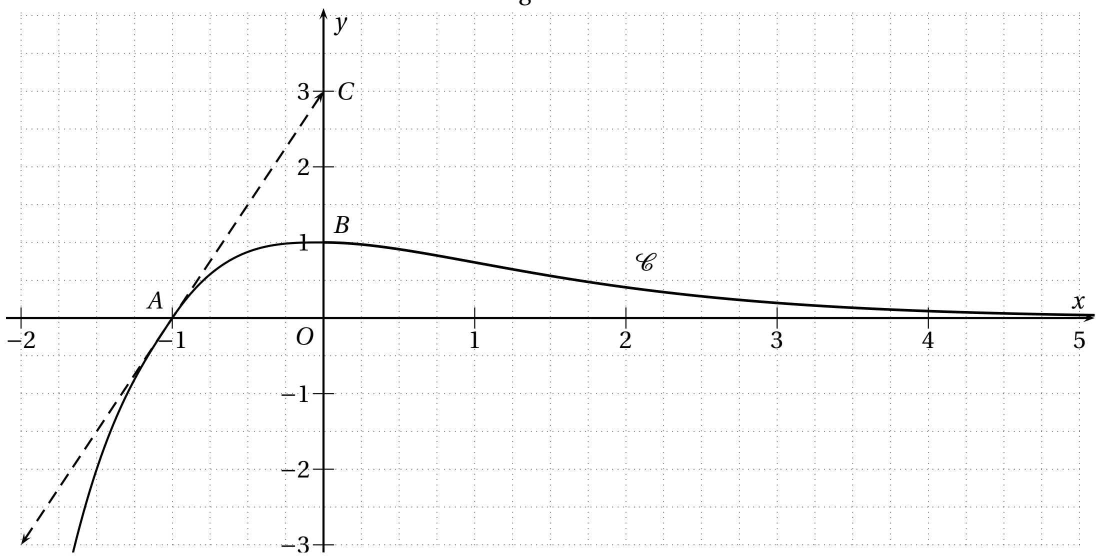
Composition – Limites – Suites

EXERCICE 2.1 (6 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$			1		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 2.1 de la présente page représente la fonction u dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points $A(-1\ 0)$ et $B(0\,;1)$. La tangente à la courbe en A passe par $C(0\,;3)$.

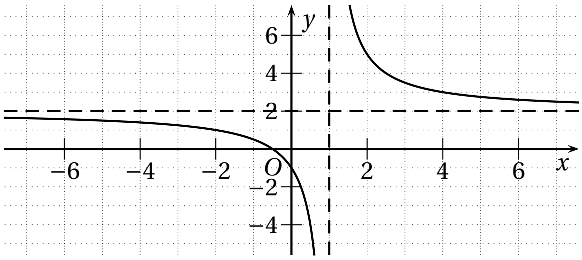
FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



1. Sans justifier :
   (a) Déterminer graphiquement $u'(0)$ et $u'(-1)$.
   (b) Donner le signe de u en fonction de x.
   (c) Donner le signe de u' en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f = u^2$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner l'expression de f', la dérivée de f, en fonction de u et de u'.
   (b) Calculer $f'(-1)$ et $f'(0)$.
3. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g = \frac{1}{u}$.
   On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.
   (a) Donner l'expression de g', la dérivée de g, en fonction de u et de u'.
   (b) Déterminer les variations de g.

Exercice 2.2 (5 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
*Chaque bonne réponse rapporte un point, **chaque réponse incorrecte retire 0,5 point**, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. La courbe de la figure ci-dessous est celle d'une fonction f.



Graphiquement on peut conjecturer que :

❒ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$

2. Soit g une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x) = -\infty$, alors on sait que la courbe de g :

❒ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ ❒ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$ ❒ n'admet pas d'asymptote

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $h(x) = \frac{-2x+1}{x-3}$, alors :

❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = -\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = -2$

4. Soit i une fonction telle que, pour tout $x > 0$, $-\frac{2}{x} < i(x) < \frac{2}{x}$, alors :

(a) ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x) = 0$ ❒ on ne peut rien dire pour $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} i(x)$

(b) ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = +\infty$ ❒ $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 0$ ❒ on ne peut rien dire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)$

Exercice 2.2 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+2} \end{cases}$.

On donne sur la figure 2.2 page ci-contre deux courbes dont l'une d'elles est la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$.

(a) Déterminer quelle est la courbe de f.

(b) Construire la représentation en chemin de (u_n).

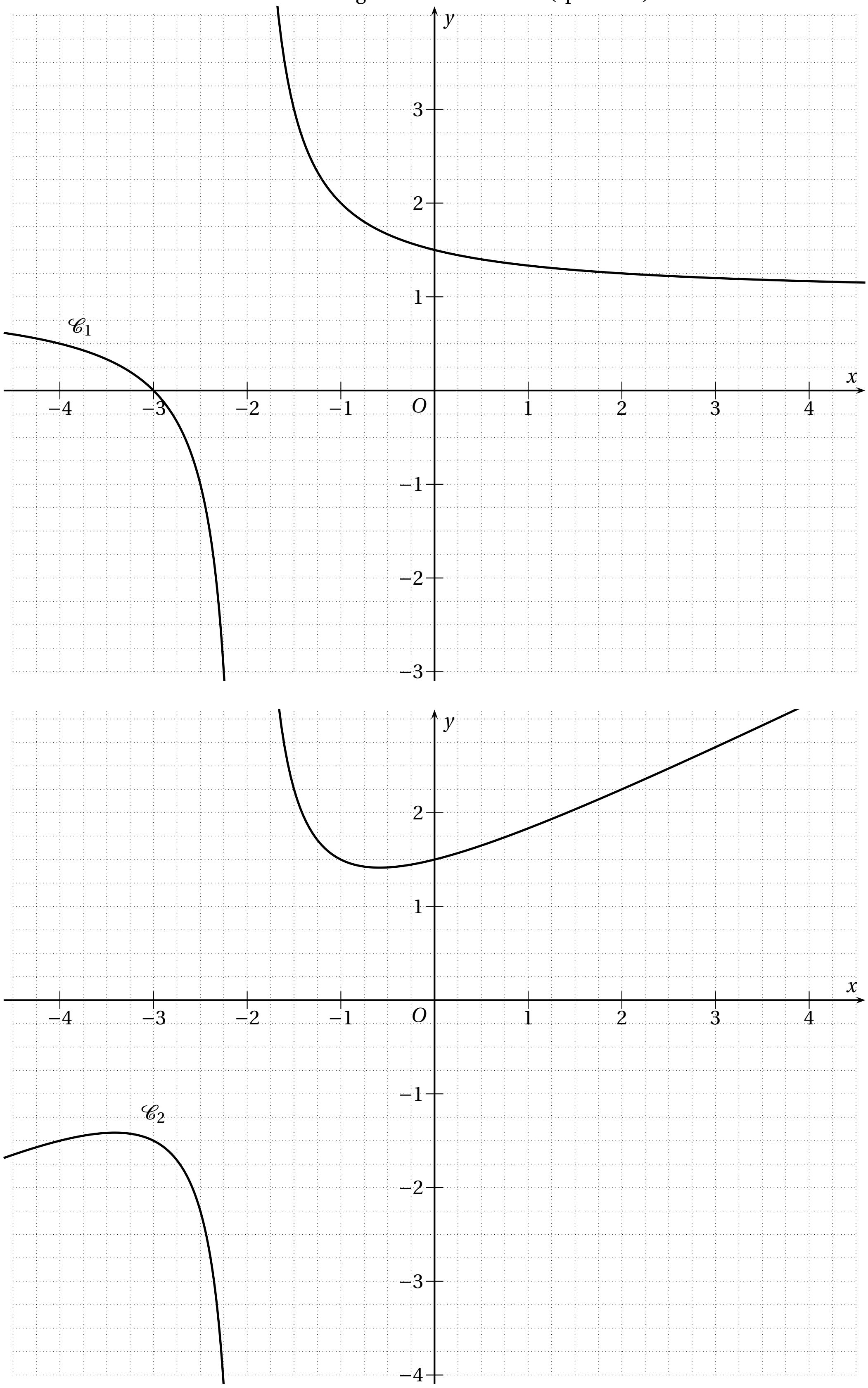
2. La suite (v_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

(a) Montrer que (v_n) est bornée par 0 et 3.

(b) Étudier la monotonie de (v_n).

(c) Étudier la convergence de (v_n).

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2 (spécialité)



EXERCICE 2.3 (9 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{2x+2}$.
On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

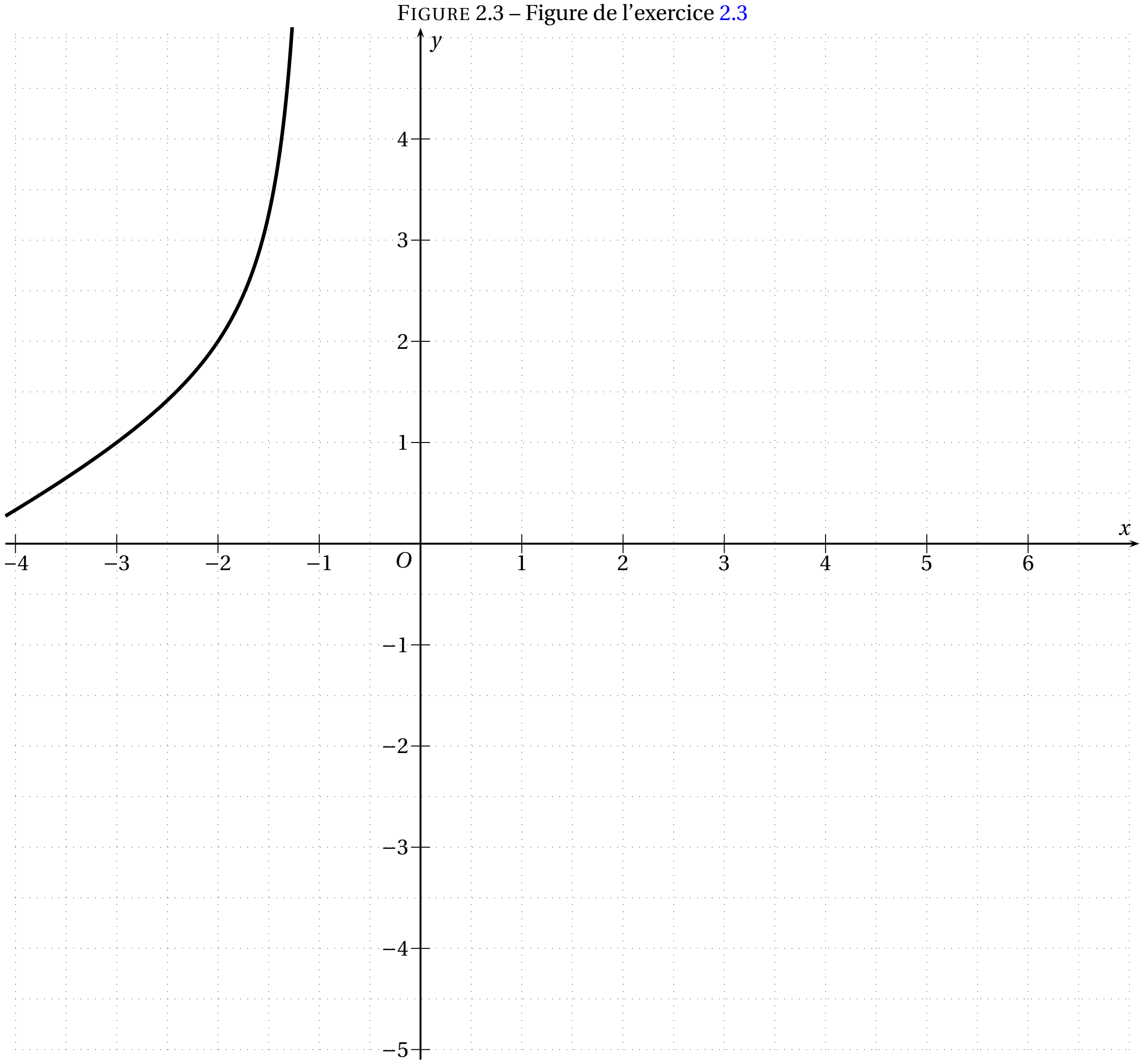
1. Montrer que $f(x)=0,5x+2-\frac{2}{2x+2}$.
2. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.

   (b) Déterminer les limites de $f(x)-(0,5x+2)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
3. On admet que $f'(x)=\frac{2x^2+4x+6}{(2x+2)^2}$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.
   Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.
   En déduire les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître le signe de $f'(x)$ et les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
5. Sur la figure 2.3 de la présente page :

   (a) Tracer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$ trouvées à la question 2.

   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3



Chapitre 2

Statistiques à deux variables

Sommaire

2.1 Activité

ACTIVITÉ 2.1 (Délit d'initié (d'après Yallouz Arie))**.**

La petite histoire racontée ci-dessous n'a bien sûr rien à voir avec des faits réels.

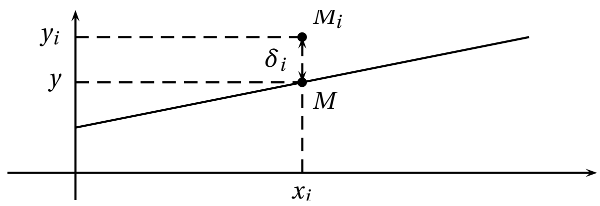
Un financier assure lors d'un procès intenté contre lui sous le motif de « délit d'initié », avoir basé ses achats d'actions d'une grande entreprise sur les données publiques résumées dans le tableau ci-dessous, donnant pour onze trimestres consécutifs un indicateur des ventes et un indicateur de la valeur de ses actions en bourse.

Trimestre i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vente	100	95	67	80	87	55	70	90	82	50	90
Cours	85	77	74	62	67	69	56	63	71	68	54

1. Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de l'indicateur des ventes.
   Cette représentation graphique permet-elle d'anticiper le cours de l'action ?
2. Au cours du procès l'avocat du financier présente un graphique où l'on regarde comment évolue l'indicateur du cours boursier en fonction de l'indicateur de vente du trimestre *précédent.*
   (a) Représenter graphiquement l'évolution du cours des actions en fonction de la vente au trimestre précédent.
   (b) Quelle est la forme du nuage de points obtenu ?
   (c) On appelle A le point ayant la plus petite abscisse parmi les points du nuage et B celui ayant la plus grande abscisse.
   - Tracer la droite (AB).
   - Passe-t-elle suffisamment proche du nuage pour pouvoir prédire les évolutions du cours des actions ?
   - Donner une équation de la droite (AB) de la forme $y = mx + p$ (*on arrondira les coefficients au centième*).

   (d) N_1 désigne le nuage correspondant aux cinq premiers points et N_2 celui correspondant aux cinq derniers points.
   - Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du nuage N_1 et celles du point moyen G_2 du nuage N_2.
   - Tracer la droite (G_1G_2).
   - Passe-t-elle suffisamment proche du nuage pour pouvoir prédire les évolutions du cours des actions ?
   - Donner une équation de la droite (G_1G_2) de la forme $y = ax + b$(*on arrondira les coefficients au centième*).
   - Vérifier que cette droite passe par le point moyen G du nuage de points.
3. Le financier assure avoir basé sa prévision du cours de bourse à l'aide d'une droite Δ d'équation : $y = 0,44x+31,86$.
   L'objet de cette question est de comparer les trois types d'ajustement.

(a) On ajuste les points (M_i) d'un nuage par une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$, on note δ_i l'écart entre le point $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ du nuage et le point M de même abscisse x_i appartenant à la droite Δ.
Ainsi $\delta_i = y_i - y = y_i - (ax_i + b)$ (voir figure ci-contre).
Compléter le tableau 2.1 de la présente page.



(b) La somme $\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$ est appelée somme des résidus quadratiques en y. Comparer les deux sommes.
Que remarquez-vous ?

TABLE 2.1 – Comparaison des ajustements

x_i (vente au trimestre i)	y_i (cours au trimestre $i+1$)	Avec la droite (AB) $\left[y_i - (mx_i + p)\right]^2$	Avec la droite (G_1G_2) $\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$	Avec la droite Δ $\left[y_i - (0{,}44x_i + 31{,}86)\right]^2$
100	77			
95	74			
67	62			
80	67			
87	69			
55	56			
70	63			
90	71			
82	68			
50	54			
Somme				

2.2 Bilan et compléments

2.2.1 Nuage de points, point moyen

On suppose que, suite à une étude, on s'intéresse à deux variables numériques discrètes sur une population. À chaque individu de cette population on associe ainsi un couple $\left(x_i\,;\,y_i\right)$, où x_i est la valeur de la première variable et y_i la valeur de la seconde.
L'ensemble des couples forme une série satistique double à deux variables, notée simplement $\left(x_i\,;\,y_i\right)$.
Si la première variable est le temps, on parle de série chronologique.

Définition 2.1. Soit $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ une série satistique à deux variables.
- L'ensemble des points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ est appelé le *nuage de points* de la série.
- Le *point moyen* de ce nuage est le point $G\left(\overline{x}\,;\,\overline{y}\right)$ où $\overline{x}$ est la moyenne des x_i et $\overline{y}$ la moyenne des y_i.
- On appelle *droite de régression*, ou ajustement affine, toute droite conçue pour passer *au plus près* des points du nuage.

Remarque. Un ajustement affine n'a de sens que si les points sont presque alignés (si le nuage a une forme allongée régulière). Il existe d'autres types d'ajustements quand le nuage de point n'a pas cette allure et nous en verrons quelques uns en exercice.

2.2.2 Droite de régression par la méthode des moindres carrés

La distance d'un point $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ à une droite d'équation $y = ax + b$ étant celle entre le point M_i et le point de la droite d'abscisse x_i et S la somme des carrés de ces distances, on admet qu'il existe une droite pour laquelle S est minimale :

Propriété 2.1. *La* droite de régression *de y en x par la méthode des moindres carrés est la droite :*
- *passant par le point moyen $G\left(\overline{x}\,;\,\overline{y}\right)$;*
- *de coefficient directeur : $a = \dfrac{cov(x\,;\,y)}{V(x)}$ où :*
  - $V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ *est la* variance *des x_i*
  - $cov(x\,;\,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$ *est la* covariance *de x et y.*

L'équation réduite de cette droite de régression est alors $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

On l'admettra.

Remarques. • La calculatrice permet d'obtenir directement les coefficients de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, ce qui évite les longs calculs (voir le tableau 2.2 de la présente page).

• La droite de régression de y en x n'est pas la même que la droite de régression de x en y. La première minimise la somme des carrés des distances « verticales », la seconde la somme des carrés des distances « horizontales ».

TABLE 2.2 – Utilisation de la calculatrice

On peut retrouver tous ces paramètres statistiques en utilisant les listes d'une calculatrice.

	TI-82	Casio Graph 25
Effacer les anciennes données	STAT 4 : ClrList 4 2^{nd} L1 , 2^{nd} L2 ENTER	Sélectionner le menu STAT F6 DEL-A F4 YES F1 ▷ DEL-A F4 YES F1
Entrer les nouvelles données. On entre les valeurs des x_i dans la première colonne (L1 ou list 1) et les valeurs des y_i dans la deuxième colonne (L2 ou list 2) ;	STAT 1 : Edit ENTER A l'écran : L1 | L2 | L3 30 | 12 40 | 19 50 | 24 60 | 30 … | …	A l'écran | List 1 | List 2 | List 3 1 | 30 | 12 2 | 40 | 19 3 | 50 | 24 4 | 60 | 30 … | … | …
Calculer les paramètres statistiques	CALC ▷ 4 : Linreg $(ax+b)$ ENTER A l'écran : Linreg $(ax+b)$ $y=ax+b$ $a=$ $b=$ $r=$	CALC F2 REG F3 X F1 A l'écran : Linreg $a=$ $b=$ $r=$ $r^2=$ $y=ax+b$

2.3 Exercices

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

EXERCICE 2.1.
Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique :

Clinique	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
Nombre de lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ correspondant à cette série (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 10 lits ; en ordonnée 1 cm pour 20 postes*). D'après l'allure du nuage, un ajustement affine est-il justifié ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. (a) Sans utiliser les fonctions statistiques de votre calculatrice, mais en vous aidant éventuellement du tableau 2.3 page suivante ou d'un tableur :

TABLE 2.3 – Tableau pour la question 3a

	x_i	y_i	$X_i = x_i - \overline{x}$	$Y_i = y_i - \overline{y}$	Y_iX_i	X_i^2
	122	205				
	177	249				
	77	114				
	135	178				
	109	127				
	88	122				
	185	242				
	128	170				
	120	164				
	146	188				
	100	172				
Somme						
Moyenne						

i. Déterminer $V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$

ii. Déterminer $\text{cov}(x\,;\,y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$

iii. En déduire le coefficient directeur de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés puis son équation. Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique.

(b) On dit que la droite de régression obtenue par la méthode des moindres carrés est très sensible aux valeurs extrêmes (ou aberrantes). Faites une expérience pour illustrer cette affirmation en changeant l'une des données (*on pourra pour cette question utiliser les fonctions statistiques de la calculatrice*).

4. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 3a, à combien peut-on estimer, par le calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer votre réponse sur le graphique.

EXERCICE 2.2.

La tableau suivant donne le PNB (en € par habitant) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens :

Pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = PNB (en € par habitant)	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y = nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(X\,;\,Y)$ (*unités graphiques : en abscisse 1 cm pour 1 000 € ; en ordonnée 1 cm pour 200 hôpitaux ; on prendra pour origine le point (5 000 ; 600)*).
   D'après l'allure du nuage un ajustement affine est-il justifié ?
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.
3. *Droite de* MAYER
   Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux pays P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points P_5, P_6, P_7 et P_8.
   (a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer G_1 et G_2 sur le graphique.
   (b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2), où les coefficients sont arrondis à 10^{-2}, est : $y = 0,15x - 199$.
   La représenter sur le graphique.
   (c) Compléter le tableau suivant :

X	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	22 500	26 200	28 900
Y	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 250	3 800	4 200
$0,15X - 199$								
$Y - (0,15X - 199)$								
$[Y - (0,15X - 199)]^2$								

   En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite de MAYER.
4. *Par les moindres carrés*
   Déterminer une équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.

5. La somme des résidus quadratiques S' associée à $\mathscr{D}$ est $S' \approx 35\,482,50$. Laquelle des deux droites réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?
6. *Estimations*
   À l'aide de l'équation de $\mathscr{D}$ et en détaillant les calculs répondre aux questions suivantes :
   (a) Un pays a un PNB de 23 400 € par habitant. Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux par million d'habitants dans ce pays ? (*Arrondir à l'unité*)
   (b) Un pays a 3 500 hôpitaux par million d'habitants. À combien peut-on estimer son PNB en € par habitant ? (*Arrondir à l'unité*)

EXERCICE 2.3.
Un hypermarché dispose de 20 caisses. Le tableau ci-dessous donne le temps moyen d'attente à une caisse en fonction du nombre de caisses ouvertes :

Nombre de caisses ouvertes X	3	4	5	6	8	10	12
Temps moyen d'attente (en minutes) y	16	12	9,6	7,9	6	4,7	4

1. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ correspondant à cette série statistique. (*Unités graphiques : en abscisse 1 cm pour une caisse ouverte ; en ordonnée 1 cm pour une minute d'attente*).
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. *Un ajustement affine*
   (a) Déterminer l'équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x par la méthode des moindres carrés. La représenter sur le graphique.
   (b) Estimer, à l'aide d'un calcul utilisant l'équation de $\mathscr{D}$:
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 minutes ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.
      Pensez-vous dans ce cas que l'ajustement affine soit fiable ?
4. *Un ajustement non affine*
   On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(X) = \dfrac{\lambda}{X}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer λ de façon à avoir : $f(3) = 16$.
   (b) Tracer alors $\mathscr{C}$ dans le repère utilisé pour le nuage.
   (c) Estimer à l'aide d'un calcul utilisant la fonction f :
      i. le nombre de caisses à ouvrir pour que le temps moyen d'attente à une caisse soit de 5 min ;
      ii. le temps moyen d'attente à la caisse lorsque 15 caisses sont ouvertes.

EXERCICE 2.4.
Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale d'eau en m^3 utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne les résultats suivants :

Nombre de jours écoulés : x_i	1	3	5	8	10
Volume utilisé en m^3 : y_i	2,25	4,3	8	17,5	27

1. Représenter la série statistique $\left(x_i\,;\,y_i\right)$.
   (*Unités graphiques : abscisse 1 cm pour un jour ; ordonnée 0,5 cm pour un m*^{3}).
2. Donnez l'équation de la droite Δ des moindres carrés sous la forme $y = mx + p$ où m et p sont les coefficients arrondis à 10^{-2}. La représenter sur le graphique.
3. Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par une parabole $\mathscr{P}$ qui passe par les points $A(1\,;2,25)$ et $B(10\,;27)$, et qui a pour équation $y = ax^2 + b$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b et donnez l'équation de la parabole $\mathscr{P}$. La représenter sur le graphique.
4. Dans cette question, on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

x_i	1	3	5	8	10
y_i	2,25	4,3	8	17,5	27
$\lvert y_i - (mx_i + p)\rvert$	2,54	0,91	2,71		
$\lvert y_i - (ax_i^2 + b)\rvert$	0	0,05	0,25		

   Les sommes des deux dernières lignes évaluent, pour chaque ajustement, la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.
   Donnez les arrondis à 10^{-1} des deux totaux.
   Déduisez l'ajustement qui paraît le mieux adapté.

EXERCICE 2.5.
Une étude fictive faite en France sur le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge des femmes lors de leur premier mariage donne les résultats suivants :

années	1 979	1 981	1 984	1 986	1 990	1 991	1 992	1 979	1 993	1 994	1 995
taux x_i	68,6	70	72,9	73,4	74,6	76,5	76,8	77	78	79,5	79
âge y_i	22,9	23,1	23,9	24,5	25	25,6	25,8	26,1	26,4	26,7	26,9

1. Représenter la série statistique.
   (Unités graphiques : abscisse 1 cm pour 1 % origine à 66 ; ordonnée 1 cm pour 1 an origine à 22)
   L'allure du nuage semble-t-il justifier un ajustement affine ?
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis déterminer l'équation réduite de la droite de regression de y en x par la méthode des moindres carrés.
3. Suivant cet ajustement affine, quel serait l'âge au premier mariage pour un taux de 90 % ? Ce calcul a-t-il un sens ?
4. Peut-on en déduire qu'il y a un lien entre le taux d'équipement des ménages en automobile et l'âge du premier mariage ? Comment expliquer la corrélation entre ces deux grandeurs ?

EXERCICE 2.6.
Au cours d'une séance d'essais, un pilote automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.
Au moment du top sonore, on mesure v_i (en km/h) de l'automobile, puis la distance d_i (en m) nécessaire pour arrêter le véhicule.
Pour sept expériences, on a obtenu les résultats suivants :

vitesse v_i	20	43	62	80	98	115	130
distance d'arrêt d_i	3,5	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8	168,5

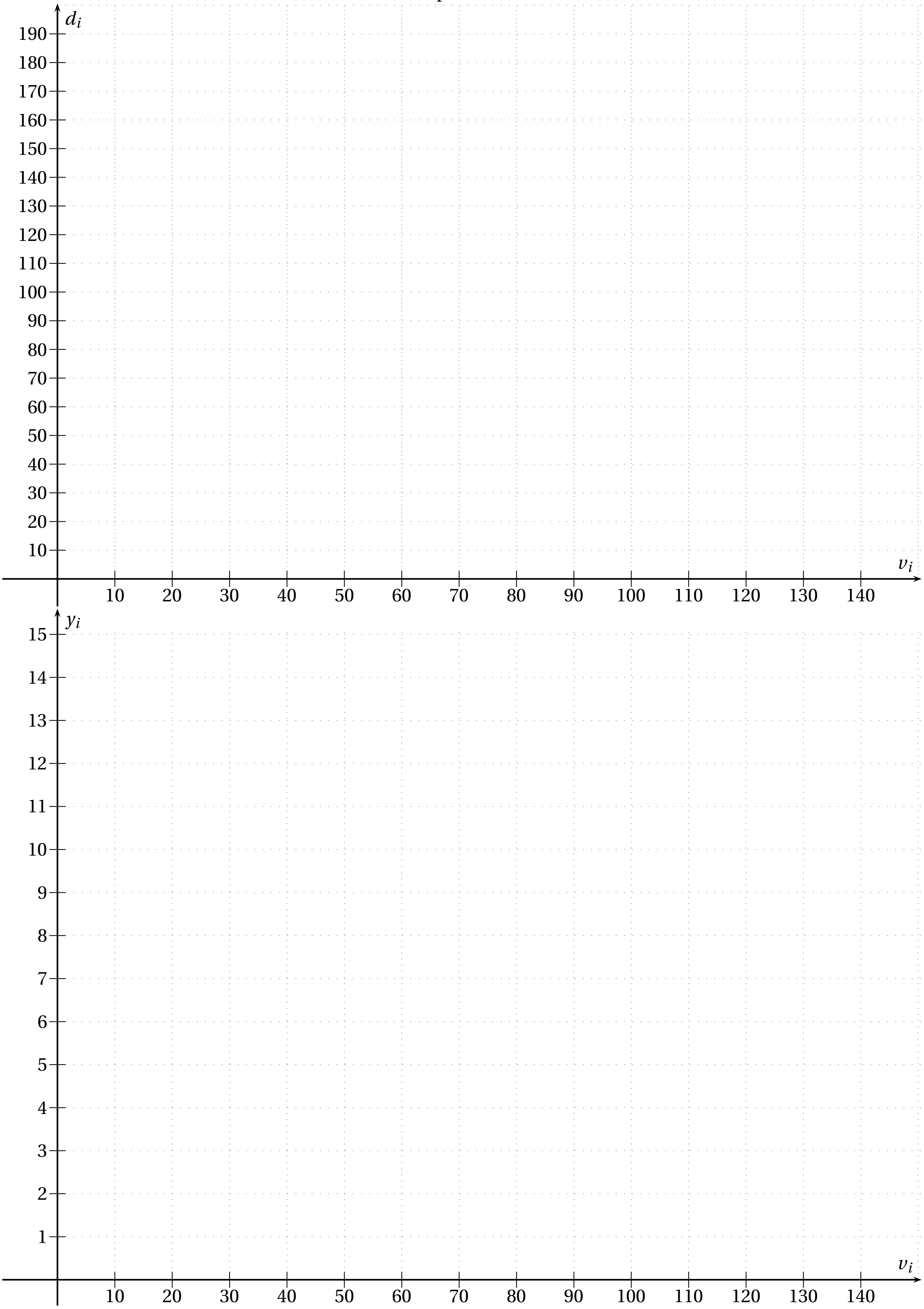
1. Dans le premier repère fourni sur la figure 2.1 page suivante, représenter le nuage de points de coordonnées $(v_i\,;\,d_i)$.
   Un ajustement affine semble-t-il pertinent ? Argumenter.
2. On pose $y_i = \sqrt{d_i}$.
   (a) Reproduire et compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au centième*) :

v_i	20	43	62	80	98	115	130
y_i							

   (b) Dans le second repère fourni sur la figure 2.1 page ci-contre, construire le nuage des points de coordonnées $(v_i\,;\,y_i)$ associé à cette nouvelle série double avec pour unités.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ? Argumenter.
   (c) Donner l'équation de la droite de régression de y en v obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au millième*) et la tracer.
   (d) À l'aide de cette équation estimer (*arrondis au centième*) :
   - la vitesse v d'un véhicule lorsque sa distance d'arrêt est de 180 m ;
   - la distance d'arrêt d de ce véhicule s'il roule à 150 km/h.

   (e) Le manuel du code de la route donne, pour calculer la distance d'arrêt (en m), la méthode suivante : « Prendre le carré de la vitesse exprimée en dizaines de km/h ».
   Comparer les résultat obtenus au 2d à ceux que l'on obtiendrait avec cette méthode.

FIGURE 2.1 – Repères de l'exercice 2.6



EXERCICE 2.7.
La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1 998, elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en milliers d'euros y_i	64	75	100	113	125	127

1. (a) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal.
   Les unités graphiques seront 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (*arrondir au dixième*). Placer le point G dans le repère.
2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.
   (a) Donner une équation de la droite d'ajustement $(\mathscr{D})$ obtenue par la méthode des moindres carrés (*arrondir les coefficients au centième*).
   (b) Tracer cette droite $(\mathscr{D})$ dans le repère.
   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec cette approximation ?
3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec
$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$
   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   (b) Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ de la fonction f dans le repère de la question 1).
   (c) Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2 005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?
4. En réalité, le bénéfice en 2 005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2 004.
   Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ? Justifier la réponse.

Devoir surveillé n°3

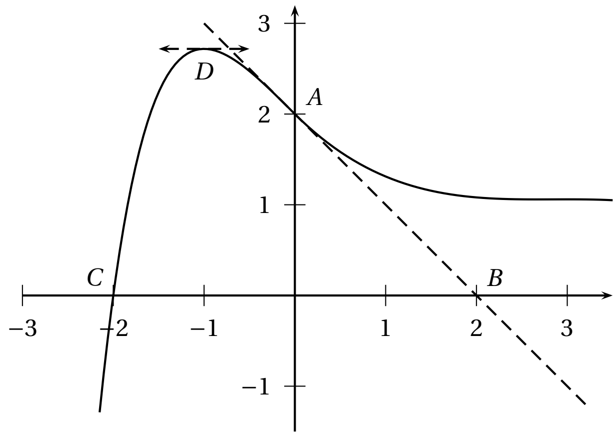
Continuité – Composition – Statistiques – Graphes – Espace

EXERCICE 3.1 (5 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 100$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f (on dressera le tableau de variations complet de f).
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [4\,;5]$.
   (b) Déterminer une valeur approchée arrondie à 10^{-2} de α.

EXERCICE 3.2 (5 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
On donne ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\,;2)$ et $C(-2\,;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses. Par ailleurs la fonction u admet le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$2{,}72$	↘ 1



1. Sans justifier, déterminer $u'(-1)$ et $u'(0)$.
2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ par $f = \frac{1}{u}$.
   (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition (on justifiera les résultats).
   (b) Calculer $f'(-1)$ et $f'(0)$.

EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
En prévision de la mise sur le marché d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête pour étudier le nombre d'acheteurs quotidiens éventuels en fonction du prix de vente unitaire ; les résultats de cette enquête sont données ci-dessous.

Prix unitaire en euros : x_i	10	11	12	13	14
Nombre d'acheteurs éventuels : y_i	48	40	37	34	32

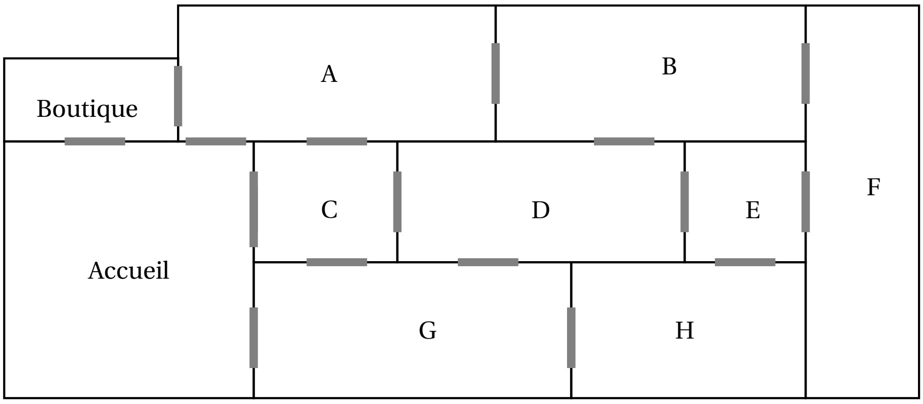
1. On appelle A et B les points de coordonnées respectives $(10\,;48)$ et $(14\,;32)$.
   (a) Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = -4x + 88$.
   (b) Compléter le tableau suivant :

x_i	10	11	12	13	14
y_i	48	40	37	34	32
$-4x_i + 88$		44			
$\left[y_i - (-4x_i + 88)\right]^2$		16			

   (c) En déduire la somme des résidus S associée à la droite (AB).
2. (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite de régression $\mathscr{D}$ de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   On arrondira les coefficients au dixième au besoin.
   (b) La somme des résidus S' associée à $\mathscr{D}$ est $S' \approx 12{,}4$.
   Laquelle des deux droites réalise-t-elle le meilleur ajustement ? *Justifier.*

EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes.
   Les visiteurs **partent de l'accueil**, visitent le musée et **doivent terminer leur visite à la boutique**.



   (a) Est-il possible de trouver un trajet dans le musée où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
   On justifiera très rigoureusement.

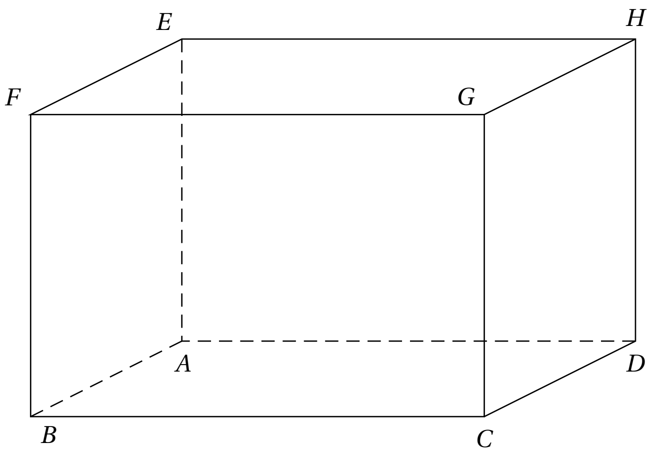
   (b) Si oui, donner un tel trajet ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel trajet.

2. Le solide $ABCDEFGH$ de la figure 3.1 de la présente page est un pavé droit.
   On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[FB]$ et $[CD]$.

   (a) Placer les points I, J et K sur la figure.

   (b) Tracer en rouge sur la figure la trace du plan (IJK) sur le pavé, c'est-à-dire l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces du pavé $ABCDEFGH$ en respectant les conventions pour la transparence.
   On ne demande pas de justifier cette construction mais on devra laisser les traits de construction et indiquer les parallélismes utilisés pour la construction s'il y en a.

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.3 (spécialité)

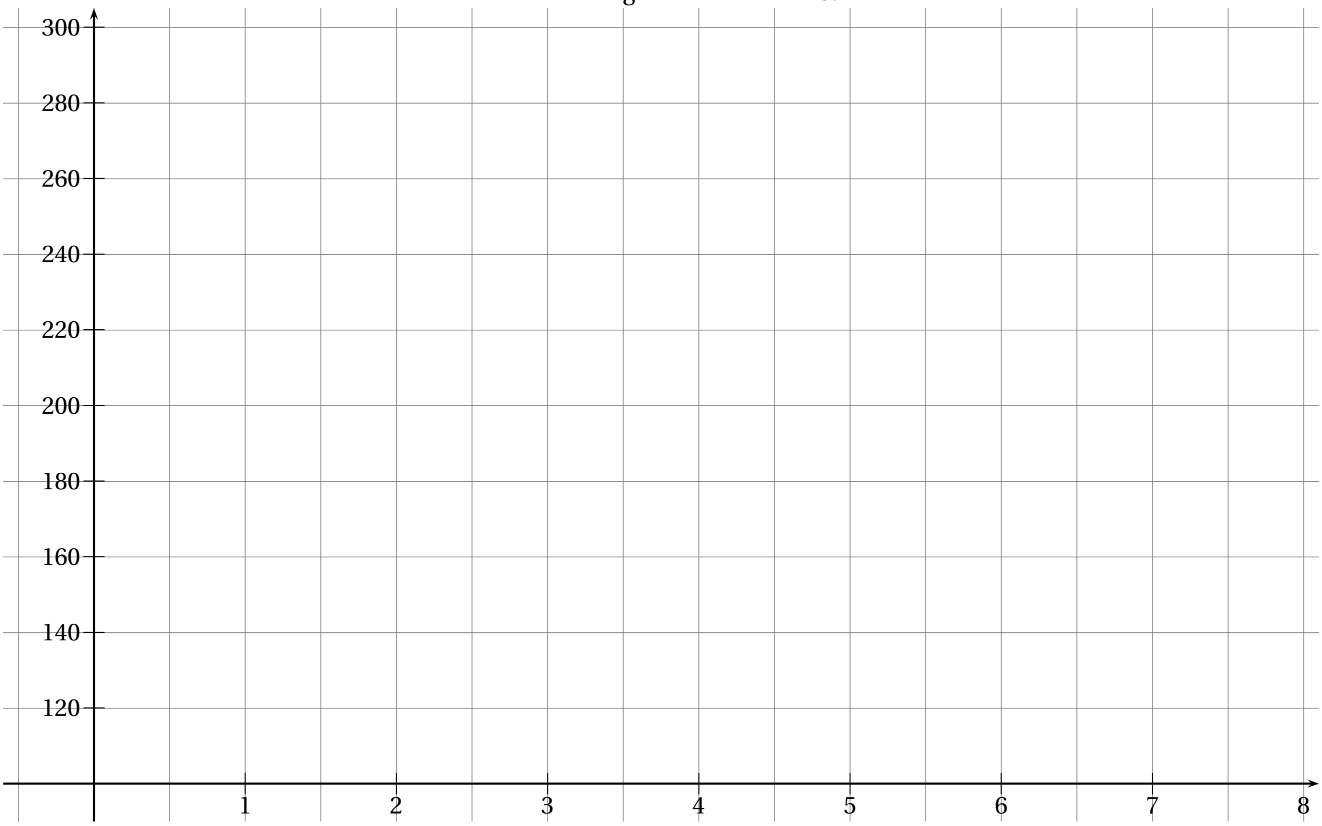


EXERCICE 3.4 (5 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice du cours de l'or de 2005 à 2010 sur le marché de Londres (source INSEE ; base 100 en 2005).

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Indice y_i	100	134,3	141,5	165,3	194,7	258,1

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans le repère de la figure 3.2 de la présente page.

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 3.4



2. Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer sur la figure.
3. On envisage un ajustement affine.
   (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrées.
   On arrondira les coefficients au dixième au besoin.
   (b) Tracer cette droite sur le graphique.
4. Déterminer à l'aide de cet ajustement une estimation de l'indice du cours de l'or en 2011.
5. En réalité l'indice du cours de l'or a été en moyenne égal à 307 en 2011 ; calculer le pourcentage d'erreur commise par l'estimation précédente.

Devoir surveillé n°4

Statistiques

EXERCICE 4.1 (8 points)**.**
En prévision de la mise sur le marché d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête pour étudier le nombre d'acheteurs quotidiens éventuels en fonction du prix de vente unitaire ; les résultats de cette enquête sont donnés ci-dessous :

Prix unitaire x_i en €	10	11	12	13	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs éventuels y_i	48	40	37	34	32	30	29	28

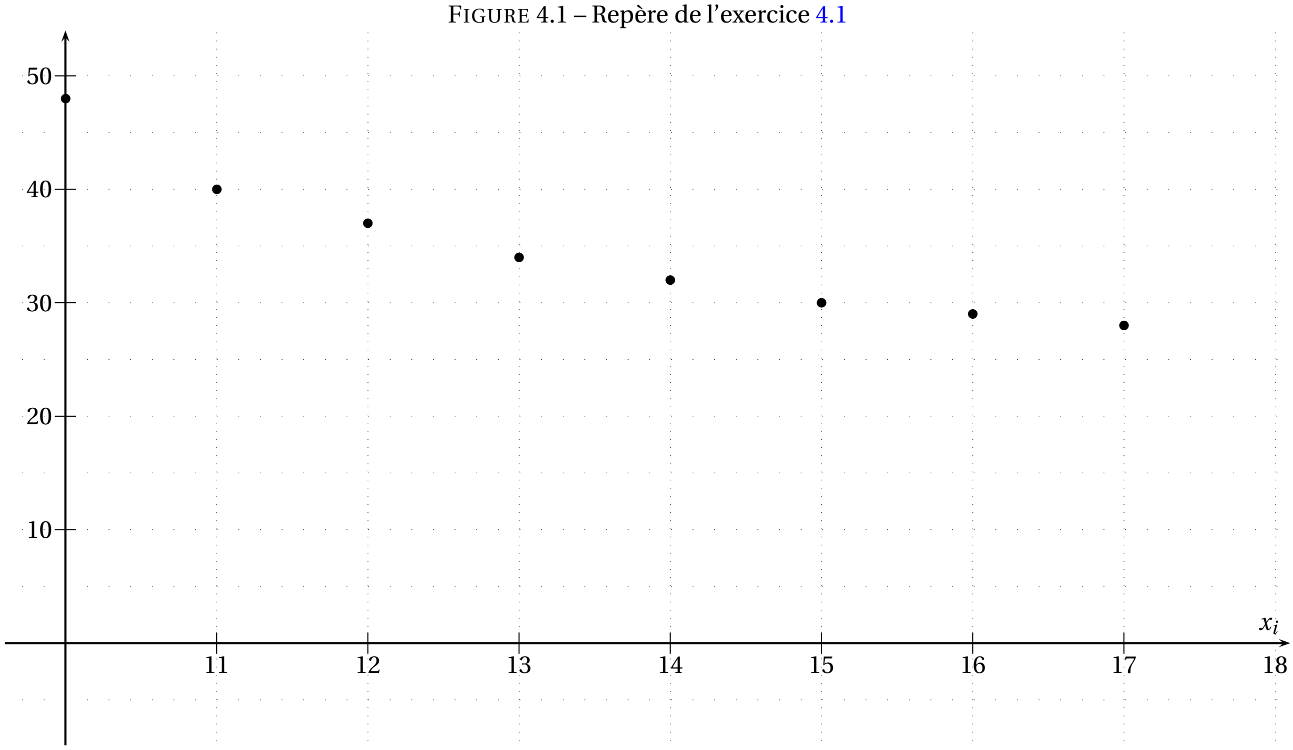
On a représenté le nuage de points associé à la série $\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le repère de la figure 4.1 de la présente page.

1. (a) Donner les coordonnées de son point moyen G ; placer G sur le graphique.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. *On arrondira les coefficients au dixième.*
   Tracer cette droite sur le graphique.
2. La forme du nuage laisse penser qu'un ajustement affine n'est peut-être pas le plus adapté. On souhaite réaliser un autre ajustement ; pour cela on pose : $z = \frac{1000}{y}$.
   (a) Compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs z_i sont arrondies au centième :

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17
z_i	20,83	25	27,03		31,25	33,33		35,71

   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. *On arrondira les coefficients à l'unité.*
   (c) Montrer qu'on a alors $y = f(x) = \frac{500}{x+1}$.
   (d) Représenter la courbe de f dans le même repère.
   (e) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (f) Lors du lancement de ce nouveau produit, le prix unitaire est finalement fixé à 11,50 €.
      i. Estimer le nombre d'acheteurs quotidiens de ce nouveau produit avec ce second ajustement.
      ii. En déduire la recette quotidienne envisageable.

FIGURE 4.1 – Repère de l'exercice 4.1



EXERCICE 4.2 (7 points).

Le tableau suivant donne la production mondiale de sucre brut en millions de tonnes (le rang 0 est à l'année 1 900) :

année	1 920	1 940	1 960	1 970	1 980	1 990
rang x_i	2	4	6	7	8	9
production y_i	16,8	29,9	55,4	72	88	113,9

Le nuage de points a été réalisé et un ajustement ne semble pas pertinent, aussi pense-t-on à un autre type d'ajustement.

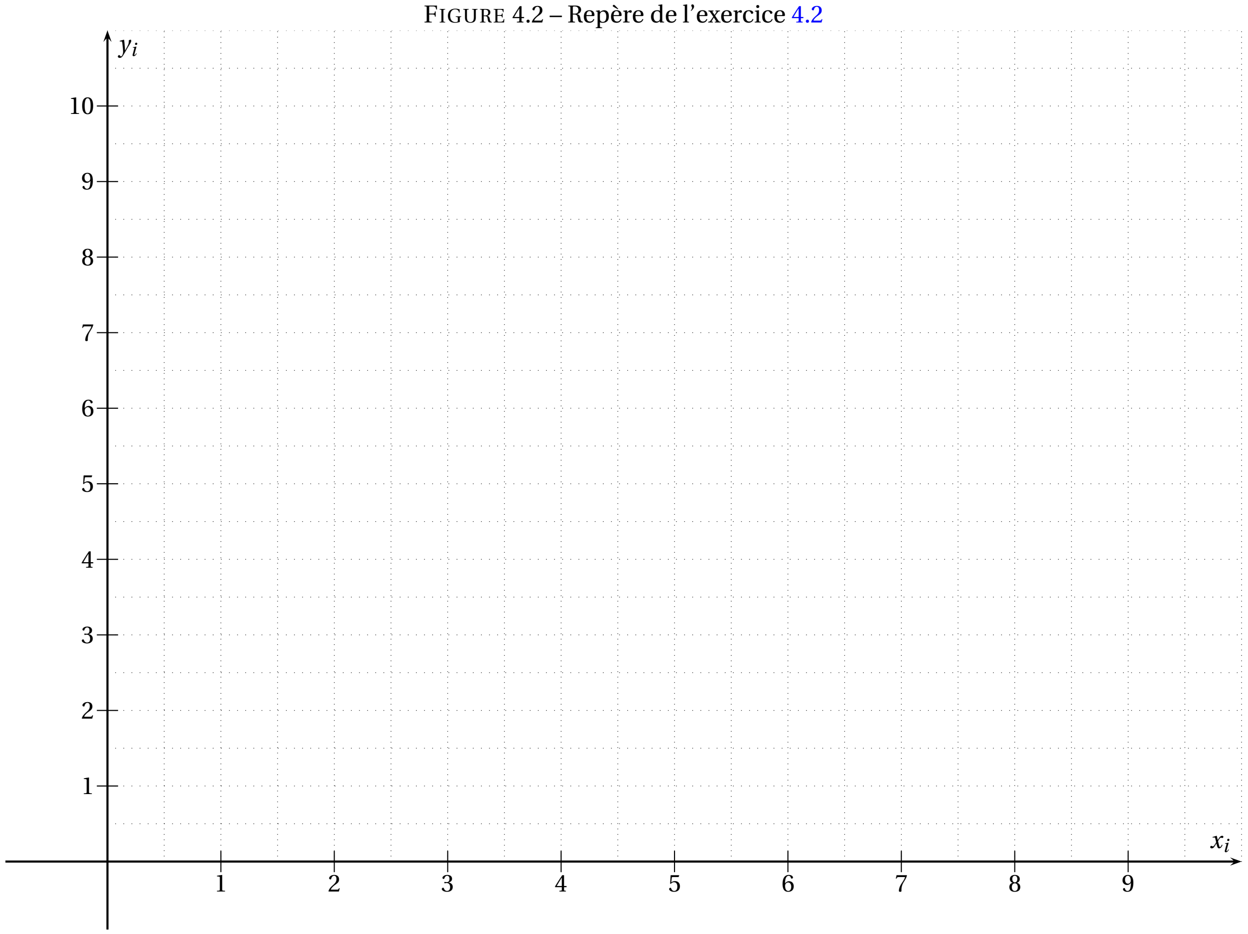
Pour cela, on pose $z_i = \sqrt{y_i}$.

1. Compléter le tableau suivant (*on arrondira les résultats au dixième*) :

x_i	2	4	6	7	8	9
z_i	4,1	5,5				

2. Dans le repère de la figure 4.2 de la présente page, construire le nuage des points de coordonnées $(x_i\,;\,z_i)$ associé à cette nouvelle série double.
   La forme du nuage permet-elle d'envisager un ajustement affine ?
3. Donner l'équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*on arrondira les coefficients au centième*) et la tracer.
4. Pour la suite nous prendrons l'équation suivante : $z = 0{,}9x + 2$.
   À l'aide de cette équation estimer :
   (a) l'année où la production y atteindra 150 millions de tonnes ;
   (b) la production qu'on pouvait prévoir en 1 995 (arrondie au dixième).
5. La production de sucre en 1 995 a été de 116,4 millions de tonnes.
   Quelle est l'erreur commise en pourcentage avec la prévision du 4b ?

FIGURE 4.2 – Repère de l'exercice 4.2



Chapitre 3

Calcul intégral

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1.

Partie 1 : Vitesse par paliers

Un véhicule se déplace de la façon suivante : chaque minute il change sa vitesse de la manière indiquée par le tableau ci-dessous.

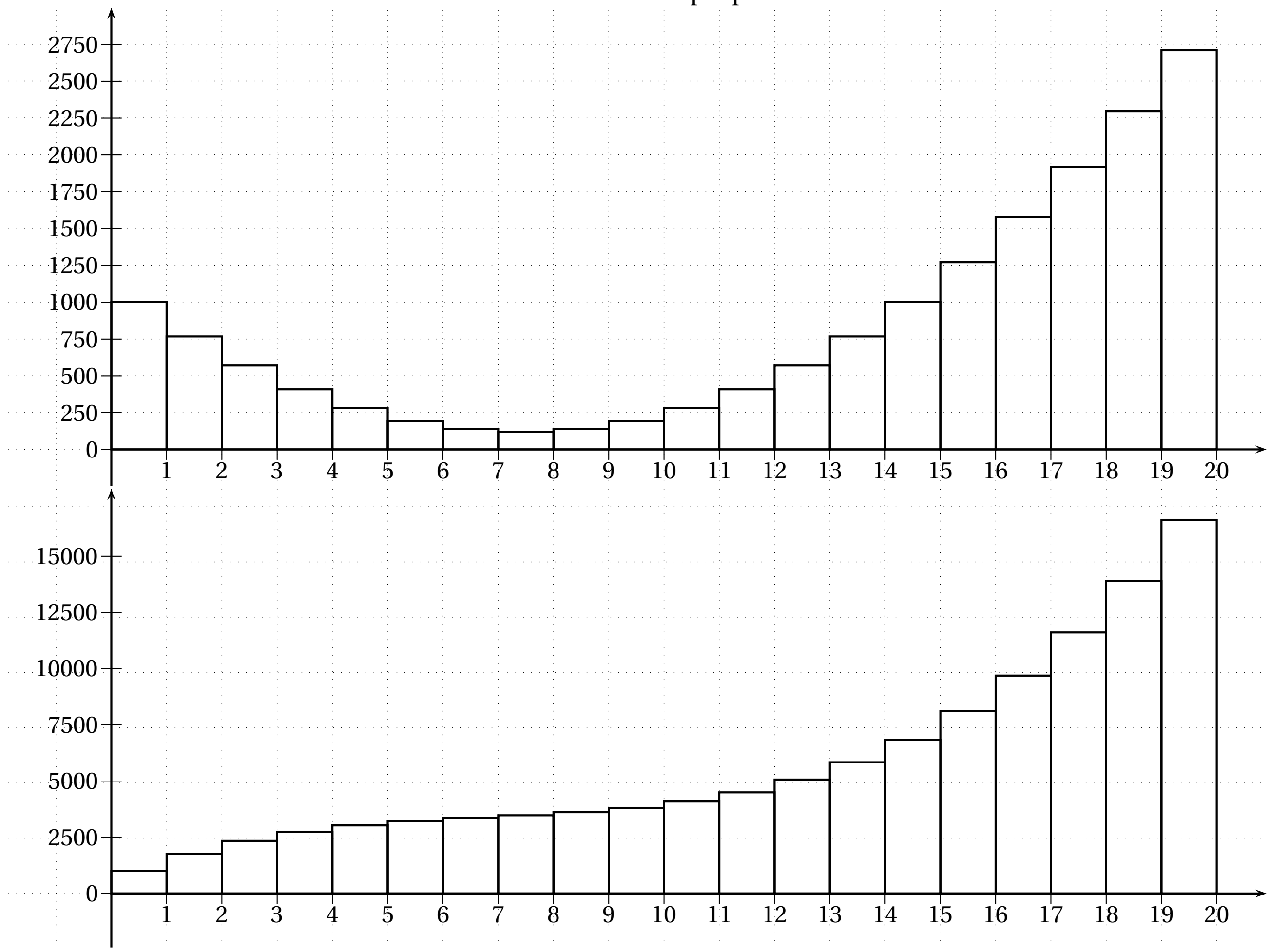
numéro de la minute	vitesse pendant cette minute en mètres par min	distance totale parcourue en mètres
1	1002	1002
2	768	1770
3	570	2340
4	408	2748
5	282	3030
6	192	3222
7	138	3360
8	120	3480
9	138	3618
10	192	3810
11	282	4092
12	408	4500
13	570	5070
14	768	5838
15	1002	6840
16	1272	8112
17	1578	9690
18	1920	11610
19	2298	13908
20	2712	16620

1. (a) Lire la vitesse du véhicule pendant la $15^{\text{ième}}$ minute.

   (b) Calculer la somme des distances parcourues de la $1^{\text{ière}}$ à la $15^{\text{ième}}$ minute. À quoi correspond ce nombre ?

   (c) Où retrouve-t-on ce nombre sur chacun des graphiques de la figure 3.1 de la présente page ?
2. Faire de même pour la $20^{\text{ième}}$ minute et la somme des distances de la $1^{\text{ière}}$ à la $20^{\text{ième}}$ minute.
3. Pendant quelle minute, la vitesse a-t-elle été la plus lente ? Quelle est alors la distance totale parcourue ?

FIGURE 3.1 – Vitesse par paliers



Partie 2 : Vitesse continue

Une autre véhicule a sa vitesse donnée chaque seconde par la fonction suivante,où $x \in [0;20]$ est le temps en minute :

$$V(x) = 18x^2 - 288x + 1272$$

1. Calculer la vitesse à 15 min, 20 min et 8 min. Comparer au cas précédent.
2. La courbe $\mathscr{C}$ tracée sur la figure 3.2 de la présente page représente la vitesse à x min.
   (a) Comment interpréter la somme des aires des rectangles dessinés sur ce graphique ?
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 1 en 1 :

$$\sum_{x=1}^{x=8} 1 \times V(x) = 1 \times V(1) + 1 \times V(2) + \cdots + 1 \times V(7) + 1 \times V(8)$$

3. On étudie la distance parcourue pendant les huit premières min en calculant les distances parcourues pour chaque 30 s ou 0,5 min.
   (a) À l'aide de la calculatrice, calculer les vitesses de 0,5 min à 8 min de tous les 0,5 min.
   (b) Calculer la somme, pour x variant de 0,5 en 0,5 :

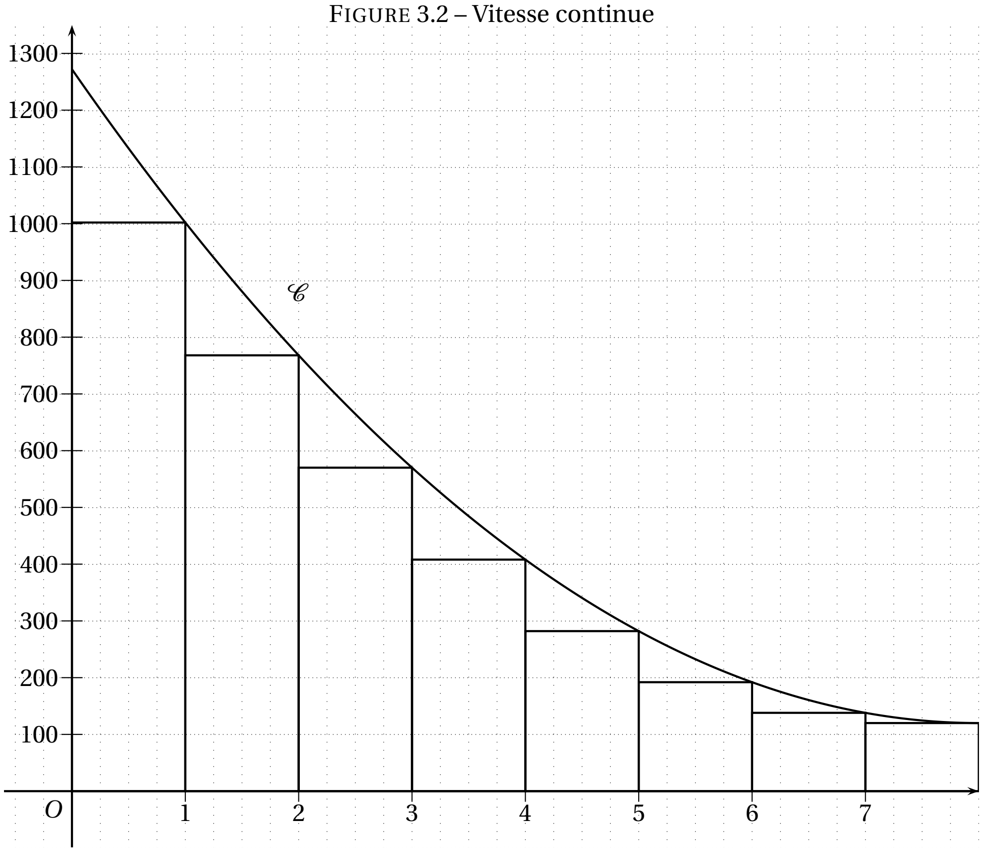
$$\sum_{x=0,5}^{x=8} 0,5 \times V(x) = 0,5 \times V(0,5) + 0,5 \times V(1) + \cdots + 0,5 \times V(8)$$

   Comment pourrait-on représenter cette somme sur le graphique 3.2 ?
4. Si vous disposez d'un tableur, procéder de même en calculant les vitesses tous les secondes.
   Expliquez pourquoi la somme suivante, pour x variant de seconde en seconde, est très proche de l'aire sous la courbe :

$$\sum_{x=\frac{1}{60}}^{x=8} \frac{1}{60} \times V(x)$$

   Comment interpréter cette aire en terme de distance ?

FIGURE 3.2 – Vitesse continue



ACTIVITÉ 3.2 (Fonctions dont on connaît la dérivée)**.**

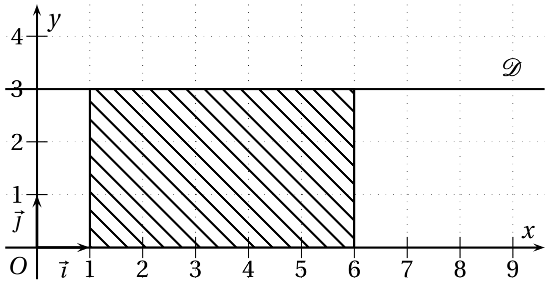
1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = 2x - 3$.
   (a) Vérifier que g est la dérivée de f.
   (b) Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
   (c) Plus généralement, quelles sont les fonctions ayant g pour dérivée ?
2. À l'aide du tableau des dérivées, trouver **une** fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :
   (a) $f(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = 3$ sur $\mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$;
   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$;
   (e) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$;
   (f) $f(x) = 6(2x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$

Définition. Soit F une fonction de dérivée f. Alors F est appelée *primitive* de f.

ACTIVITÉ 3.3 (Aire et primitive)**.**

Fonction constante

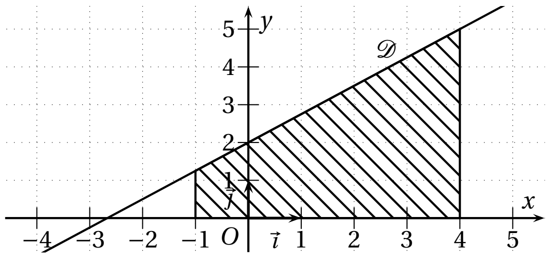
Le droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 3$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = 3$ dans le repère ci-contre.



1. Calculer l'aire du rectangle hâchuré, en carreaux.
2. Donner une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(1)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction affine

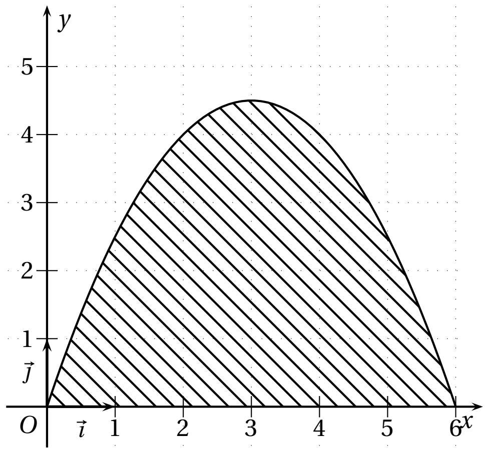
La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{3}{4}x + 2$ représente la fonction $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$.



1. Calculer l'aire du trapèze[1] hachuré, en carreaux.
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(4) - F(-1)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction trinôme

ARCHIMÈDE démontra à l'aide de suites que : « Un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à 4 fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ». On l'admettra.
La parabole ci-contre est d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ pour $x \in [0 ; 6]$ et représente la fonction $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$.



1. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du secteur parabolique hachuré.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(6) - F(0)$.
3. Comparer les deux résultats.

Fonction de la partie 2 de l'activité 3.1

On rappelle que le véhicule a sa vitesse donnée chaque seconde par la fonction suivante : $V(x) = 18x^2 - 288x + 1272$ où $x \in [0 ; 20]$ est le temps en minute.

1. Trouver une fonction D, primitive de la fonction V.
2. En déduire la distance totale parcourue pendant les huit premières minutes.
3. En déduire la vitesse moyenne pendant ces huit premières minutes.
   Comment pourrait-on la représenter sur la figure 3.2 page précédente ?
4. Calculer :
   - la distance totale parcourue entre les quinzième et vingtième minutes
   - la vitesse moyenne pendant cette durée
5. Calculer la distance totale parcoure pendant les vingt premières minutes et la vitesse moyenne pendant cette durée, qu'on convertira en kilomètres par heure.

1. L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(b+B)\times h}{2}$ où b est la petite base, B la grande base et h la hauteur du trapèze

3.2 Primitive d'une fonction

3.2.1 Définition et conséquences

Définition 3.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle *primitive de* f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.

Théorème 3.1. *Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I*

On l'admettra.

Théorème 3.2. *Soit F une primitive de f sur un intervalle I.*
Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G = F + k$, où $k \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in I$.

Preuve. • Supposons que F et G sont deux primitives de f sur I. Montrons qu'alors $G = F + k$.
Par définition $F' = f$ et $G' = f$, donc $F' - G' = f - f = 0$, mais $F' - G' = (F - G)'$.
Comme les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes, $F - G$ est une fonction constante.
Donc $F - G = k$, où $k \in \mathbb{R}$. Donc $F = G + k$.

• Soit F une primitive de f sur I. Montrons que $G = F + k$ est aussi une primitive de f.
$G' = (F + k)' = F' + 0 = f$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

◊

3.2.2 Primitive satisfaisant une condition initiale

Propriété 3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve. • *Existence.*
f étant continue, elle admet des primitives. Soit H l'une d'elles.
Supposons que $H(x_0) = z_0 \neq y_0$.
D'après le théorème 3.2, la fonction $F = H - z_0 + y_0$ est aussi une primitive de f.
Or $F(x_0) = H(x_0) - z_0 + y_0 = z_0 - z_0 + y_0 = y_0$. Il existe donc bien une primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

• *Unicité.*
Soient F et G deux primitives telles que $F(x_0) = G(x_0) = y_0$.
D'après le théorème 3.2, $G = F + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc $G(x_0) = F(x_0) + k \Leftrightarrow y_0 = y_0 + k \Leftrightarrow k = 0$.
Donc $G = F$.

◊

Exemple 3.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Déterminer **la** primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.
- On remarque que $G(x) = x^3 + x^2 + x$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- On sait que toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) = x^3 + x^2 + x + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- On cherche k tel que $F(1) = -1$. Or $F(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + k = k + 3$. Donc $-1 = k + 3 \Leftrightarrow k = -4$
  Donc $F(x) = x^3 + x^2 + x - 4$ est **la** primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = -1$.

3.2.3 Primitives des fonctions usuelles

Le tableau 3.1 page suivante donne, pour chaque fonction f de référence, les fonctions primitives F sur l'intervalle considéré.
Les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

3.2.4 Opérations sur les primitives

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I. On a alors les propriétés résumées dans le tableau 3.2 page suivante. Là encore, les résultats de ce tableau s'obtiennent en vérifiant qu'on a bien $F' = f$ sur l'intervalle considéré.

TABLE 3.1 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction primitive ($k \in \mathbb{R}$ constante)	Intervalle I
$f(x) = m$ (constante)	$F(x) = mx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + k$	$\mathbb{R}$
Plus généralement : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ?$	
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
Plus généralement : $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$F(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + k$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$]0; +\infty[$

TABLE 3.2 – Opérations sur les primitives

Conditions	La fonction s'écrivant sous la forme	admet comme primitive
	$u' + v'$	$u + v$
Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante	ku'	ku
	$u'u^2$	$\frac{1}{3}u^3$
	$u'u^3$	$\frac{1}{4}u^4$
Plus généralement : Soit $n \in \mathbb{N}$	$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u}$	?
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^3}$	$-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}$
Plus généralement : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Si $u \neq 0$ sur I	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
Si $u > 0$ sur I	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

3.3 Intégrale d'une fonction

3.3.1 Définition

Définition 3.2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I. Soit F une primitive de f. On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel, noté $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, égal à $F(b)-F(a)$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.

Remarques. • $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ se lit aussi « somme de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ».
- La variable peut être indifférement t, x, y... On dit que c'est une variable *muette*.
- On note aussi : $F(b)-F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$.
- Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si on prend à la place une primitive $G = F+k$, on a $G(b)-G(a) = F(b)+k-(F(a)+k) = F(b)-F(a)$.

3.3.2 Propriétés

Propriété 3.4 (Premières propriétés)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Alors*
- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Preuve. • Par définition $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(a) = 0$
- Par définition $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = F(a)-F(b) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

◇

Propriété 3.5 (Relation de CHASLES)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de I. Alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Preuve. Par définition $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ◇

Propriété 3.6 (Linéarité)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I et α et β deux réels quelconques. Alors :*
- $\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- *Plus généralement :* $\int_a^b \big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Preuve. • Soit F une primitive de f sur I. Alors αF est une primitive de αf. Donc :
$\int_a^b \big(\alpha f(t)\big)\mathrm{d}t = \alpha F(b)-\alpha F(a) = \alpha(F(b)-F(a)) = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
- $F+G$ est une primitive de $f+g$ donc :
$\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t = (F+G)(b)-(F+G)(a) = F(b)-F(a)+G(b)-G(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$
- Le dernier point est la conséquence des deux premiers.

◇

Remarque. À cause du deuxième point on dit que l'intégration est compatible avec l'addition.

Propriété 3.7 (Inégalités)**.** *Soient f et g deux fonctions continues sur I et $a \leq b$ deux réels de I.*
- *Si $f \geq 0$ sur I alors* $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
- *Si $f \leq g$ sur I alors* $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

On l'admettra.

Remarques. • La réciproque du premier point est fausse : on peut avoir $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq 0$ sans avoir $f \geq 0$.
• À cause du second point on dit que l'intégration est compatible avec l'ordre.

3.3.3 Valeur moyenne

Définition 3.3. La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre :

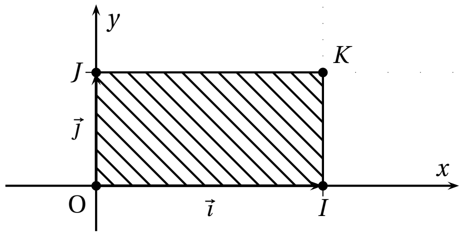
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Remarques. • On note parfois $\overline{f}$ la valeur moyenne de f.
• La valeur moyenne de f est dans la même unité que celle de f.

3.4 Interprétations graphiques

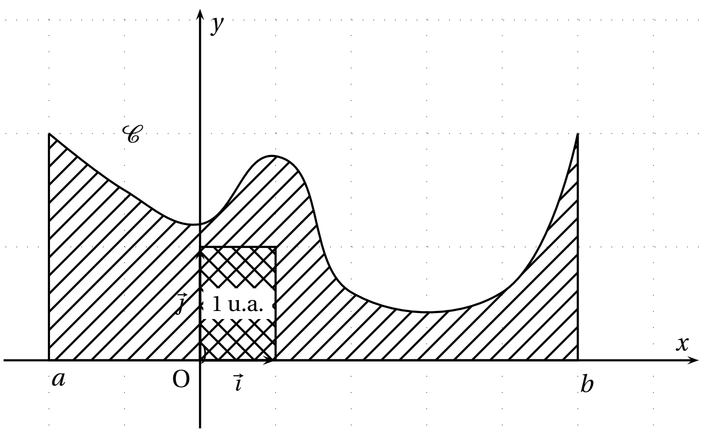
3.4.1 Aire sous la courbe

Définition 3.4. Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient I, J et K les points tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$. On appelle unité d'aire (notée u.a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire(OIKJ) = 1 u.a.



Remarques. • OIKJ peut être un carré : le repère est alors orthonormal.
• Si l'on a, par exemple, $OI = 3$ cm et $OJ = 2$ cm, alors 1 u.a. = 6 cm^2.

Définition 3.5 (Aire sous la courbe d'une fonction positive)**.** Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I dont la représentation graphique est appelée $\mathscr{C}$.
Soient $a \leq b$ deux réels de I.
On appelle *aire sous la courbe de f de a à b* l'aire, exprimée en u.a., du domaine $\mathscr{D}$ délimité par :
• les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (à gauche et à droite) ;
• $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses (en haut et en bas).



On a vu, dans l'activité 3.1 page 46, que la somme des aires rectangles « situés sous la courbe » s'approchait d'autant plus de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ que la base du rectangle était petite. En extrapolant ce raisonnement : lorsque la base du rectangle est infiniment petite, on la note alors dx (le d signifiant une différence infiniment petite entre deux valeurs de x), sa hauteur vaut alors $f(x)$ et l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est la somme de cette infinité de rectangle. D'où la notation « somme de a à b de $f(x)$dx ». Donc :

Propriété 3.8 (Aire sous la courbe)**.** *Si f est une fonction continue et **positive** sur un intervalle I et si a est **inférieur** à b, deux réels de I, alors $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire sous la courbe exprimée en unités d'aires.*

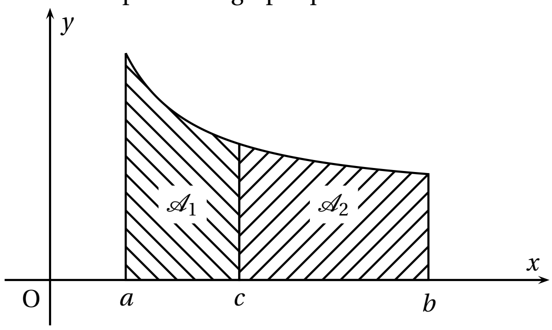
On l'admettra.

Remarque. Le nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe même quand la fonction f n'est pas toujours positive ou quand $a > b$, mais il n'y a que lorsque f est positive et que $a \leqslant b$ qu'on peut l'interprêter comme une aire.

3.4.2 Aires et relation de CHASLES

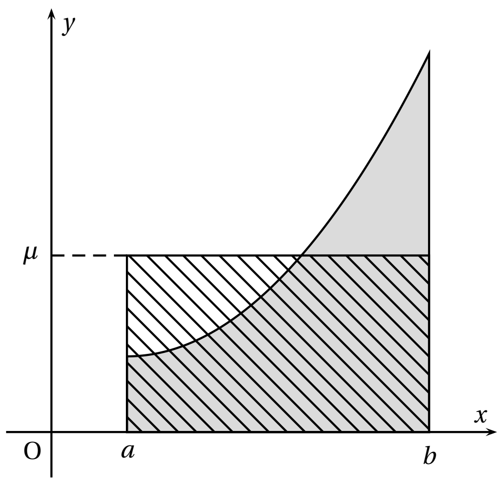
Dans le cas où $a \leq c \leq b$ et où $f \geq 0$, on peut interpréter la relation de CHASLES en termes d'aires : sur la figure 3.3 de la présente page, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$

FIGURE 3.3 – Interprétation graphique de la relation de CHASLES



3.4.3 Aire et valeur moyenne

Remarque. Dans le cas où $f \geq 0$, on peut interpréter la valeur moyenne en termes d'aires (ici $a < b$).
On cherche un nombre μ tel que, en remplaçant chaque valeur de f par μ, la somme des $\mu\mathrm{d}x$ soit la même que la somme des $f(x)\mathrm{d}x$, ce qui revient à chercher une fonction constante telle que l'aire sous la courbe de cette fonction soit la même que l'aire sous la courbe de la fonction f.
Or l'aire sous la courbe entre a et b d'une fonction constante μ vaut $(b-a)\mu$.
On a donc $(b-a)\mu = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Sur la figure ci-contre, l'aire grise et l'aire hâchurée sont égales quand μ est égale à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.



3.5 Exercices

3.5.1 Primitives

EXERCICE 3.1.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, déterminer F, une primitive de f.

1. $f(x) = 5$;
2. $f(x) = x$;
3. $f(x) = 3x$;
4. $f(x) = 3x^2$;
5. $f(x) = -4x+3$;
6. $f(x) = x^2$;
7. $f(x) = 7x-1$;
8. $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$;
9. $f(x) = 4x^3+x$;
10. $f(x) = \frac{x-5}{3}$;
11. $f(x) = -5x^2$;
12. $f(x) = x^4$;
13. $f(x) = 2x^5+3x$;
14. $f(x) = \frac{3x^4+x}{2}$;
15. $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

EXERCICE 3.2.
1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner l'ensemble des primitives F de f sur l'intervalle I.
   (a) $f(x) = 3x^2+2x+2$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (b) $f(x) = -x^2+1$ sur $I = \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
   (d) $f(x) = 5x + \frac{2}{x^2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.
2. Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$.
   Déterminer les primitives F de f sur $]0\,;+\infty[$.
   Existe-t-il une primitive de f prenant la valeur 2 lorsque $x = 1$?

EXERCICE 3.3.
Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner toutes les primitives de f sur I.

1. $f(x) = x^9$;
2. $f(x) = \frac{1}{x^4}$;
3. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$;
4. $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$;
5. $f(x) = 5x^2 + x + \frac{2}{\sqrt{x}}$;
6. $f(x) = 2x - 7 - \frac{5}{x^3}$.

EXERCICE 3.4.
Pour chacune des fonctions f suivantes, donner une primitive F vérifiant la condition imposée.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+3x-1$; $F(2) = 3$;
2. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x-5+\frac{3}{x^2}$; $F(3) = -1$.

EXERCICE 3.5.
Pour chacune des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, donner une primitive F.

1. $f(x) = 2(2x-1)^2$;
2. $f(x) = -(3-x)^3$;
3. $f(x) = 4(4x+3)^3$;
4. $f(x) = -(-5x-2)^3$;
5. $f(x) = (2x+1)^{-4}$;
6. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$;
7. $f(x) = (2x+1)^5$;
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$;
9. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$;
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;
11. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
12. $f(x) = \frac{3x}{(2x^2+3)^3}$;
13. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$;
14. $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$;

EXERCICE 3.6.
On considère la fonction f définie sur $]0\,;1[$ par : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2}$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]0\,;1[$ vérifiant : $F\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

EXERCICE 3.7.
On considère la fonction F définie par $F(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Étudier les limites de F aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. Calculer la dérivée F' de la fonction F et dresser le tableau de variation de la fonction F.
3. Résoudre l'équation $F(x) = 1$.
4. On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
   Déterminer la primitive G de g vérifiant $G(2) = 0$.

EXERCICE 3.8.
Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$ par : $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{4x-6}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\frac{c}{4x-6}$.
2. En déduire une primitive de f sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$.

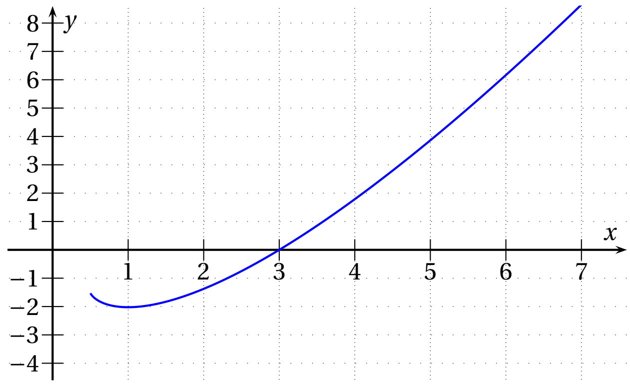
3.5.2 Calcul intégral

EXERCICE 3.9.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 (x+4)\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_2^0 (x^2+x)\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_0^{-2} 4t^3\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_2^{-1} 3x^3\,\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(2t^2-1\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_4^0 \left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t^2-1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
11. $\displaystyle\int_3^2 \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$;
12. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
13. $\displaystyle\int_1^0 (2x+3)\left(x^2+3x-5\right)\mathrm{d}x$;
14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$;
15. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

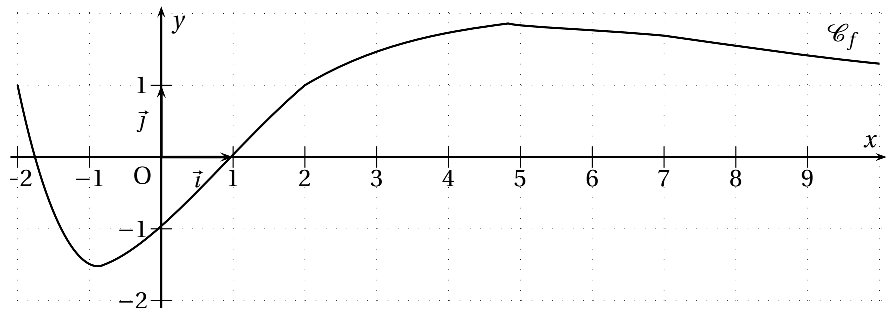
3.5.3 Lectures graphiques

EXERCICE 3.10 (D'après Amérique du Nord 2 007)**.**
La courbe $(\mathscr{C})$ ci-contre représente une fonction F définie et derivable sur l'intervalle $\mathrm{J} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
On sait que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des abscisses au point $(3\,;0)$ et a une tangente horizontale au point $(1\,;-2)$.
On note f la fonction dérivée de F.



1. À l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de f.
2. Donner $f(1)$, $F(1)$ et $F(3)$. Préciser le signe de $f(3)$.
3. Calculer $\displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

EXERCICE 3.11 (D'après Polynésie 2005)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;10]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.



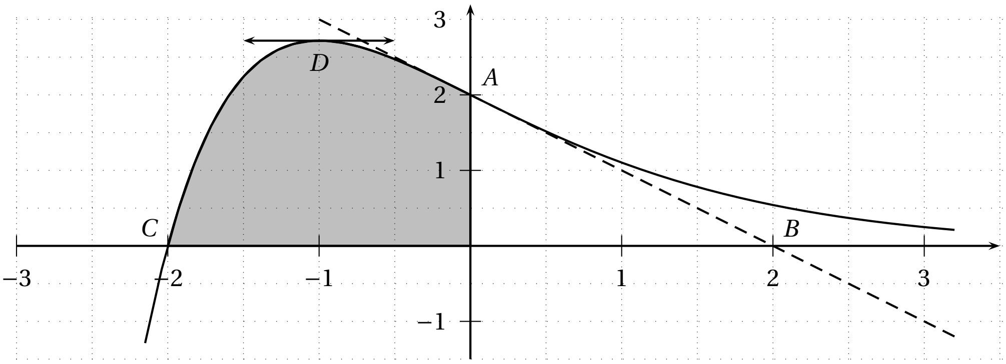
On précise que le point d'abscisse 4,83 de $\mathscr{C}_f$ a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de la fonction f.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point $A(5\,;5{,}43)$ appartient à $\mathscr{C}_F$.
On note $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f.
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. (a) Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $\mathscr{C}_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
   (b) Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_F$ en A.
   (c) Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle $[-2\,;10]$.
2. (a) Déterminer $\displaystyle\int_1^5 f(t)\,\mathrm{d}t$. La représenter en rouge sur le graphique.
   (b) Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$ et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
   (c) Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\,;5]$. La représenter en bleu sur le graphique.

EXERCICE 3.12.
On a représenté, sur la figure 3.4 page ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
Le domaine hachuré $\mathcal{D}$ est délimité par les droites d'équation $x = 2$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe Γ.

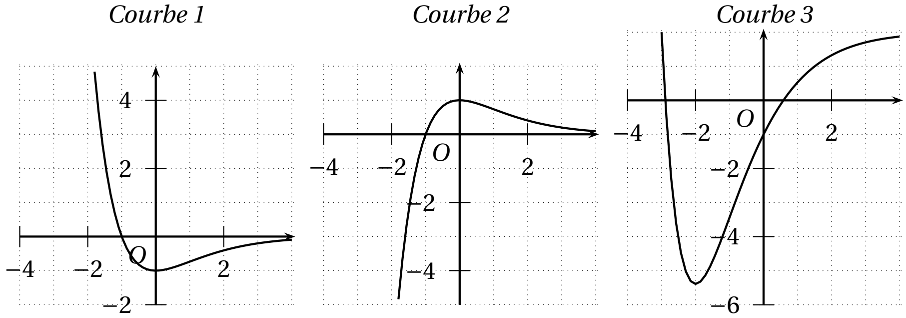
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Avec la précision permise par le graphique :
   (a) Déterminer les solutions des équations suivantes :
      i. $g(x) = 2$; ii. $g(x) = -2$; iii. $g(x) = 4$.
   (b) Plus généralement, déterminer, selon les valeurs de λ, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = \lambda$.
3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 3.5, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. (a) Une des représentations graphiques page ci-contre, figure 3.5, représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
   (b) En déduire l'aire du domaine hachuré $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

EXERCICE 3.13.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 1 cm sur l'axe des ordonnées), d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ 2)$ et $C(-2;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses. Le domaine grisé $\mathcal{D}$ est délimité par les axes de coordonnées et par la courbe Γ.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$; • $f(x) \leq 2$; • $f(x) \geq 3$; • $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
4. (a) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle en expliquant avec soin les raisons de votre choix.
   (b) Déterminer alors l'aire du domaine grisé $\mathcal{D}$ en cm^2.

Courbe 1 *Courbe 2* *Courbe 3*



Si vous avez bien suivi, les deux exercices précédents doivent vous rappeler des exercices déjà traités.

FIGURE 3.4 – Courbe Γ de l'exercice 3.12

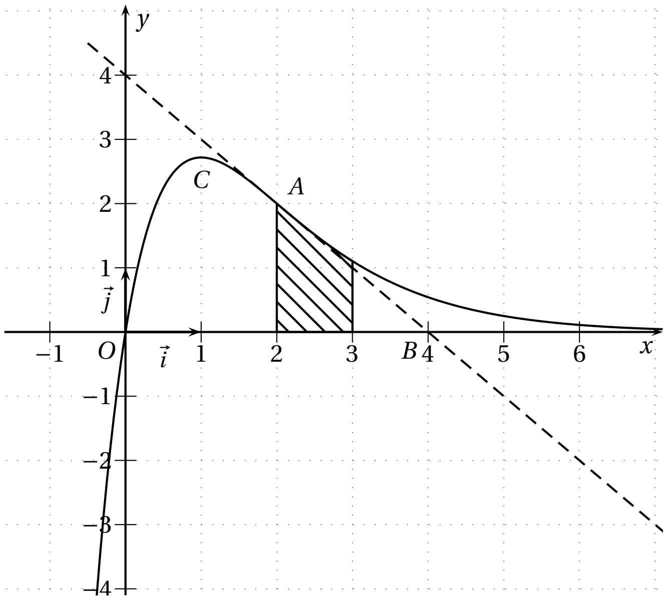
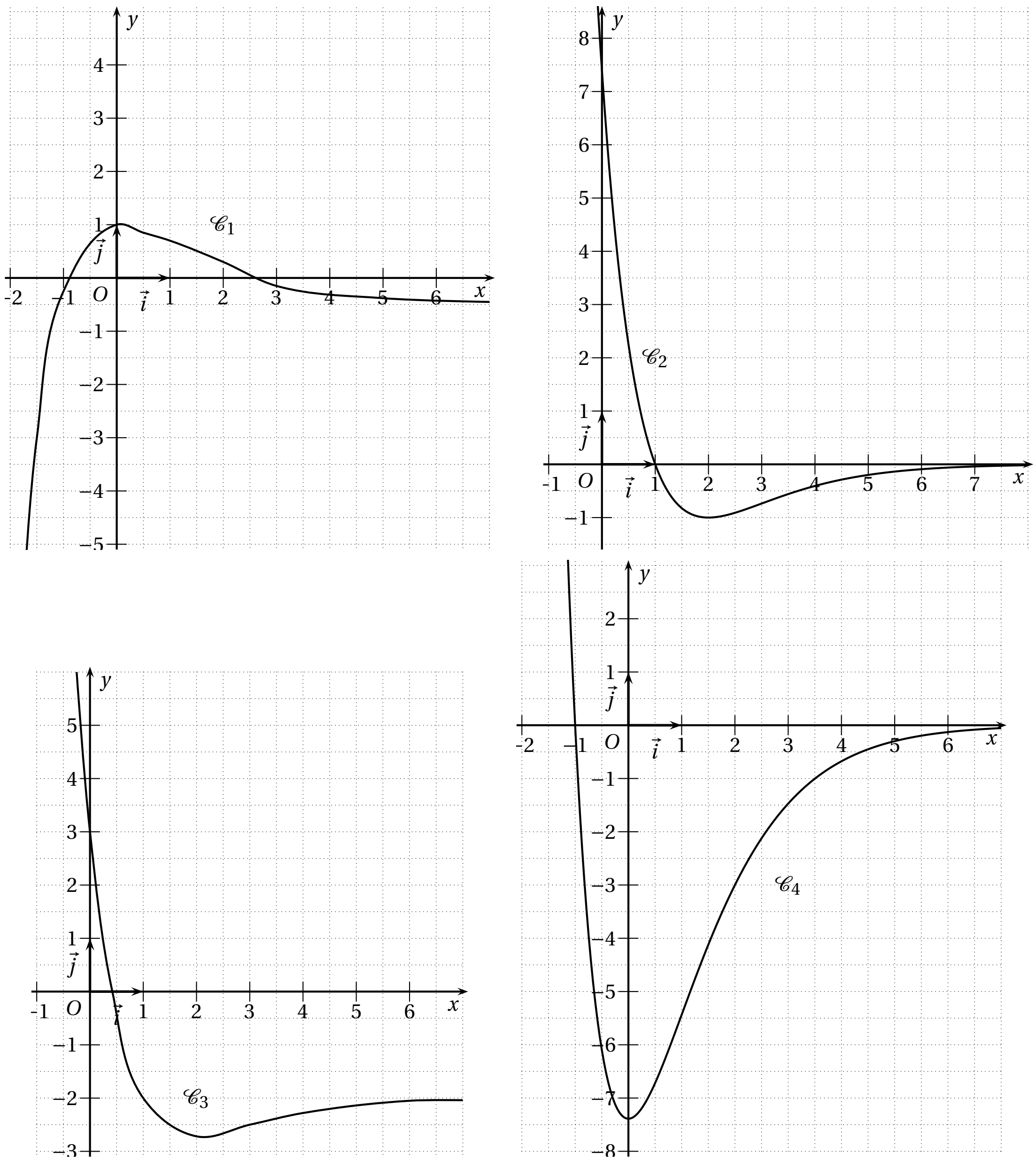


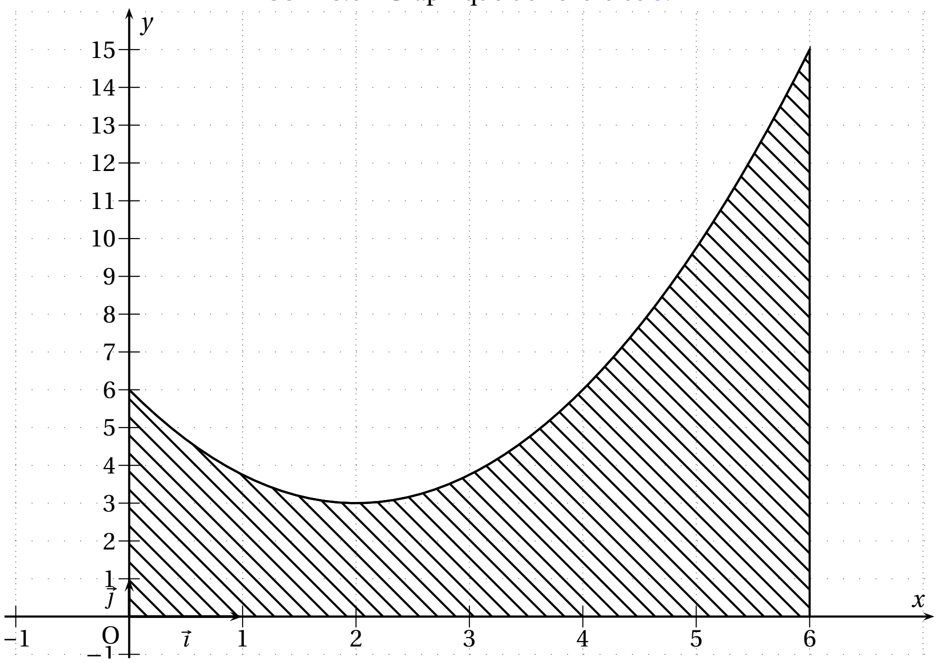
FIGURE 3.5 – Courbes de l'exercice 3.12



3.5.4 Sujets de synthèse

EXERCICE 3.14 (D'après Nouvelle Calédonie 2005).
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+6$.
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la figure 3.6 de la présente page est représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan d'origine O (1 unité = 1,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).
La partie hachurée est limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d' équation $x=6$

FIGURE 3.6 – Graphique de l'exercice 3.14



Partie A

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire S de la partie hachurée.
2. Déterminer l'aire S en cm^2.
3. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f entre 0 et 6 et la représenter sur le graphique.

Partie B

1. On considère un point M appartenant à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse x avec $x \in [0;6]$.
   La parallèle à l'axe des ordonnées passant par M coupe l'axe des abscisses en un point H.
   La parallèle à l'axe des abscisses passant par M coupe l'axe des ordonnées en un point K.
   On appelle $R(x)$ l'aire, en unités d'aire, du rectangle OHMK.
   Prouver que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;6]$, $R(x)=0,75x^3-3x^2+6x$.
2. On se propose de rechercher toutes les valeurs possibles de x de l'intervalle $[0;6]$ telles que l'aire $R(x)$ du rectangle OHMK soit égale à l'aire hachurée S.
   (a) Montrer que le problème précédent revient à résoudre l' équation $g(x)=0$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par : $g(x)=0,75x^3-3x^2+6x-36$.
   (b) Étudier les variations de g sur l'intervalle $[0;6]$ et dresser le tableau de variation de g. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet sur l'intervalle $[0;6]$ une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α au centième.

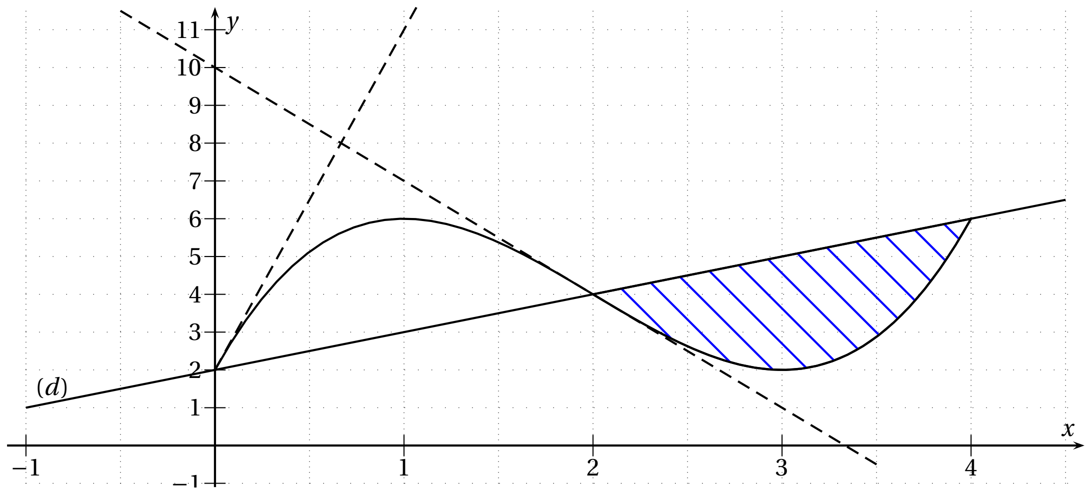
EXERCICE 3.15 (D'après Centres étrangers 2 007).

On considère une fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;4]$; sa courbe représentative est donnée ci-dessous dans un repère orthogonal (1 unité = 2,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées).

On note f' la fonction dérivée de f.

Sont également tracées les tangentes à la courbe aux points d'abscisse 0 et 2 , ainsi que la droite (d) d'équation $y = x+2$.

Aux points d'abscisses 1 et 3 les tangentes à la courbe sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$; (b) $f(1)$ et $f'(1)$; (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) l'ensemble des réels x tels que $f(x) \leqslant x+2$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré exprimée en unités d'aire. Parmi les trois propositions suivantes, déterminer celle qui est exacte, en la justifiant par des arguments géométriques :
   (a) $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$ (b) $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 6$ (c) $6 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8$
3. On suppose que $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, où $m,\ n,\ p$ et q sont des réels.
   (a) En utilisant les résultats de la question 1 a, déterminer p et q.
   (b) En utilisant les résultats de la question 1 b, déterminer m et n.
4. On admet que $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.
   (a) Démontrer que les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 et 4 sont parallèles.
   (b) Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré.

Chapitre 4

Probabilités conditionnelles

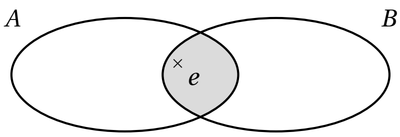
Sommaire

4.1 Rappels

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde et de Première, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

4.1.1 Vocabulaire des ensembles

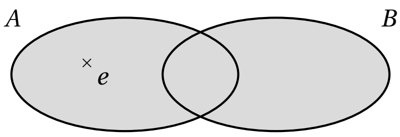
Définition 4.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

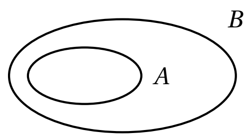
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 4.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 4.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.

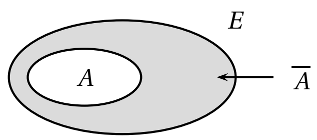


On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

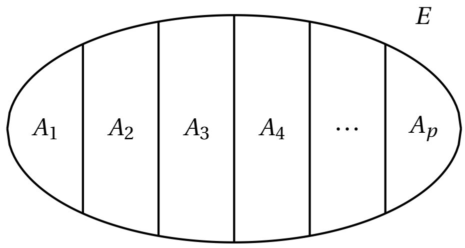
On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Définition 4.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 4.5. Des parties $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :
- Pour tous i et j de $\{1\,;\dots;\,p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p = E$.



Définition 4.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de* E. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

4.1.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 4.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,; 3\,; \cdots ; 11\,; 12\}$.
Le tableau 4.1 page ci-contre définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

4.1.3 Probabilités

Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 4.8. Soit $\Omega = \{\omega_1\,; \omega_2\,; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;\,1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Propriété 4.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'événement certain est 1 alors la probabilité de l'événement impossible, qui est son contraire, est 0.

On a aussi :

Propriété 4.2. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- *Si $A \subset B$, alors $p(A) \leqslant p(B)$;*
- *Si A et B sont incompatibles*, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

TABLE 4.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6; 12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 4.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 4.3. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*

- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau 4.2 page suivante résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue.
Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

TABLE 4.2 – Somme de deux dés

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Loi des grands nombres

Définition 4.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 4.4 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques. • Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
• Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

4.2 Probabilités conditionnelles

4.2.1 La situation

On illustrera toute cette section par la situation suivante :
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de 2 004–2 005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Femmes	76	92	50	218
Hommes	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous ces élèves sont rangées dans un carton et on choisit une fiche au hasard parmi les 350.
On appellera E, S, L, F et H les événements respectifs « la fiche est celle d'un élève de 1 ES », « la fiche est celle d'un élève de 1 S », « la fiche est celle d'un élève de 1 L », « la fiche est celle d'une femme » et « la fiche est celle d'un homme ».

La probabilité de choisir la fiche d'une femme de 1ES est : $p(E \cap F) = \frac{76}{350}$. La probabilité de choisir une femme est $p(F) = \frac{218}{350}$.

La probabilité de l'événement « la fiche est celle d'un élève inscrit en section ES, **sachant qu**'il est une femme » est dite probabilité conditionnelle de l'évènement E sachant F et est notée $p(E|F)$ ou $p_F(E)$.
Et on a : $p_F(E) = \frac{76}{218} = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$.

4.2.2 Définition

Définition 4.11 (Probabilité conditionnelle)**.** Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers, avec $A \neq \varnothing$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, notée $p_A(B)$ ou $p(B|A)$, est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Dans le tableau 4.3 de la présente page on a calculé les probabilités conditionnelles des différentes sections connaissant le sexe.

TABLE 4.3 – Distribution des probabilités conditionnelles connaissant le sexe

	1 ES	1 L	1 S	Total
Femmes	$\frac{76}{218}$	$\frac{50}{218}$	$\frac{92}{218}$	$\frac{218}{218}=1$
Hommes	$\frac{43}{132}$	$\frac{13}{132}$	$\frac{76}{132}$	1
Ensemble	$\frac{119}{350}$	$\frac{63}{350}$	$\frac{168}{350}$	1

Propriété 4.5 (Formule des probabilités composées)**.** *Soient* Ω *un univers,* p *une probabilité sur cet univers et* A *et* B *deux parties non vides de cet univers. Alors :*

$$p(A\cap B) = p_B(A)\times p(B) = p_A(B)\times p(A)$$

Preuve. $p_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A\cap B) = p_A(B)\times p(A)$ d'une part. $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \Leftrightarrow p(A\cap B) = p_B(A)\times p(B)$ d'autre part. ♢

Avec notre exemple on a :
- $p(E\cap F) = p_F(E)\times p(F) = \frac{76}{218}\times\frac{218}{350} = \frac{76}{350}$;
- $p(E\cap F) = p_E(F)\times p(E) = \frac{76}{119}\times\frac{119}{350} = \frac{76}{350}$.

4.2.3 Formule des probabilités totales

Propriété 4.6 (Formule des probabilités totales)**.** *Soient* Ω *un univers,* p *une probabilité sur cet univers et* B *une partie non vide de cet univers et* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *formant une partition de* Ω *(voir la définition 4.5 page 62). Alors :*

$$p(B) = p(A_1\cap B) + p(A_2\cap B) + \cdots + p(A_m\cap B)$$

On l'admettra.
Avec notre exemple :
- E, S, et L forment une partition de l'univers car $E\cup S\cup L = \Omega$ (à eux trois ils regroupent toutes les possibilités) et $E\cap S = \varnothing$, $E\cap L = \varnothing$ et $S\cap L = \varnothing$ (ils sont disjoints).
  Alors $p(F) = p(E\cap F) + p(S\cap F) + p(L\cap F) = \frac{76}{350} + \frac{92}{350} + \frac{50}{350} = \frac{218}{350}$.
- F et H forment eux aussi une partition de l'univers. Alors $p(E) = p(F\cap E) + p(H\cap E) = \frac{76}{350} + \frac{43}{350} = \frac{119}{350}$

4.2.4 Arbre pondéré

En terminale ES l'utilisation de ces formules est souvent facilitée par un ou plusieurs arbres pondérés où :
- la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

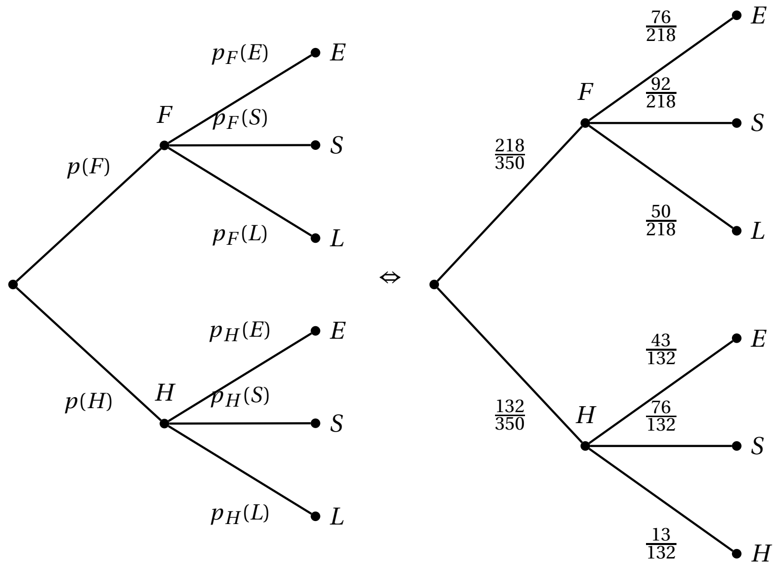
Sur la figure 4.1 page suivante sont représentés les deux arbres correspondant à la situation de notre exemple.

4.2.5 Indépendance de deux événements

Définition 4.12. Soient Ω un univers, p une probabilité sur cet univers et A et B deux parties de cet univers alors dire que deux événements sont indépendants signifie que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

Remarques.
- Si A et B ne sont pas vides, si $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ alors $p_B(A) = p(A)$ et $p_A(B) = p(B)$.
  Ainsi la probabilité d'obtenir A sachant que B est réalisé est égale à la probabilité d'obtenir A ; intuitivement cela signifie que A ne dépend pas de B.
- Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

FIGURE 4.1 – Arbre 1 de la situation de départ



$p(F\cap E) = p(F)\times p_F(E) = \frac{218}{350}\times\frac{76}{218} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap S) = p(F)\times p_F(S) = \frac{218}{350}\times\frac{92}{218} = \frac{95}{350}$

$p(F\cap L) = p(F)\times p_F(L) = \frac{218}{350}\times\frac{50}{218} = \frac{50}{350}$

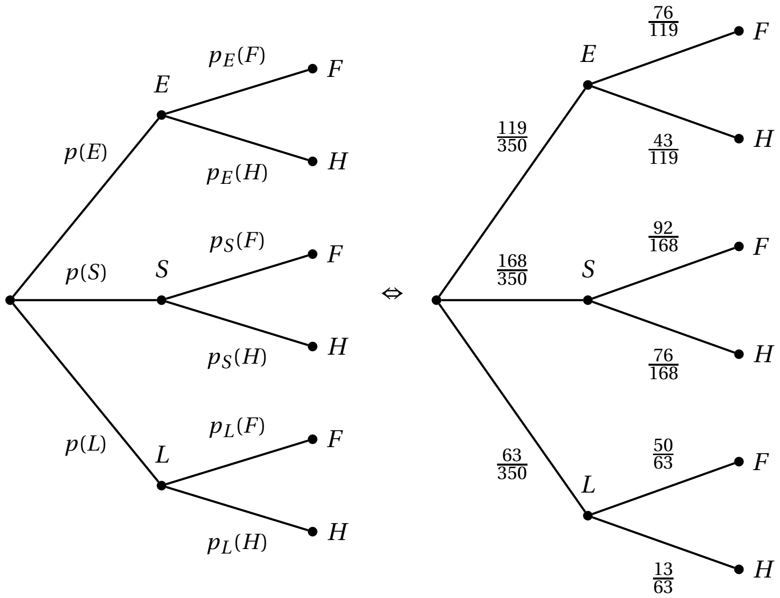
$p(H\cap E) = p(H)\times p_H(E) = \frac{132}{350}\times\frac{43}{132} = \frac{43}{350}$

$p(H\cap S) = p(H)\times p_H(S) = \frac{132}{350}\times\frac{76}{132} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap L) = p(H)\times p_H(L) = \frac{132}{350}\times\frac{13}{132} = \frac{13}{350}$

Enfin : $p(E) = p(F\cap E)+p(H\cap E) = \frac{76}{350}+\frac{43}{350} = \frac{119}{350}$ $\quad p(S) = p(F\cap S)+p(H\cap S) = \frac{92}{350}+\frac{76}{350} = \frac{168}{350}$
$p(L) = p(F\cap L)+p(H\cap L) = \frac{50}{350}+\frac{13}{350} = \frac{63}{350}$.

FIGURE 4.2 – Arbre 2 de la situation de départ



$p(F\cap E) = p(E)\times p_E(F) = \frac{119}{350}\times\frac{76}{119} = \frac{76}{350}$

$p(H\cap E) = p(E)\times p_E(H) = \frac{119}{350}\times\frac{43}{119} = \frac{43}{350}$

$p(F\cap S) = p(S)\times p_S(F) = \frac{168}{350}\times\frac{92}{168} = \frac{92}{350}$

$p(H\cap S) = p(S)\times p_S(H) = \frac{168}{350}\times\frac{76}{168} = \frac{76}{350}$

$p(F\cap L) = p(L)\times p_L(F) = \frac{63}{350}\times\frac{50}{63} = \frac{50}{350}$

$p(H\cap L) = p(L)\times p_L(H) = \frac{63}{350}\times\frac{13}{63} = \frac{13}{350}$

Enfin :
$p(F) = p(F\cap E)+p(F\cap S)+p(F\cap L) = \frac{76}{350}+\frac{50}{350}+\frac{92}{350} = \frac{218}{350}$ $\quad p(H) = p(H\cap E)+p(H\cap S)+p(H\cap L) = \frac{43}{350}+\frac{76}{350}+\frac{13}{350} = \frac{132}{350}$

4.3 Exercices

4.3.1 Révisions

EXERCICE 4.1.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements :

- A : « obtenir un as » ;
- P : « obtenir un pique ».

1. Déterminer la probabilité de A et de P.
2. Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$ puis déterminer la probabilité de ces événements.

EXERCICE 4.2.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.

On note :

- E_1 : « A est occupé » ;
- E_2 : « B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.
- $p(E_2) = 0,6$;

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 4.3.
On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

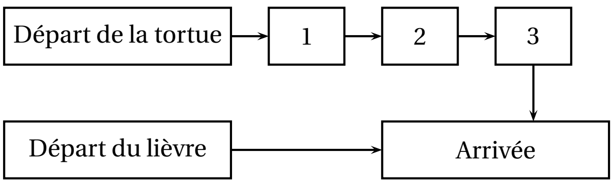
1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau donné dans le tableau 4.4 de la présente page.
5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course. Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné *(voir figure 4.3 de la présente page)*.

   Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

TABLE 4.4 – Tableau de l'exercice 4.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

FIGURE 4.3 – Figure de l'exercice 4.3



EXERCICE 4.4.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « aucun des trois enfants ne sera du même sexe ».

4.3.2 Probabilités conditionnelles

Classiques

EXERCICE 4.5.
Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 12 % des bovins ont la maladie M ;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
   (a) pour un animal d'être malade si il réagit au test ;
   (b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

EXERCICE 4.6 (D'après La Réunion septembre 2 006)**.**
On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60 % des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.
On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un événement est assimilée à la fréquence correspondante.
On note A l'événement « la personne choisie est abonnée au fournisseur A », B l'événement « la personne choisie est abonnée au fournisseur B » et H l'événement « la personne choisie accède à Internet par le haut débit ».

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'événement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,20$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à $0,54$.
4. Calculer $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{A})$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 4.7 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2 007)**.**
Une machine produit des pièces, dont certaines sont défectueuses à cause de deux défauts possibles, le défaut $\mathrm{D_A}$ et le défaut $\mathrm{D_B}$, à l'exclusion de tout autre défaut.

1. On a constaté que, parmi les pièces produites par la machine, 28 % ont le défaut $\mathrm{D_A}$, 37 % ont le défaut $\mathrm{D_B}$, et 10 % ont les deux défauts. On choisit au hasard une des pièces produites par la machine. Quelle est la probabilité de tomber sur une pièce défectueuse ?
2. **Dans la suite du problème on s'intéresse aux pièces défectueuses qui n'ont qu'un seul défaut.**
   On admet que 40 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_A}$, et que 60 % de ces pièces ont seulement le défaut $\mathrm{D_B}$. On a constaté que 40 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_A}$ sont réparables, et que 30 % des pièces qui ont le défaut $\mathrm{D_B}$ sont réparables. On choisit une pièce au hasard. On note A l'événement « La pièce a le défaut $\mathrm{D_A}$ », B l'événement « La pièce a le défaut $\mathrm{D_B}$ » et R l'événement « La pièce est réparable ».
   (a) Construire un arbre pondéré décrivant la situation
   (b) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie a le défaut $\mathrm{D_A}$ et est réparable ».
   (c) Calculer la probabilité de l'événement : « La pièce choisie est réparable ».
   (d) Sachant que la pièce choisie est réparable, déterminer la probabilité qu'elle ait le défaut $\mathrm{D_A}$ (le résultat sera donné sous la forme d'une fraction irréductible).

EXERCICE 4.8.
Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.
40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.
Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.
Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.
On considère les événements F « la grille est de niveau facile », M « la grille est de niveau moyen », D « la grille est de niveau difficile », R « Pierre réussit la grille » et $\overline{\mathrm{R}}$ son événement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
   (b) Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
   (c) Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme : « Je pense que ta grille était facile ».
   Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

EXERCICE 4.9 (D'après Polynésie juin 2 007)**.**
Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.
150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que :
- la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20 % des adultes
- 27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10 % des enfants.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

   On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage. On pourra utiliser les notations suivantes :
   - A l'événement « la personne appelée est un adulte » ;
   - M l'événement « la personne appelée a choisi la magie » ;
   - T l'événement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;
   - N l'événement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».
2. (a) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?
   (b) Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?
   (c) Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre
3. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est $0,32$.
4. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 4.10 (Centres étrangers 2 007)**.**
On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$.
S'il pleut, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.
S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur X arrive à l'heure à son travail ?
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur X arrive à l'heure à son travail.
   Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?
5. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*

Moins classiques

EXERCICE 4.11.
Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4.12.
Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :
- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades ;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif ;
- 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

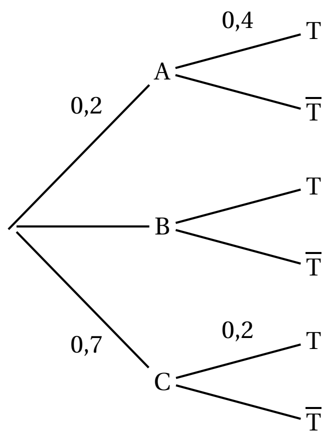
On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4.13 (Trouvé sur le blog Econoclaste)**.**
Une maladie touche une personne sur mille dans la population. Il existe un test pour cette maladie, qui est valide à 99 % ; c'est-à -dire que lorsque vous êtes malade, le test est positif dans 99 % des cas, et si vous n'êtes pas malade, le test est négatif dans 99 % des cas. Il y a 1 % de « faux positifs » et 1 % de « faux négatifs ».
Une personne fait ce test, et le test est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit malade ?

EXERCICE 4.14 (D'après La Réunion juin 2 007)**.**
Soient A, B, C et T quatre événements associés à une épreuve aléatoire. On note $\overline{\text{T}}$ l'événement contraire de l'événement T. On donne l'arbre de probabilités ci-contre.

1. Donner la probabilité $p_{\text{A}}(\text{T})$ de l'événement « T sachant que A est réalisé ».
2. Calculer :
   (a) la probabilité $p(\text{B})$ de l'événement B ;
   (b) la probabilité $p_{\text{A}}\left(\overline{\text{T}}\right)$ de l'événement « non T sachant que A est réalisé » ;
   (c) la probabilité $p(\text{A}\cap\text{T})$ de l'événement « A et T ».
3. On sait que la probabilité $p(\text{T})$ de l'événement T est : $p(\text{T}) = 0,3$.
   (a) Calculer la probabilité $p_{\text{T}}(\text{A})$.
   (b) Calculer la probabilité $p_{\text{B}}(\text{T})$.



EXERCICE 4.15.
Une boîte de chocolats contient 50 % de chocolats au lait, 30 % de chocolats noirs et 20 % de chocolats blancs. Tous les chocolats de la boîte sont de même forme et d'emballage identique.
Ils sont garnis soit de praliné soit de caramel et, parmi les chocolats au lait, 56 % sont garnis de praliné.
On choisit au hasard un chocolat de la boîte. On suppose que tous les choix sont équiprobables.
On note :
- L : l'événement « le chocolat choisi est au lait » ;
- N : l'événement « le chocolat choisi est noir » ;
- B : l'événement « le chocolat choisi est blanc » ;
- A : l'événement « le chocolat choisi est garni de praliné » ;
- $\overline{\text{A}}$: l'événement « le chocolat choisi est garni de caramel ».

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale.

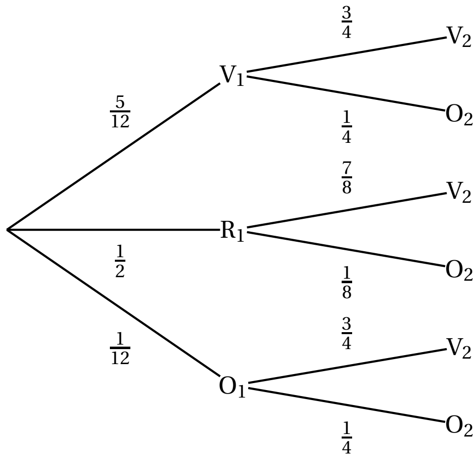
1. Traduire les données du problème à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. Donner la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat au lait.
3. Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit au lait et garni de praliné.
4. Dans la boîte, 21 % des chocolats sont noirs et garnis de praliné.
   Montrer que la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné, sachant que c'est un chocolat noir, est égale à $0,7$.
5. Dans la boîte, 60 % des chocolats sont garnis de praliné.
   (a) Déterminer la probabilité que le chocolat choisi soit blanc et garni de praliné.
   (b) En déduire la probabilité que le chocolat choisi soit garni de praliné sachant que c'est un chocolat blanc.

Indépendance

EXERCICE 4.16 (Asie juin 2 007).
Partie A
Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.
Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$ à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.
On note R_1 l'événement « le premier feu rencontré est au rouge », V_1 l'événement « le premier feu rencontré est au vert » et O_1 l'événement « le premier feu rencontré est à l'orange » et on définit de même R_2, V_2, O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

Partie B
On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide. L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

Chapitre 5

Logarithme népérien

Sommaire

5.1 Activités

ACTIVITÉ 5.1 (Primitive s'annulant en 1)**.**
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et G la fonction définie, pour tout réel x par $G(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f admet des primitives.
2. Soit F une primitive quelconque de f. Exprimer G en fonction de F et de x.
3. En déduire G'. En déduire que G est aussi une primitive de f.
4. Montrer que G est la primitive de f s'annulant en 1.

Plus généralement, on a la propriété suivante, qu'on admettra (la démonstration est identique à l'activité 5.1) :

Propriété 5.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit a un réel fixé de I. Alors la fonction F définie pour tout $x \in I$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.*

ACTIVITÉ 5.2 (Primitive de la fonction inverse).
Dans le chapitre 3, on a obtenu des primitives pour toutes les fonctions usuelles, sauf pour la fonction inverse. L'objectif de cette activité est de découvrir la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1 et quelques unes de ses propriétés.
On notera F la fonction définie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ qui est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

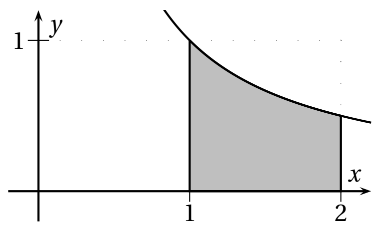
1. Expliquer pourquoi F existe et est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
2. Signe de $F(x)$ selon les valeurs de x.
   (a) Déterminer $F(1)$.
   (b) Expliquer pourquoi, lorsque $x > 1$, on a $F(x) > 0$.
   (c) Expliquer pourquoi, lorsque $0 < x < 1$, $\int_x^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t > 0$.
   En déduire le signe de $F(x)$ lorsque $0 < x < 1$.
3. Étudier le signe de $F'(x)$ selon les valeurs de x.
   En déduire les variations de F.
4. (a) Montrer que $F(x)$ et $F(ax)$, où a est un réel positif fixé, ont des dérivées égales.
   On rappelle que $\left(f(ax+b)\right)' = af'(ax+b)$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x > 0$, on ait $F(ax) = F(x) + C$.
   (c) En posant $x = 1$, en déduire la valeur de C.
   (d) En posant $x = b$, en déduire une propriété de la fonction F.

Définition. On appelle *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
La fonction logarithme népérien est donc la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0$$

On admettra que cette fonction est continue.

ACTIVITÉ 5.3 (Encadrement de ln(2)).
On se propose d'obtenir un encadrement de $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire un encadrement, en unités d'aire, de l'aire du domaine grisé de la figure ci-contre.

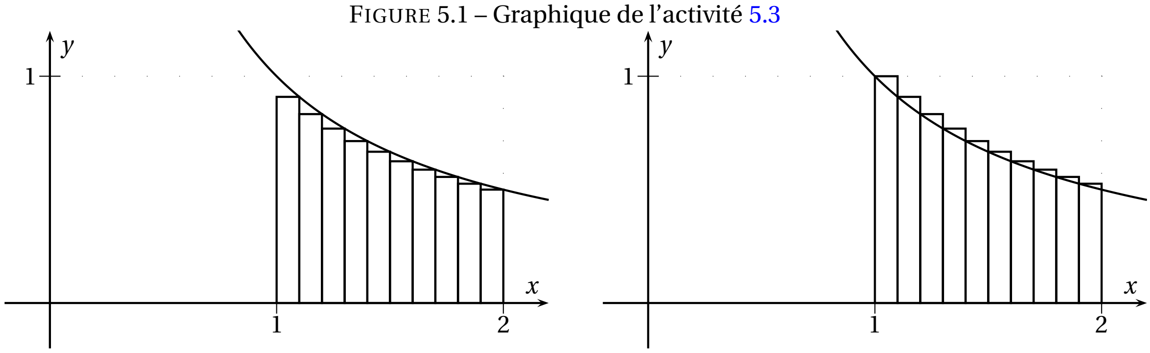


1. Compléter le tableau suivant :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$\frac{1}{x}$											

2. En découpant l'aire sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et 2 en rectangles comme dans le schéma 5.1 de la présente page, en déduire un encadrement de ln(2).

FIGURE 5.1 – Graphique de l'activité 5.3



Activité 5.4 ($\ln(x) = 1$)**.**
On se propose de montrer que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution.

1. Montrer que $x \longmapsto \ln(x)$ est une fonction strictement croissante.
2. Déterminer, à la calculatrice, des valeurs approchées à 10^{-1} de $\ln(2)$ et $\ln(3)$.
3. En déduire que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;3]$.
   On notera e cette solution.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-3} de e.

Activité 5.5 (Comportement du logarithme aux bornes de son ensemble de définition)**.**
On se propose d'étudier les limites de la fonction logarithme aux bornes de son ensemble de définition : $]0\,;+\infty[$ et de tracer sa courbe représentative.

1. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ln(x)$										

   (b) i. Déterminer, à l'aide de la calcultrice, le premier entier x tel que $\ln x > 10$.
   ii. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le premier entier n tel que $\ln\left(10^n\right) > 100$.

   (c) Comment semble se comporter la fonction logarithme quand x devient grand ?

2. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\ln(x)$										

   (b) i. Déterminer, à l'aide de la calcultrice, le premier entier x tel que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) < -10$.
   ii. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le premier entier n tel que $\ln\left(\frac{1}{10^n}\right) < -100$.

   (c) Comment semble se comporter la fonction logarithme quand x tend vers 0 ?

3. Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans un repère orthonormal.

Activité 5.6 (Formes indéterminées)**.**
On pose, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f(x) = x\ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

   (b) i. Expliquer pourquoi, lorsque x tend vers 0, la limite de f est une forme indéterminée.
   ii. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$f(x)$							

   iii. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. (a) Étudier la limite de g en 0.

   (b) i. Expliquer pourquoi, lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de g est une forme indéterminée.
   ii. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	1	5	10	50	100	500	1 000
$g(x)$							

   iii. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

5.2 Logarithme népérien : définition et premières propriétés

5.2.1 Définition

Définition 5.1. Pour tout $a > 0$, on appelle *logarithme népérien de a*, notée $\ln(a)$, le nombre

$$\ln(a) = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Remarques. • On peut écrire $\ln a$ à la place de $\ln(a)$ quand il n'y a aucun risque de confusion.
- Par définition, $\ln(1) = 0$.
- On a vu en activité qu'un tel nombre existe pour tout $a > 0$.

5.2.2 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 5.2. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve. Ce théorème a été démontré à la question 4 de l'activité 5.2. ◇

Propriété 5.3. *Pour tous réels a et b strictements positifs et tout entier relatif n, on a :*
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Preuve. • $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$ d'une part, $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ d'autre part,
donc $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^n) = \ln\left(\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}\right) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a)}_{n \text{ fois}} = n\ln(a)$
- $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = \ln(a)$ d'une part, $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ d'autre part, donc $\ln(a) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

◇

5.2.3 Équations et inéquations comportant un logarithme

Quelques propriétés

Propriété 5.4. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :*
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

Ainsi que :

Propriété 5.5. *Pour tout réel x strictement positif :*
- $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Remarque. On peut résumer la propriété précédente par le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Preuve. La fonction logarithme népérien étant strictement croissante (voir le paragraphe 5.3.3), on obtient aisément ces deux propriétés. ◇

Résoudre $\ln(x) = m$

L'équation a une unique solution

Théorème 5.6. *Pour tout réel m, l'équation* $\ln(x) = m$ *admet une unique solution.*

Preuve. La fonction logarithme est continue et strictement croissante, de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $m \in]-\infty\,;+\infty[$, l'équation $\ln(x) = m$ admet une unique solution. ◇

Le nombre e

Définition 5.2. On note e le nombre tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

Remarques. • Un tel nombre existe forcément d'après le théorème précédent.
• $\mathrm{e} \approx 2,71828\ldots$

$\mathbf{e}^m$ Pour tout entier relatif, $\ln(\mathrm{e}^n) = n\ln(\mathrm{e}) = n$. De façon générale, même quand m n'est pas entier, on notera e^m l'unique solution de l'équation $\ln(x) = m$.

Propriété 5.7. *Pour tout réel m, $\ln(e^m) = m$.*

5.3 Fonction logarithme népérien

5.3.1 Définition

Définition. On appelle *logarithme népérien*, notée $\ln(x)$, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

La fonction logarithme népérien est donc la primitive de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \ln(1) = 0$$

La fonction *logarithme népérien* est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
On admettra que cette fonction est continue.

5.3.2 Limites aux bornes

Propriété 5.8. *Soit $x \mapsto \ln(x)$ la fonction logarithme népérien.*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$

On l'admettra.

Remarque. L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

5.3.3 Variations

Propriété 5.9. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$ *et on a :*

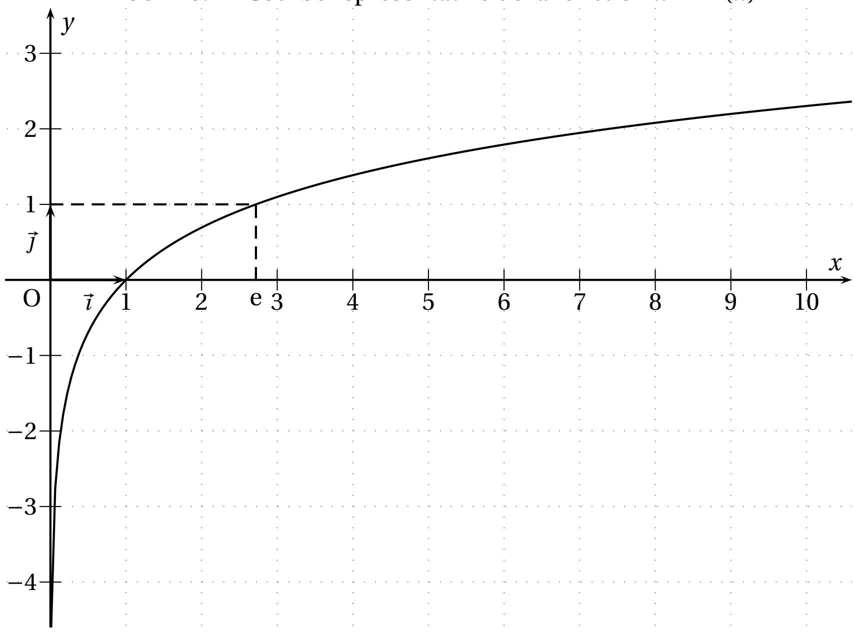
x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	||	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Preuve. La dérivée de la fonction logarithme est la fonction inverse, or quand $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$.
La dérivée de $\ln(x)$ est donc strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ ce qui implique que la fonction $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. ◇

5.3.4 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme est donnée par la figure 5.2 de la présente page.

FIGURE 5.2 – Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$



5.3.5 Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien

Formes déterminées

Les limites suivantes ne sont pas des formes indéterminées (n est un entier quelconque strictement positif). Le lecteur est invité à les compléter

- $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\ln(x) = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x} = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots$

Formes indéterminées

Pour les formes indéterminées, on admettra les résultats suivants :

Propriété 5.10. *Soit n un entier naturel strictement positif. On a :*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = 0$

On pourra retenir cette propriété sous la forme : dans ces cas d'indétermination là, $\ln(x)$ est négligeable par rapport à x.

5.4 Exercices et problèmes

5.4.1 Divers

EXERCICE 5.1 (Encadrement de $\ln(3)$).
En procédant comme dans l'activité 5.3 page 74, déterminer un encadrement de $\ln(3)$.

5.4.2 Propriétés algébriques

EXERCICE 5.2.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln(6)-\ln(2)$
2. $\ln(2)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln(3)-\ln(9)$
4. $\ln(2)+\ln(4)-\ln(8)$
5. $\frac{1}{4}\ln(81)$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\ln\left(\sqrt{3}\right)$
7. $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)-\ln(\sqrt{3}-1)$

EXERCICE 5.3.
Donner, en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ les valeurs de :

1. $\ln(10)$
2. $\ln(25)$
3. $\ln(16)$
4. $\ln(400)$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
8. $\ln(0,4)$
9. $\ln\left(\sqrt{5}\right)$
10. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
11. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
12. $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

EXERCICE 5.4.
a et b étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\frac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3\times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\frac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$
6. $\frac{\ln(a)}{\ln(ab^2)}$
7. $\frac{\ln(ab^4)}{\ln(b)}$

5.4.3 Résolutions

EXERCICE 5.5.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour x puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x)>1$
2. $\ln(x)=2$
3. $\ln(x)<-1$
4. $3-\ln(x)\leqslant 0$
5. $\ln(x)=-3$
6. $2\ln(x+1)=0$
7. $\ln(2x+1)=1$
8. $\ln\left(x^2\right)=-1$
9. $\ln[x(x+1)]=0$
10. $\ln(x)+\ln(x+1)=0$
11. $x\ln(x)=0$
12. $2\ln(x)-1\leqslant 0$
13. $2x\ln(x)+x=0$
14. $(x-1)(1+\ln(x))\geqslant 0$
15. $x\ln(x+2)=0$

5.4.4 Études de fonctions comportant $\ln(x)$

EXERCICE 5.6 (D'après Asie Juin 2 007).
Partie A
Pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, on pose $f(x)=-x^2+10x-9-8\ln(x)$.

1. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (b) Montrer que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $f(x)=x^2\left(-1+\frac{10}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8\ln(x)}{x^2}\right)$ puis en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur $x\in]0\,;+\infty[$.
   (a) Montrer que $f'(x)=\frac{-2x^2+10x-8}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le tableau des variations de f.

Partie B
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère que la fonction f définie sur $[1\,;\,6]$ par $f(x)=-x^2+10x-9-8\ln(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

1. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.

2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

EXERCICE 5.7 (D'après Liban 2 007).
On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est représentée sur la figure 5.3 page ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 2 cm.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A (1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe $\mathscr{C}$ où B est le point de coordonnées $(2\,;\,\mathrm{e}-1)$. La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse e.

Partie A

Pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = (ax+b)\ln(x)$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.
2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(\mathrm{e})$ et $f'(1)$.
3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{lcl} a\mathrm{e}+b & = & 0 \\ a+b & = & \mathrm{e}-1 \end{array}\right.$

   Déterminer a et b.

Partie B

On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (\mathrm{e}-x)\ln(x)$.
On appelle S l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}$.

1. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2\ln(x) + \mathrm{e}x\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 - \mathrm{e}x$
   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Donner la valeur approchée à 10^{-1} de S en cm^2.

EXERCICE 5.8 (Centres étrangers 2 006).
On désigne par f la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $f(x) = 1 - x + 2\ln(x)$. La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 5.4 page suivante est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Calculer la limite de f en 0.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.
3. (a) Calculer $f(1)$.
   (b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;\,4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.
   (c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;\,5]$ par : $g(x) = x\left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 2\ln(x) - 1\right)$.
   (a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;\,5]$.
   (b) Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
   (c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en cm^2. On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3 b.

FIGURE 5.3 – Graphique de l'exercice 5.7

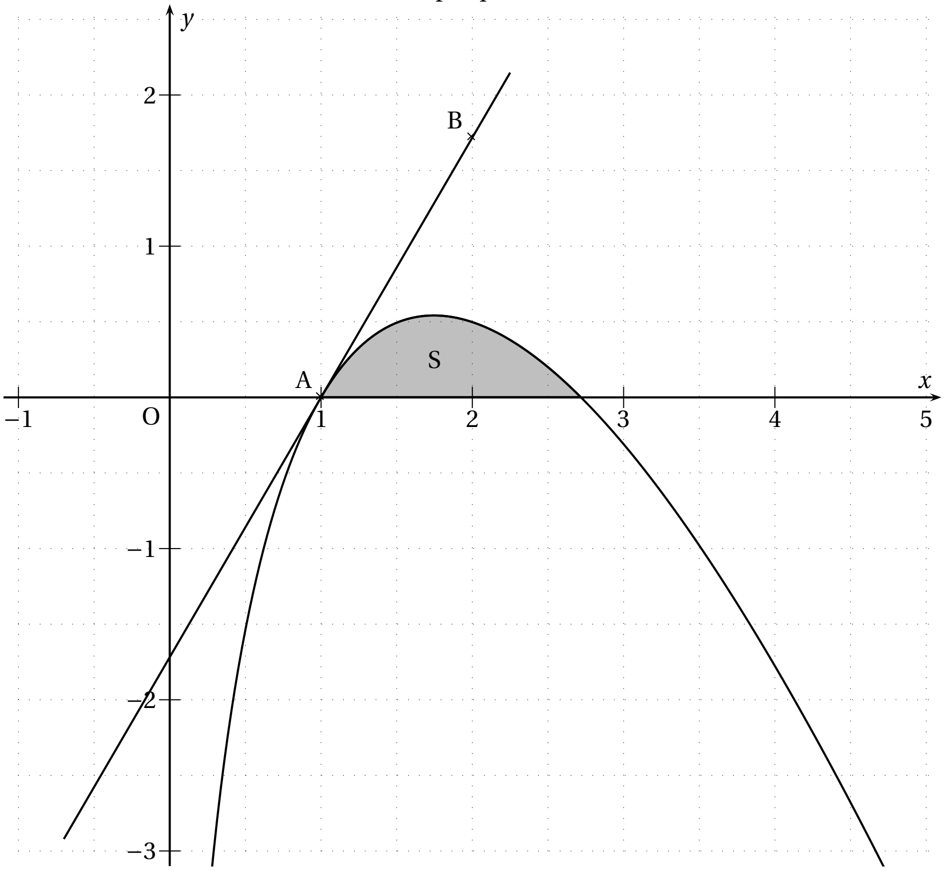
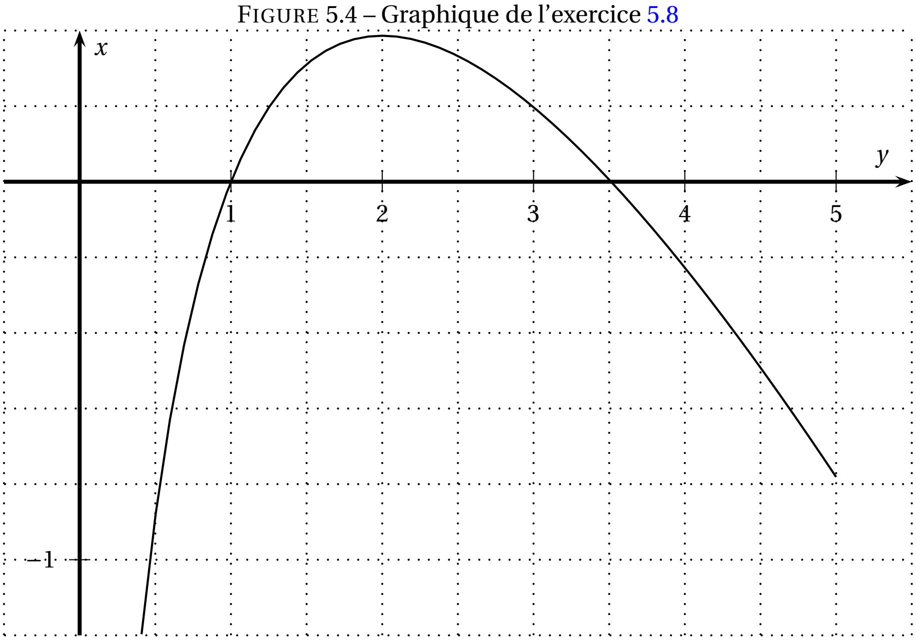


FIGURE 5.4 – Graphique de l'exercice 5.8



EXERCICE 5.9.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=3x-2-2x\ln(x)$.

1. (a) Calculer la dérivée de f et montrer que l'on a : $f'(x)=1-2\ln(x)$
   (b) Résoudre l'inéquation : $1-2\ln(x)>0$
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant :
   (a) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x :
   (b) la valeur exacte de $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$				
$f(x)$	$\|$ -2	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

3. À l'aide de ce tableau de variations :
   (a) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution indiquée.
4. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si chacune des affirmations suivantes est **vraie** ou **fausse** :
   (a) La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x=0$.
   (b) Toute primitive de f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}\right[$

EXERCICE 5.10.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=5\frac{\ln(x)}{x}+3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en 0 et en donner une interprétation graphique.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.
2. (a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.
3. On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\frac{5}{2}(\ln(x))^2+3x$
   (a) Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire la valeur exacte de $I=\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln(2))^2+b$ avec a et b deux réels à déterminer.
4. (a) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2\,;4]$.
   (b) Donner une interprétation graphique de I.
5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.
   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Rappel : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a\,;b]$.

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ est le nombre m tel que : $m=\frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

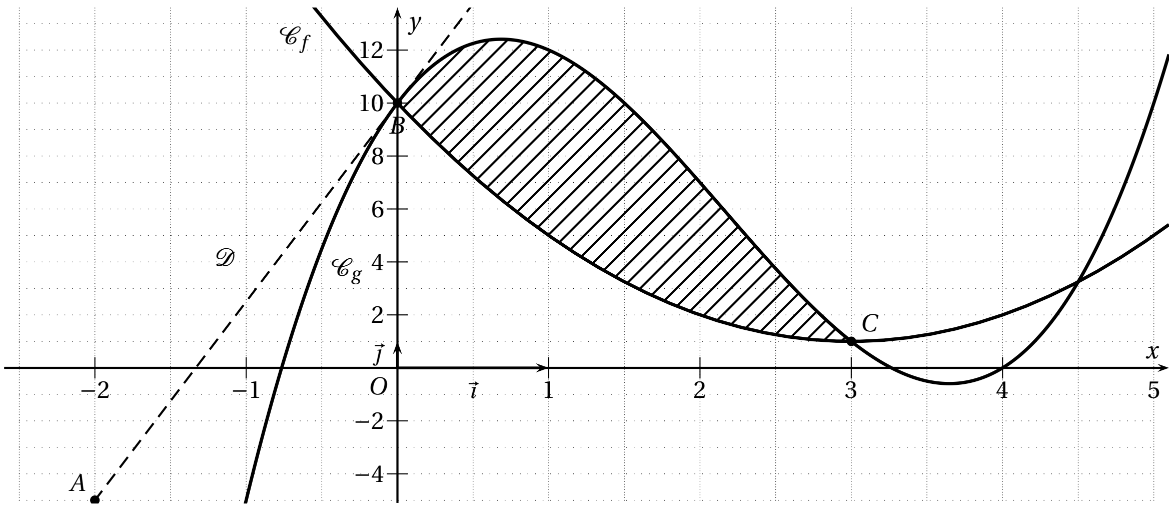
Devoir surveillé n°6

Calcul intégral – Probabilités conditionnelles – Logarithme népérien – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 6.1 (5 points).

Commun à tous les candidats

On considère deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ et $g(x) = x^3 - 6,5x^2 + 7,5x + 10$.
Leurs courbes représentatives sont données ci-dessous dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,35 cm sur l'axe des ordonnées).
Les points A, B et C sont de coordonnées respectives $(-2\,; -5)$, $(0\,; 10)$ et $(3\,; 1)$.
Est également tracée $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
En C la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.



1. On note f' et g' les fonctions dérivées respectives de f et g.
   (a) Par lecture graphique, et sans justifier, déterminer $f(3)$ et $f'(3)$ ainsi que $g(0)$ et $g'(0)$.
   (b) Retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.
2. *Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré situé entre les deux courbes pour x variant de 0 à 3.
   Calculer $\mathscr{A}$ en unités d'aire puis en cm^2.

EXERCICE 6.2 (5 points).

Commun à tous les candidats

Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.
35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.
Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.
On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.
On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ;
on note C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.
Tous les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au millième.

1. Quelle est la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant ?
2. Sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes ?
3. Décrire l'événement $\overline{E} \cap C$, et montrer que $p\left(\overline{E} \cap C\right) = 0,26$.
4. On sait de plus que 30 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
   (a) Calculer $p(E \cap C)$.
   (b) En déduire la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

EXERCICE 6.3 (5 points).
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin de la figure 6.1 joint en annexe page 86, on a placé les points $A\,(0\,;2\,;0)$, $B\,(0\,;0\,;6)$, $C\,(4\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;4\,;0)$ et $E\,(0\,;0\,;4)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).
   (b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.
2. (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.
   (b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.
3. On considère les points $F\,(2\,;0\,;0)$ et $G\,(0\,;3\,;0)$.
   On note $\mathscr{P}'$ le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$ et contenant les points F et G.
   (a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
   Sans justifier, représenter le plan $\mathscr{P}'$ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan $\mathscr{P}'$.
4. L'intersection des plans (CDE) et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ'.
   Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.
5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z &=& 6\\ x+y+z &=& 4\\ 3x+2y &=& 6\end{array}\right.$$

   (a) Résoudre ce système.
   (b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?

EXERCICE 6.3 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, une seule des réponses est correcte. Pour chaque question, copier sur votre copie le numéro de la question et celui de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou une mauvaise réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Le nombre réel $\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e}^2)}$ est égal à :
   (a) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ (b) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ (c) $\frac{1}{2}$
2. L'équation $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$ admet sur $\mathbb{R}$:
   (a) aucune solution (b) une seule solution (c) deux solutions
3. On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   (a) L'ensemble de définition de la fonction f est :
   i. $]0\,;+\infty[$ ii. $[-1\,;1]$ iii. $]-1\,;1[$ iv. $]1\,;+\infty[$
   (b) Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour ordonnée :
   i. $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ii. $\ln 1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ iii. $\ln 3-2\ln 2$ iv. $0,2876820725$
4. On considère la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(\ln x)$.
   Sur $]1\,;+\infty[$,l'inéquation $g(x)>0$ admet comme ensemble de solutions :
   (a) $]1\,;\mathrm{e}[$ (b) $]1\,;+\infty[$ (c) $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ (d) $[\mathrm{e}\,;+\infty[$

Exercice 6.4 (5 points)**.**
Commun à tous les candidats
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dont une partie est donnée sur la figure 6.2 page suivante.
On rappelle que si f est une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable alors la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que : $m = \frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (*on rappelle que la limite en* 0 *de la fonction* u *définie sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x\ln x$ *est* 0).
   (b) Montrer que $f'(x) = -2\ln x$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.
3. (a) Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Calculer m, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$.
   (c) Représenter m sur la figure 6.2.

À rendre avec la copie

FIGURE 6.1 – Figure de l'exercice 6.3 pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

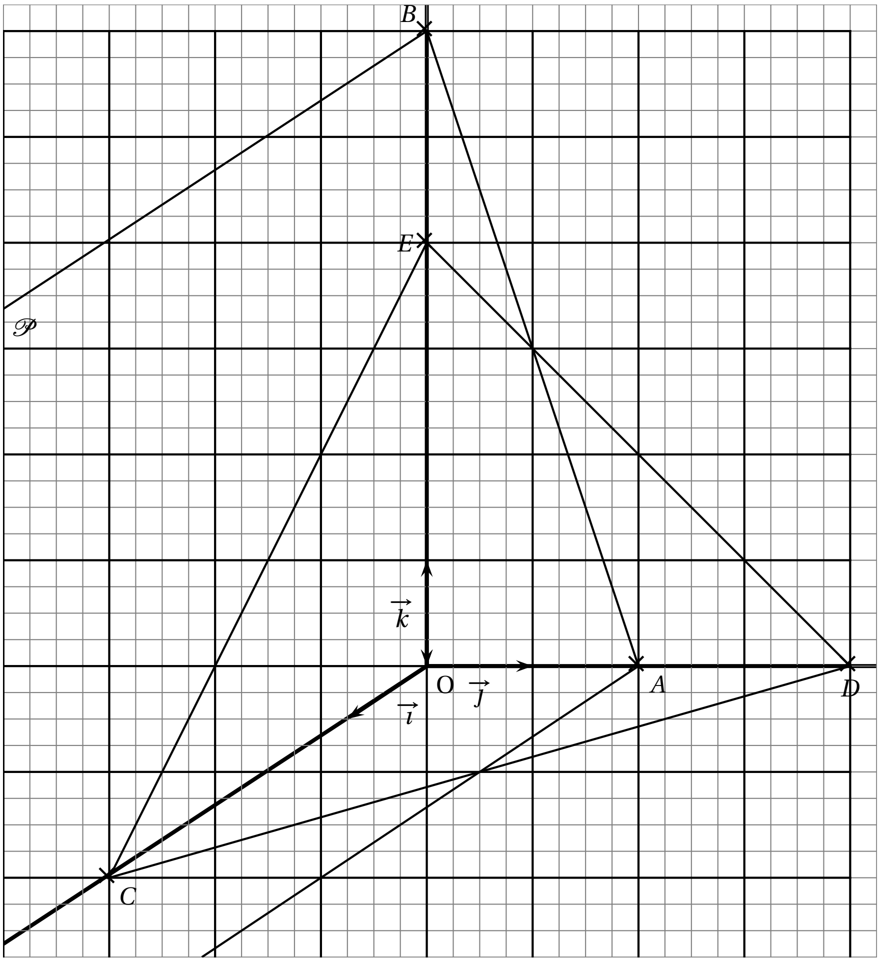
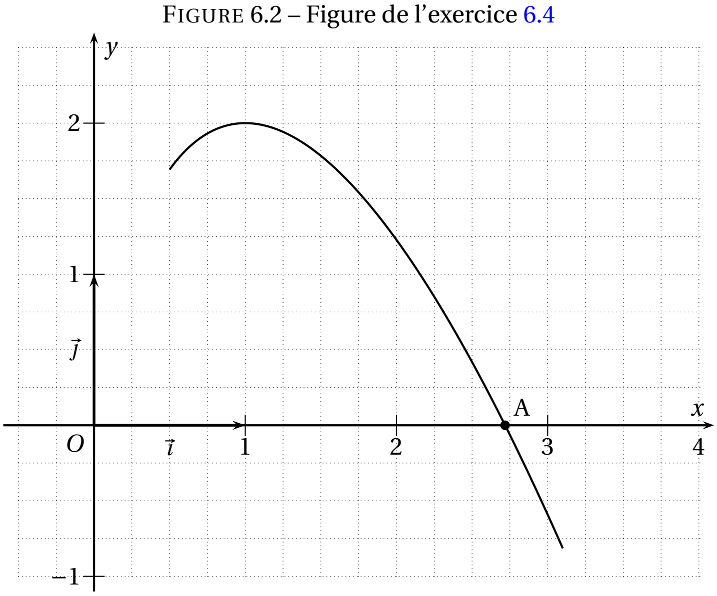


FIGURE 6.2 – Figure de l'exercice 6.4



Chapitre 6

Lois de probabilité

Sommaire

6.1 Activité

Une roue dans une fête foraine est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue. On tourne la roue et celle-ci s'arrête de façon équiprobable sur l'un des 8 secteurs.

6.1.1 Situation A

1. Décrire l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Donner, pour chacune de ces issues ω_i de cet univers, sa probabilité.
   On présentera ces résultats sous forme de tableau du type :

ω_i	...
$p(\omega_i)$	...

   On décrit ainsi la loi de probabilité p sur l'univers Ω.

Remarque. (rappel) Quand il n'y a pas de risque de confusion on peut noter $p(\omega_i)$ au lieu de $p(\{\omega_i\})$

6.1.2 Situation B

Le jeu se déroule en fait de la manière suivante : si un joueur désire jouer, il doit miser 1 € et il gagne une somme dépendant de la couleur obtenue :
- aucun euro si la roue s'arrête sur un secteur bleu ;
- un euro si la roue s'arrête sur un secteur vert ;
- trois euros si la roue s'arrête sur le secteur rouge.

On s'intéresse pour la suite uniquement au gain final obtenu par le joueur, c'est-à-dire le gain associé à la couleur moins la mise pour pouvoir jouer.

1. Décrire l'univers Ω' de cette nouvelle expérience aléatoire.
2. Décrire la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire (*on donnera le résultat sous forme de tableau*).
3. Si le joueur joue un grand nombre de fois à ce jeu, par exemple 10 000 fois :

(a) quel effectif pour chacun des gains peut-on espérer ?

(b) quel fréquence pour chacun des gains peut-on espérer ?

(c) quel gain total peut-on espérer sur les 10 000 parties ?

(d) quelle moyenne par partie peut-on espérer ?
Vérifier que cette moyenne est égale à $\sum p_i \omega_i = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \ldots + p_n\omega_n$ où les ω_i sont les différents gains possibles et les p_i les probabilités respectives des événements $\{\omega_i\}$.

Cette « moyenne » sera appelée espérance *de la loi de probabilité.*

6.1.3 Situation C

On s'intéresse maintenant uniquement à deux aspects d'une partie :
- S : le joueur obtient un succès à la partie, c'est-à-dire qu'il repart avec une somme d'argent strictement supérieure à celle avec laquelle il est arrivé ;
- $\overline{S}$: le joueur obtient un échec à la partie, c'est-à-dire qu'il repart avec une somme d'argent inférieure ou égale à celle avec laquelle il est arrivé.

1. Situation C_1 : Le joueur joue une seule partie. Déterminer la probabilité de chaque issue possible.
2. Situation C_2 : Le joueur joue trois parties à suivre. On note X le nombre de succès.
   (a) Décrire, à l'aide d'un arbre, cette expérience aléatoire.
   (b) Quelles sont les valeurs k possibles pour X et les probabilités de chacun des événements $\{X = k\}$?
   On présentera ces résultats sous forme de tableau du type :

k	$\ldots$
$p(X = k)$	$\ldots$

   (c) Calculer l'espérance de cette loi. Comment peut-on l'interpréter ?
3. Situation C_3 : Le joueur joue huit parties consécutives. On note X le nombre de succès.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   - A : Le joueur ne gagne aucune fois
   - B : Le joueur gagne à chaque fois
   - C : Le joueur gagne exactement une fois
   - D : Le joueur gagne au moins une fois
   - E : Le joueur gagne au plus sept fois

   (c) On admettra que l'espérance de cette loi de probabilité est 1. Comment l'interpréter ?

6.2 Loi de probabilité numérique (rappel de Première)

Remarque. En ES, on déterminera systématiquement les lois de probabilité à l'aide d'un arbre.

Définition 6.1. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité.
Si, pour tout i, ω_i est un réel alors la loi de probabilité est dite *numérique*.

Exemple 6.1. Dans l'activité, seule la loi de probabilité de la situation A n'est pas numérique, car les issues de cette expérience sont des couleurs. Dans tous les autres cas, la loi est numérique car les issues sont des réels.

Définition 6.2. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité qui est numérique.
On définit alors l'espérance mathématique, E, la variance, V, et l'écart type σ, de la loi de probabilité numérique de la façon suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i \qquad V = \sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - E)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^2\right) - E^2 \qquad \sigma = \sqrt{V}$$

où ω_i sont les éventualités et p_i les probabilités respectives des $\{\omega_i\}$.

6.3 Loi binomiale

Définition 6.3 (Épreuve de BERNOULLI)**.** On appelle *épreuve de* BERNOULLI toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle parfois, pour l'une, *succès* et, pour l'autre, *échec*.

Exemple 6.2. La situation C_1 de l'activité est une épreuve de BERNOULLI.

Définition 6.4 (Schéma de BERNOULLI)**.** On appelle *schéma de* BERNOULLI la répétition de la même épreuve de BERNOULLI les épreuves successives étant supposées 2 à 2 indépendantes.

Exemple 6.3. Les situations C_2 et C_3 de l'activité sont des schémas de BERNOULLI.

Définition 6.5 (Loi binomiale)**.** Considérons un schéma de BERNOULLI consistant en la repétition de n épreuves de BERNOULLI identiques et 2 à 2 indépendantes et notons p la probabilité d'un succès lors de chaque épreuve.
Soit X le nombre de succès et P la probabilité associée.
On dit que la probabilité P suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 6.4. Les probabilités issues des situations C_2 et C_3 de l'activité suivent des lois binomiales de paramètres respectifs $p=\frac{1}{8}$ et $n=3$ et $p=\frac{1}{8}$ et $n=8$.

On admettra la propriété suivante :

Propriété 6.1. *Soit une loi binomiale de paramètres p et n, avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in [0\,;\,1]$. *Alors :*

$$E = np \qquad V = np(1-p) \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

EXERCICE.
Déterminer les espérances, variances et écarts-types des lois de probabilité issues des situations C_2 et C_3 de l'activité.

6.4 Avec remise, sans remise

EXERCICE.
Une urne contient des boules blanches et noires indiscernables au toucher. On appelle B l'événement « la boule tirée est blanche » et N l'événement « la boule tirée est noire ».

1. L'urne contient deux boules blanches et une noire.
   (a) Déterminer $p(B)$ et $p(N)$
   (b) On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (c) On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (d) Comparer les deux lois précédentes.
2. L'urne contient 200 boules blanches et 100 noires.
   (a) Déterminer $p(B)$ et $p(N)$
   (b) On tire deux boules successivement avec remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (c) On tire deux boules successivement sans remise et on appelle X le nombre de boules blanches. Donner la loi de probabilité de X.
   (d) Comparer les deux lois précédentes.
3. Que peut-on en conclure ?

6.5 Exercices

6.5.1 Loi numérique

EXERCICE 6.1.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note la différence (en valeur absolue) entre ces deux dés.

1. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

EXERCICE 6.2.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :
- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

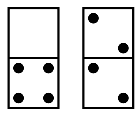
La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X le gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers Ω associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ €.
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ €.
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 6.3 (La Réunion juin 2 007)**.**



Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.
Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :
- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties ?

EXERCICE 6.4 (D'après Liban juin 2 007)**.**
Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection ».
On donne : la probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à 0,345.

1. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?
2. À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

   (a) Déterminer q.

(b) En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 6.5 (Polynésie septembre 2 006)**.**
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?
   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.
2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.
   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.
   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.

6.5.2 Loi binomiale

EXERCICE 6.6.
On jette trois fois de suite, de manière totalement indépendante une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X le nombre de « Pile »obtenues à chaque tirage.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer E, V et σ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de cette loi.

EXERCICE 6.7.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} *près.*
Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ».
   Quelle est la probabilité que :
   (a) Cet élève soit un garçon ?
   (b) Cet élève soit une fille qui fume ?
   (c) Cet élève soit un garçon qui fume ?
2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.
3. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur.

EXERCICE 6.8.
Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20 % de câbles C_1 et 80 % de câbles C_2.
On prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1. On suppose que $n = 4$. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.
   (b) Calculer la probabilité d'obetnir au moins un câble de type C_1.
   (c) Calculer l'espérance $E(X)$.
2. Dans cette question n est inconnu.
   (a) Exprimer $p(X \geqslant 1)$ en fonction de n.
   (b) Combien de fois faut-il réalise l'expérience pour être sûr à 90 % d'obtenir au moins un câble C_1 ?

EXERCICE 6.9 (D'après Centres étrangers – Juin 2 007)**.**
On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

1. Sur une période de 4 jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ? *On arrondira le résultat à* 10^{-3} *près.*
2. Combien de jours dans le mois de septembre, l'employeur de Monsieur X peut-il espérer le voir arriver à l'heure ?

EXERCICE 6.10 (Amérique du sud – Novembre 2 005)**.**
Lors d'un examen, Julien doit répondre à un Q.C.M.
À chaque question trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chaque question, soit il connaît la réponse et répond de façon exacte, soit il ne la connaît pas et, dans ce cas, bien qu'il ait la possibilité de ne pas répondre, il préfère tenter sa chance et répond au hasard il a alors une chance sur trois que sa réponse soit exacte.
On suppose, de plus, que la probabilité que Julien connaisse la réponse à une question donnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On note :

- C l'évènement « Julien connaît la réponse »,
- E l'évènement « la réponse est exacte ».

1. (a) Julien répond à une question du Q.C.M. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
   (b) Démontrer que : $p(\text{E}) = \frac{2}{3}$.
   (c) Calculer la probabilité que Julien connaisse la réponse à la question sachant que sa réponse est exacte.
2. Le Q.C.M. est composé de trois questions indépendantes. Il est noté sur 3 points. Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,5 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0. Soit X la note obtenue par Julien à ce Q.C.M.«
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X. On pourra s'aider d'un arbre. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.
   (b) Quelle est la probabilité que Julien ait au moins 1,5 point à ce Q.C.M. ?
   (c) En supposant que tous les élèves se comportent comme Julien, quelle moyenne, arrondie au centième, peut-on attendre à ce Q.C.M. ?

6.5.3 Annales

EXERCICE 6.11 (France métropolitaine – Juin 2 002)**.**
Une école de commerce a effectué une enquête, en janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle. À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :
A « La personne a une activité professionnelle » ;
B « La personne poursuit ses études » ;
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».
On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles. Dans l'ensemble des réponses reçues, en a relevé les résultats suivants :
* 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
* 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.
   (a) Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0, 18.

(b) Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?
3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).

   À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.
4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leqslant S < 22$	$22 \leqslant S < 26$	$26 \leqslant S < 30$	$30 \leqslant S < 34$	$34 \leqslant S < 38$	$38 \leqslant S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

   Quel est le salaire brut annuel moyen ?

EXERCICE 6.12 (Polynésie – Juin 2 006)**.**
Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons. Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe. En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.
On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi.
On note :

- A l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
- T l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
- D l'évènement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
- V l'évènement « le client interrogé voyage en première classe ».

1. Déterminer : $p(\text{A})$, $p(\text{T})$, $p(\text{V})$, $p_{\text{A}}(\text{V})$ et $p_{\text{T}}(\text{V})$.
2. (a) Determiner la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

   (b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

   (c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.
3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante. On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

   (a) Prouver que : $p_n = 1 - 0,4^n$.

   (b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$.

Devoir surveillé n°7

Loi de probabilité

EXERCICE 7.1 (7,5 points)**.**
Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat. Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin :
- 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10 % achètent un salon.
- Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon.

Une personne entre dans le magasin. On note :
- B l'événement « la personne a un bon publicitaire ».
- $\overline{\text{B}}$ l'événement « la personne n'a pas de bon publicitaire ».
- S l'événement « la personne achète un salon ».
- $\overline{\text{S}}$ l'événement contraire de S.

Partie I

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.
2. À l'aide de B, $\overline{\text{B}}$, S, $\overline{\text{S}}$, traduire les événements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près :
   (a) la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ;
   (b) la personne achète un salon ;
   (c) la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon.

Partie II
Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin. Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. Compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

2. Calculer le bénéfice que peut espérer le magasin par personne entrant.
3. (a) Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x.
   (b) Le directeur souhaite réaliser 76 € de bénéfice moyen par personne entrant. Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ?

EXERCICE 7.2 (6 points)**.**
Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.
   On appelle X le nombre de paniers marqués.
   (a) Montrer que $P(X = 0) = 0,0256$ et interpréter le résultat.
   (b) Calculer $P(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat.
   (c) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
2. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ?

Chapitre 7

Fonction exponentielle

Sommaire

7.1 Activités

7.1.1 Exponentielle

1. Rappeler pourquoi l'équation $\ln(x) = m$, où m est un réel quelconque, admet une unique solution $x \in]0\,; +\infty[$.
2. On appelle *exponentielle de* x, le nombre y, noté $\exp(x)$, solution de l'équation $\ln(y) = x$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \exp(x)$?
   (b) Montrer que $\exp(x) > 0$.
   (c) Déterminer par le calcul $\exp(2)$ et $\exp(-1)$.

7.1.2 Quelques propriétés de l'exponentielle

1. (a) Déterminer par le calcul $\ln(\exp(0))$ et $\ln(\exp(1))$.
   Que constate-t-on ? On admettra que c'est toujours vrai.
   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = \ldots\ldots$
   (b) Que peut-on dire alors de $\ln(\exp(a+b))$?
   En utilisant les propriétés algébriques du logarithme, exprimer plus simplement $\ln(\exp(a) \times \exp(b))$.
   Qu'en conclure ?
   On a donc, pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \ldots\ldots\ldots$
2. Déterminer par le calcul $\exp(\ln(1))$ et $\exp(\ln(2))$.
   Que constate-t-on ? On admettra que c'est toujours vrai.
   On a donc, pour tout $x\ldots\ldots$, $\exp(\ln(x)) = \ldots\ldots$
3. On a rappelle que si $(u(v))$ est dérivable alors $(u(v))' = u'(v) \times v'$.
   (a) Déterminer une expression de $(\ln(\exp(x)))'$ en fonction de $(\exp(x))'$ et de $\exp(x)$.
   (b) On a vu plus haut que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. En déduire une autre expression de $(\ln(\exp(x)))'$.
   (c) Que peut-on en conclure pour $(\exp(x))'$?
   On a donc $(\exp(x))' = \ldots\ldots\ldots$

7.1.3 Une expression de la fonction exponentielle

1. Compléter le tableau suivant, avec des valeurs exactes :

x	-5	-3	-1	0	1	2	3	5
$\exp(x)$								

2. Que constate-t-on ? On admettra que cela est vrai même quand x n'est pas entier.
   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \ldots\ldots.$

7.1.4 Comportement de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition

On se propose d'étudier les limites de la fonction exponentielle aux bornes de son ensemble de définition : $\mathbb{R}$ et de tracer sa courbe représentative.

1. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant, avec des valeurs approchées au dixième :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\exp(x)$										

   (b) Déterminer, par le calcul, x tel que $\exp(x) > 10000$.
   (c) Comment semble se comporter la fonction exponentielle quand x tend vers $+\infty$?
2. (a) Compléter le tableau de valeurs suivant, avec des valeurs approchées au dixième :

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$\exp(x)$										

   (b) Déterminer, par le calcul, x tel que $\exp(x) < \frac{1}{10000}$
   (c) Comment semble se comporter la fonction exponentielle quand x tend vers $-\infty$?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormal.

7.1.5 Formes indéterminées

On pose :

$$f(x) = x\exp(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\exp(x)}{x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*$$

1. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) i. Expliquer pourquoi, lorsque x tend vers $-\infty$, la limite de f est une forme indéterminée.
   ii. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	-1	-2	-3	-4	-5	-10	-100
$f(x)$							

   iii. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. (a) Étudier les limites de g en $-\infty$, en 0^- et en 0^+.
   (b) i. Expliquer pourquoi, lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de g est une forme indéterminée.
   ii. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	10	100
$g(x)$							

   iii. Conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

7.2 Exponentielle : définition et premières propriétés

7.2.1 Définition

On a vu au chapitre 5, au paragraphe 5.2.3 page 76, que l'équation $\ln(y) = x$, où x est un réel quelconque, admet une unique solution y appartenant à $]0\,;+\infty[$. Ce réel y, l'antécédent de x par la fonction logarithme népérien, sera noté $\exp(x)$.

Définition 7.1. Pour tout réel x, on appelle *exponentielle* de x, et on note $\exp(x)$, l'unique réel de $]0\,;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.
On a ainsi :

$$\begin{array}{rccl} \exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ & x & \longmapsto & \exp(x), \text{ où } \exp(x) \text{ est le nombre tel que } \ln(\exp(x)) = x \end{array}$$

Par définition on a donc, pour tout nombre y strictement positif :

$$y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln(y) = \ln(\exp(x)) = x$$

7.2.2 Premières propriétés

De la définition précédente on peut déduire les premières propriétés suivantes, démontrées pour la plupart en activité :

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(1) = \mathrm{e}$;
- Comme la fonction logarithme est définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0\,;+\infty[$; en particulier $\exp(x) > 0$ pour tout réel x ;
- Les fonctions exponentielle et logarithme sont des fonctions dites *réciproques* car, par définition, on a :
  $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout réel x et $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout réel $x > 0$;
- $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$;
  En effet, $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = \ln(\exp(y)) \Leftrightarrow x = y$.

7.2.3 Théorème fondamental

Théorème 7.1.

Pour tous réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits

Ce théorème a été démontré en activité.

7.2.4 Expression de l'exponentielle

Théorème 7.2. *Pour tout réel a et tout entier relatif p, on a :* $\exp(ap) = (\exp(a))^p$.

Preuve.

$$\ln\left((\exp(a))^p\right) = p\ln(\exp(a)) = pa = \ln\left(\exp(pa)\right)$$

Ainsi $\ln\left((\exp(a))^p\right) = \ln\left(\exp(pa)\right) \Leftrightarrow (\exp(a))^p = \exp(pa)$. ◇

D'après le théorème 7.2, pour tout entier relatif p, on peut écrire :

$$\exp(p) = \exp(1\times p) = (\exp(1))^p = \mathrm{e}^p$$

Par convention, on posera : $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, pour tout réel x, c'est-à-dire même quand x n'est pas entier.
On a donc :

Propriété 7.3. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$.

7.2.5 Propriétés algébriques

Avec la nouvelle notation, les propriétés, entièrement compatibles avec les propriétés des puissances, deviennent :

Propriété 7.4. *Pour tous réels x et y, on a :*

- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $e^0 = 1$ *et* $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{\ln(x)} = x$ *(pour* $x > 0$*)*

Preuve. On utilise encore une fois les règles de calcul sur le logarithme :

- $\ln\left(\mathrm{e}^{x+y}\right) = (x+y)\ln(\mathrm{e}) = x+y = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln(\mathrm{e}^y) = \ln(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)$ d'où $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$.
- $\ln(\mathrm{e}^{x-y}) = (x-y)\ln(\mathrm{e}) = x-y = \ln(\mathrm{e}^x)-\ln(\mathrm{e}^y) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}\right)$ d'où $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\ln(\mathrm{e}^{-x}) = -x\ln(\mathrm{e}) = -x = -\ln(\mathrm{e}^x) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$ d'où $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$ sera admise à notre niveau
- $\ln(\mathrm{e}^0) = 0\ln(\mathrm{e}) = 0 = \ln(1)$ or $\ln(\mathrm{e}^0) = \ln(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^0 = 1$
- $\ln(\mathrm{e}^1) = \ln(\mathrm{e}) \Leftrightarrow \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- Par définition e^x appartient à l'ensemble de définition de la fonction logarithme donc $\mathrm{e}^x > 0$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x\ln(\mathrm{e}) = x$

◇

7.3 Étude de la fonction exponentielle

7.3.1 Définition

Définition 7.2. On appelle fonction exponentielle, notée $\exp(x)$, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout x associe le nombre $\exp(x)$.

7.3.2 Limites aux bornes

Exercice.
On cherche à démontrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > x$.
On considère pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Déterminer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. En déduire que f à un minimum que l'on déterminera.
3. Justifier pour pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1 > x$.
   En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$.

Théorème 7.5.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Preuve. • On a vu dans l'exercice ci-dessus que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

- Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
  Posons $X = -x$. Quand x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$. Or $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^X}$.
  Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$.

◇

7.3.3 Variations

Fonction dérivée

Théorème 7.6. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a :*

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

La fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée.

On admettra que la fonction exponentielle est dérivable, pour le reste, la démonstration a été faite en activité.

Signe de la dérivée

Théorème 7.7. *La fonction exponentielle est continue et strictement croisssante.*

Preuve. Étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée (qui est e^x) est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ♢

Tableau de variations

On a donc :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$	$+$
Variation de e^x	$\nearrow$

Propriété 7.8. *Pour tous réels x et y on a :*

$$e^x \leqslant e^y \Leftrightarrow x \leqslant y$$

C'est une conséquence de la stricte croissance de la fonction exponentielle.

7.3.4 Courbe représentative

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des fonctions logarithme et exponentielle sont symétriques par rapport à la première bissectrice ; en effet, $M(x; y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y) \Leftrightarrow M'(y; x) \in \mathscr{C}'$.
On obtient donc la courbe représentative de la figure 7.1 page suivante, où sont représentées la première bissectrice et les courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle.

7.3.5 Autres limites faisant intervenir la fonction exponentielle

Formes déterminées

Les limites suivantes ne sont pas des formes indéterminées (n est un entier quelconque strictement positif). Le lecteur est invité à les compléter

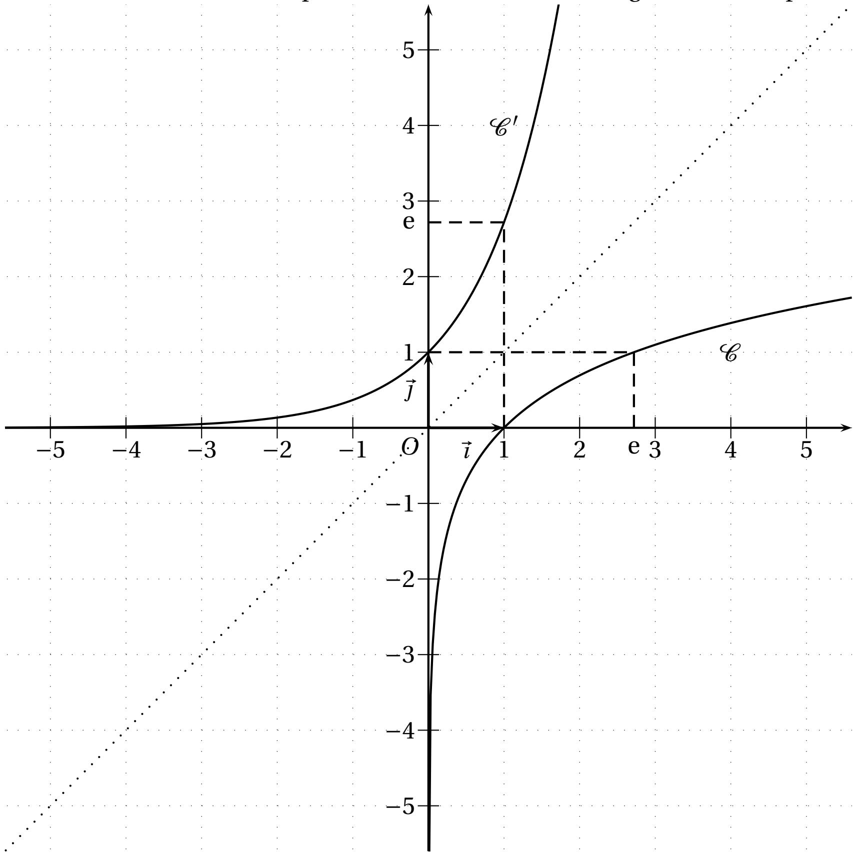
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^x = \ldots\ldots$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \ldots\ldots\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \ldots\ldots$

Formes indéterminées

Théorème 7.9. *On a :*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ *et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ *et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$.

FIGURE 7.1 – $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, courbes représentatives des fonctions logarithme et exponentielle



Preuve. • Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Posons $X = e^x$. On a alors $x = \ln(X)$.
Quand x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{\ln(X)} = +\infty$ car $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$.

• Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Posons $X = e^x$. On a alors $x = \ln(X)$.
Quand x tend vers $-\infty$, X tend vers 0^+.
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{X\to0^+} X\ln(X) = 0$.

• Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln(x)}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$. Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)} = +\infty$.

◇

7.4 Exercices

7.4.1 Propriétés algébriques

EXERCICE 7.1.
Simplifer les expressions suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x+\ln(3)}$
2. $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x-1)$
4. $\left(\mathrm{e}^{x+1}\right)\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)$
5. $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}$

EXERCICE 7.2.
Démontrer que pour tout réel x on a les égalités suivantes :

1. $\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
2. $\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=1$

7.4.2 Résolutions

EXERCICE 7.3.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^x=2$
2. $\mathrm{e}^x=\frac{1}{2}$
3. $\mathrm{e}^x=-\frac{1}{2}$
4. $\mathrm{e}^x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\mathrm{e}^x\geqslant 3$
6. $\mathrm{e}^{x-4}\leqslant 1$
7. $\mathrm{e}^{x+3}=\mathrm{e}^{2x-1}$
8. $\mathrm{e}^{2x-5}>\mathrm{e}^x$
9. $\mathrm{e}^{2x-1}<\mathrm{e}$
10. $\mathrm{e}^{(x-4)(2x-1)}=1$
11. $\mathrm{e}^{4x+5}\mathrm{e}^{2x-6}=1$
12. $\mathrm{e}^{4x+5}\mathrm{e}^{2x-6}=4$
13. $\mathrm{e}^{2-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x^2+x-1}}$
14. $\frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{\mathrm{e}^{-x+4}}=3$
15. $\mathrm{e}^{3x-1}=4\mathrm{e}^{x+1}$

EXERCICE 7.4.
Résoudre les équations suivantes (*on pourra poser $X=e^x$*) :

1. $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x+2=0$
2. $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1=0$
3. $\mathrm{e}^{2x}=3\mathrm{e}^x$
4. $2\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}=-5$

EXERCICE 7.5.
Étudier selon les valeurs de x le signe des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+3$
- $g(x)=5\mathrm{e}^{2x}-7$
- $h(x)=-3\mathrm{e}^{1-x}+5$

7.4.3 Études de fonctions comportant e^x

EXERCICE 7.6.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\mathrm{e}^x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\mathrm{e}^x$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\mathrm{e}^{-x}+1)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\mathrm{e}^{-x}+1)$

EXERCICE 7.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$d'unité 1 cm.

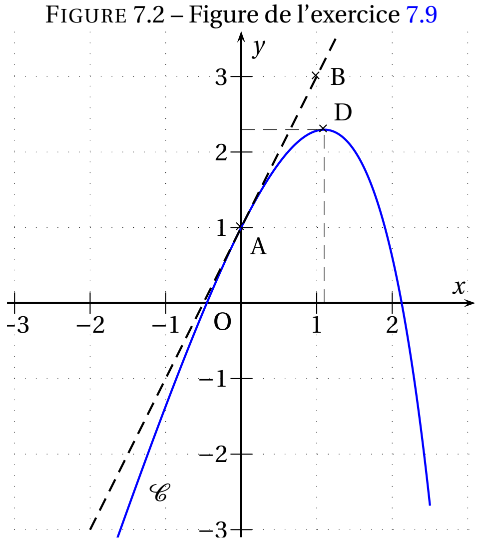
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. En déduire que $\mathscr{C}$ a deux asymptotes dont on donnera les équations.
2. Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine du repère. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes.
4. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en O. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

EXERCICE 7.8 (Polynésie – Septembre 2 007)**.**
Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x\mapsto \mathrm{e}+\frac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}x+\ln(5)$.
2. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+4)=0$ est : $S=\{0\}$.
3. Si $\left(1-\frac{1}{100}\right)^n\leqslant 0{,}7$ alors $n\geqslant\frac{\ln 0{,}7}{\ln 0{,}99}$.
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln\left(x^2+4x+3\right)=\ln(5x+9)$ est $S=\{-2\ ;\ 3\}$.
5. La limite quand x tend vers 1, $x<1$, de la fonction $x\mapsto\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

EXERCICE 7.9 (Antilles – Septembre 2 009)**.**
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par : $f(x) = ae^x + bx + c$ où a, b et c sont des réels fixés.
Une partie de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est représentée sur la figure 7.2 de la présente page.

FIGURE 7.2 – Figure de l'exercice 7.9



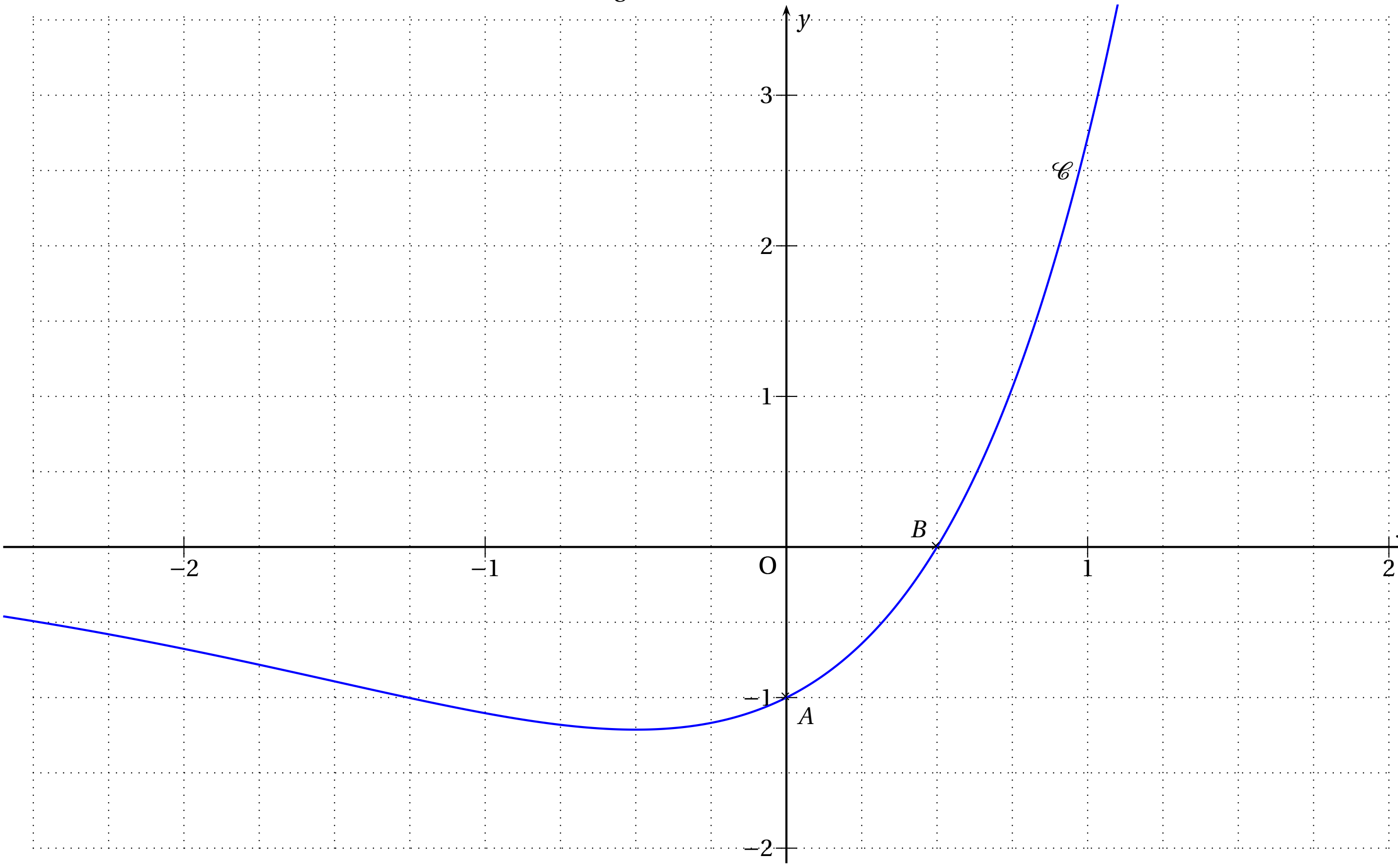
On dispose des renseignements suivants :

- $\mathscr{C}$ passe par A(0 ; 1).
- B est le point de coordonnées (1 ; 3) ; la droite (AB) est tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point D d'abscisse $\ln(3)$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f. Traduire les renseignements précédents par trois égalités utilisant f ou f'.
2. En résolvant un système, déterminer a, b et c.
3. On admet à partir de maintenant que $f(x) = -e^x + 3x + 2$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
   (b) Montrer que f s'annule exactement une fois sur $[-2 ; \ln(3)]$ en un réel α. Donner, en justifiant, une valeur approchée au centième près de α.
   (c) Pour la suite, on admet que f s'annule exactement une fois sur $[\ln(3) ; 3]$ en un réel β.
   Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
4. (a) Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.
   (b) On considère la surface $\mathscr{S}$ délimitée par l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite d'équation $x = \ln(3)$.
   Hachurer $\mathscr{S}$ sur la figure en annexe.
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, l'aire de $\mathscr{S}$, en unités d'aire. On donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au centième.

EXERCICE 7.10.
On considére la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$; sa représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée sur la figure 7.3 de la présente page (unités : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

FIGURE 7.3 – Figure de l'exercice 7.10



1. Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Montrer que f', la dérivée de f, peut s'écrire $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x puis en déduire le tableau des variations de f (on indiquera la valeur exacte du minimum de $f(x)$).
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A et la tracer sur le graphique.
3. (a) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x-3)e^x$ est une primitive de f.
   (b) Colorier le domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.
   (c) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis en déduire la valeur de l'aire du domaine colorié en cm^2 arrondie au centième.

Devoir surveillé n°8

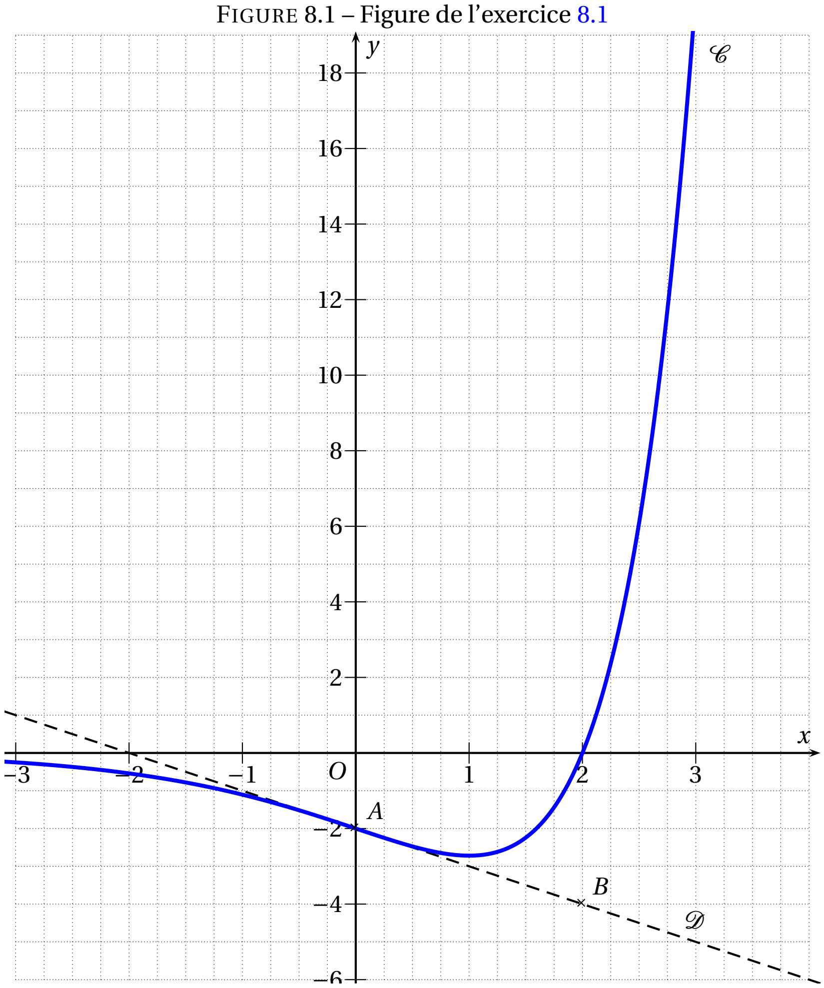
Fonction exponentielle

EXERCICE 8.1 (8 points)**.**

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 8.1 de la présente page (unités graphiques : 1 unité = 1,5 cm sur l'axe des abscisses, 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées) représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\,;\,-2)$ passe par le point $B(2\,;\,-4)$.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.1



1. Sans justification donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. On admet qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^x$. Déterminer la valeur exacte de a.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *(on rappelle que* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$*)*. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. (a) Montrer que $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   (c) Dresser le tableau des variations de f *(on indiquera les limites et les valeurs exactes des valeurs extrêmes)*.
3. (a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (c) Déterminer la valeur arrondie au dixième, en cm^2, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 8.2 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$ par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2 + 3$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0\,; +\infty[$, l'équation $f(x) = e^2$ admet :

   ❒ aucune solution ❒ une unique solution ❒ deux solutions

2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1,5)$ admet un coefficient directeur :

   ❒ strictement positif ❒ strictement négatif ❒ nul

3. $f[-\ln(2)]$ est égal à :

   ❒ $-2\ln(2) + 3$ ❒ $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ❒ $-2\ln(2) + 1$

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

   ❒ $y = 2x + 2$ ❒ $y = 2x + 1$ ❒ $x = 0$

Chapitre 8

$\ln(u)$ et $\exp(u)$

Sommaire

8.1 $\ln(u)$

Propriété 8.1. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u > 0$. Alors :*
- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
- *u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations*

Preuve. • On sait que $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = \ln(x)$, il vient $(\ln(u))' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$.
• Comme $u > 0$, $(\ln(u))'$ est du signe de u', donc u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

◊

Propriété 8.2. *Une primitive d'une fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f = \frac{u'}{u}$ où $u > 0$ est $F = \ln(u)$.*

Preuve. Cela découle de la propriété précédente. ◊

8.2 $\exp(u)$

Théorème 8.3. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*
- *La fonction définie par e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.*
- *Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $u'e^u$ admet une primitive de la forme $e^u + k$ où k est un réel quelconque.*

Preuve. • On sait que $(v(u))' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = e^x$, on a $v'(x) = e^x$ et donc $(e^u)' = u'e^u$.
• $(e^u + k)' = u'e^u$

◊

On a la conséquence suivante :

Propriété 8.4. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par e^u a les mêmes variations que u.*

Preuve. On sait que la dérivée de e^u est $u'e^u$ et que $e^u > 0$ donc le signe de $u'e^u$ est le même que celui de u'.
e^u a donc les mêmes variations que u. ◊

8.3 Exercices

8.3.1 Technique

EXERCICE 8.1.
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sur quel intervalle elle est définie puis calculer sa dérivée :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln(x) + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = x\ln(x)$
7. $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$
8. $f(x) = \ln\left[x(x+1)\right]$
9. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

EXERCICE 8.2.
Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
Calculer, de deux façons différentes, la dérivée de la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 8.3.
Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^3}\right)$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f.

EXERCICE 8.4.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f.

1. $f(x) = \frac{2}{2x-3}$ sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.
2. $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$.
3. $f(x) = \frac{5}{5-x}$ sur $]-\infty;5[$.
4. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$.
5. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $]0;+\infty[$.
6. $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1;+\infty[$.

EXERCICE 8.5.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{(x+1)^2}$ pour $x > -1$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$
2. En déduire l'expression de la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE 8.6.
1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$

EXERCICE 8.7.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$
3. $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
5. $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x$
6. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
7. $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x) + 1$
9. $f(x) = \frac{2}{8+\mathrm{e}^{-x}}$

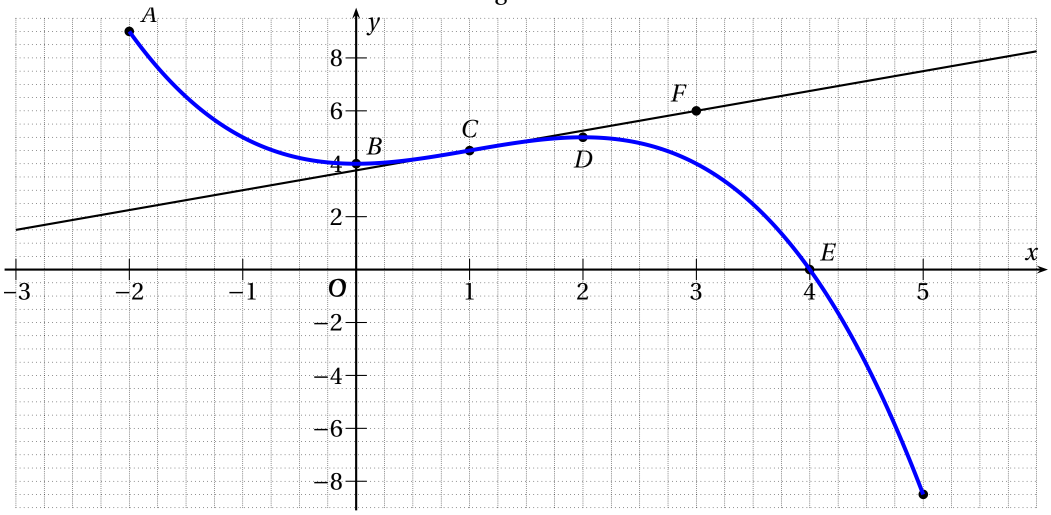
EXERCICE 8.8.
Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$
5. $f(x) = x\mathrm{e}^{(x^2)}$

8.3.2 Lectures graphiques

EXERCICE 8.9 (France – Juin 2 009)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2; 0]$ et $[2; 5]$ et croissante sur l'intervalle $[0; 2]$. On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2; 5]$.
La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée sur la figure 8.1 de la présente page dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2; 9)$, $B(0; 4)$, $C(1; 4,5)$, $D(2; 5)$ et $E(4; 0)$.
En chacun des points B et D, la tangente à la courbe Γ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3; 6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe Γ au point C.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.9

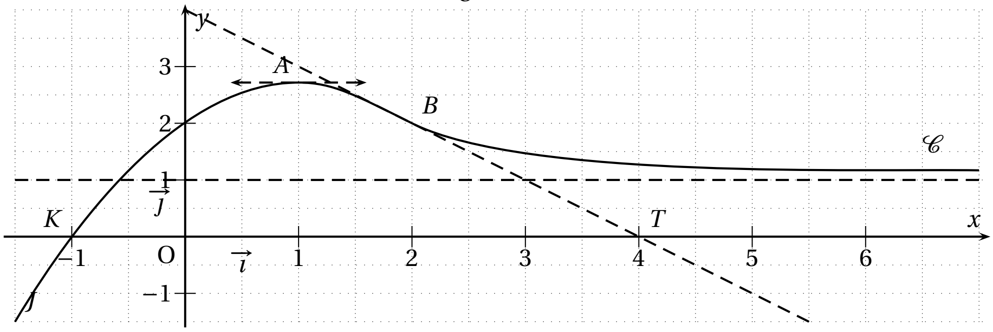


1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2; 5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2; 5]$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $[-2; 4[$.
   (b) Calculer $g(-2)$, $g(0)$ et $g(2)$.
   (c) Préciser, en le justifiant, le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-2; 4[$.
   (d) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4.
   Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.
   (e) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

EXERCICE 8.10.
Sur la figure 8.2 page suivante, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]-2; +\infty[$.
- Les points $J\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $K(-1; 0)$, $A(1; \mathrm{e})$ et $B(2; 2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4; 0)$.
- La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en -2.
- La fonction f est strictement croissante sur $]-2; 1[$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

1. (a) Donner les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp[f(x)]$ et Γ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer l'intervalle I de définition de g. Calculer les limites de g aux bornes de I.
   En déduire les asymptotes à la courbe Γ en précisant une équation pour chacune d'elles.
   (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.
   (c) Déterminer $g(2)$ et $g'(2)$, puis une équation de la tangente à Γ au point B′ d'abscisse 2.

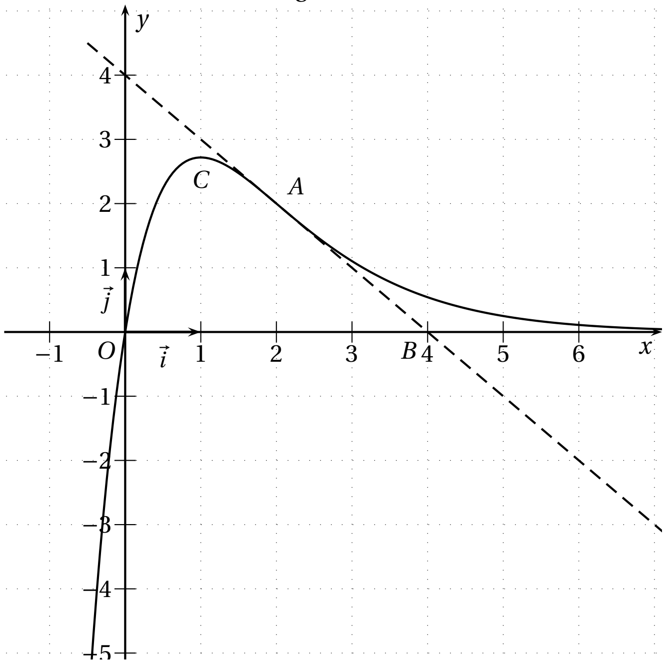
FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.10



EXERCICE 8.11.
On a représenté sur la figure 8.3 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ.
La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

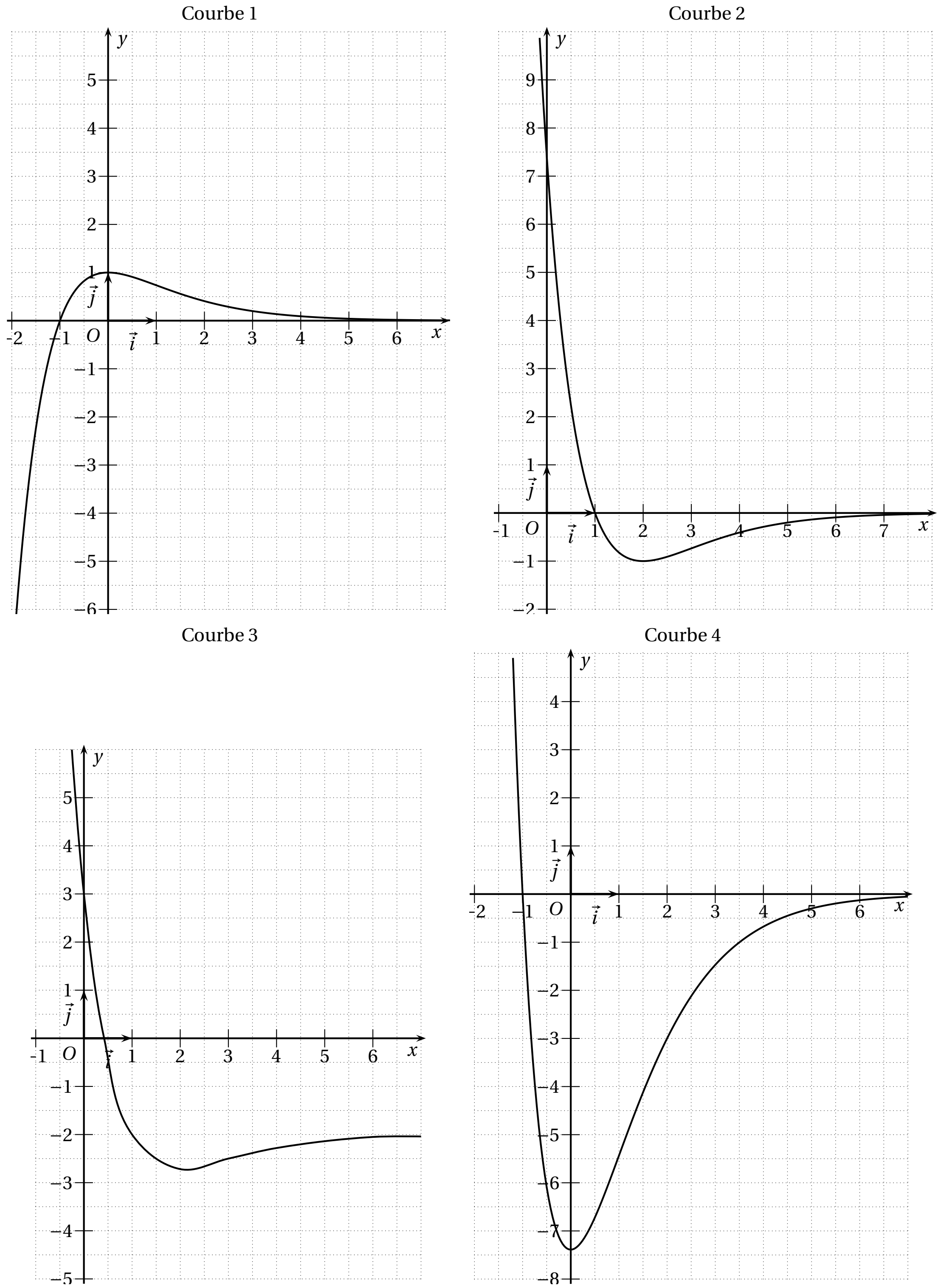
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques présentées sur la figure 8.4 page ci-contre, représente la fonction dérivée g' de g et une autre représente une primitive G de g sur ℝ.
   Déterminer la courbe associée à la fonction g' et celle associée à G ; vous justifierez votre choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.11



3. On suppose que la fonction g est la forme : $g(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$, où a, b et c sont des nombres réels.
   (a) Démontrer que $a = 0$ et que $c = -2b$.
   (b) Déterminer $g'(x)$ en fonction de b et de x.
   (c) Calculer alors les valeurs de b et de c.
4. Démontrer que la fonction G définie par $G(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{2-x}$ est une primitive de g sur ℝ.
5. Calculer l'aire K, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

FIGURE 8.4 – Courbes de l'exercice 8.11



EXERCICE 8.12 (Polynésie 2 006).
On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\,;+\infty[$, passe par les points O$(0\,;\,0)$ et A$(-1\,;\,0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x+1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$: $f(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\ln(x+2)$.
   (a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.
   (b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.
   (c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.
   (d) En déduire les valeurs de a, b et c.

8.3.3 Tableau de variations

EXERCICE 8.13 (D'après Nouvelle Calédonie 2 006).
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$

x	-3		-2		$+\infty$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln[g(x)]$.
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.
2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ qui est telle que : $G(-2) = 0$.
   Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

EXERCICE 8.14 (Amérique du Nord 2 007).
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Première partie

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b)$, où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = -x^2+2x-\ln(2x+1)$.
On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

8.3.4 Études de fonctions du type $\ln(u)$

EXERCICE 8.15 (France 2 007)**.**
Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

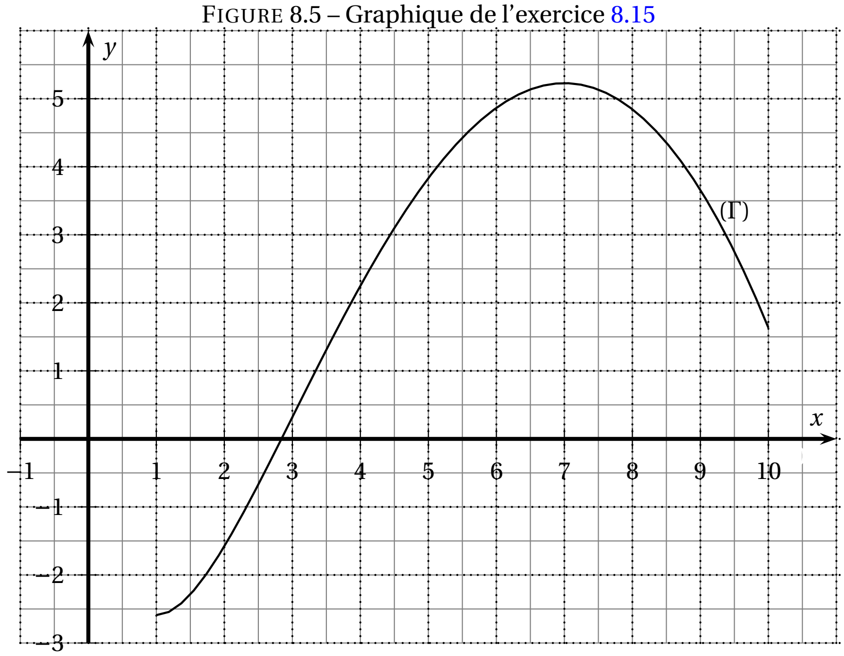
Partie I : Étude des coûts hebdomadaires de production

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;10]$ par : $C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}$. ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
   Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

Partie II : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par : $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1)$.
La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée par la figure 8.5 de la présente page.

FIGURE 8.5 – Graphique de l'exercice 8.15



1. (a) On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\,;10]$.
   En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.
   (b) Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).
2. (a) Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.
   (b) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

EXERCICE 8.16 (Pondichery – 2006).

Partie 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;9]$ par $f(x)=\frac{10}{1+x}-1$ et $g(x)=\frac{x}{2}$.

1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$.
2. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I}=\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte de I.

Partie 2

Un produit conditionné en boite est mis sur le marché. On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.

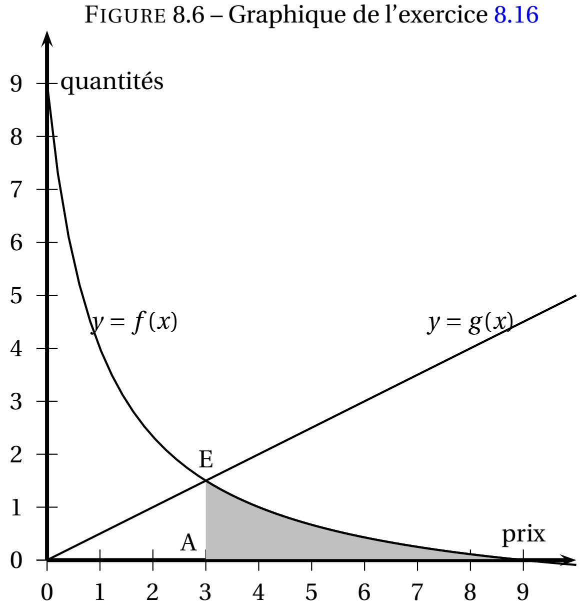
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.

On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.

Sur le graphique de la figure 8.6, de la présente page, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
   (a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boite ?
   (b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.
2. (a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.
   (b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3\leqslant x\leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

FIGURE 8.6 – Graphique de l'exercice 8.16



EXERCICE 8.17 (Centres étrangers – Juin 2 009)**.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.
Dans le repère orthonormal d'unité 2 cm de la figure 8.7 de la présente page, la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $\mathrm{A}\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

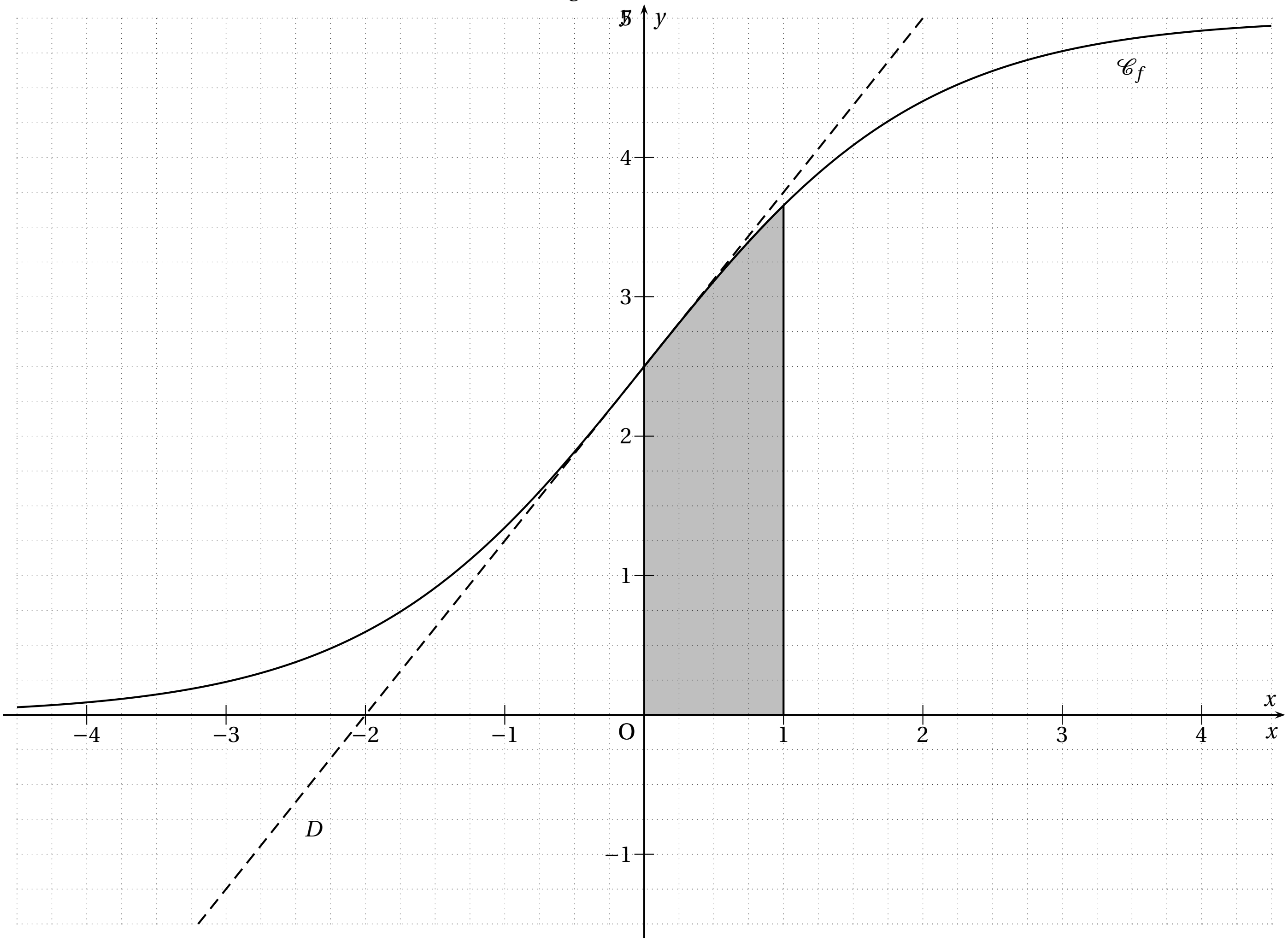
Première partie

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y = 5$. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{5\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^{2}}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. En utilisant le résultat de la question 2., déterminer une équation de la droite D.

Deuxième partie

1. Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.
2. Vérifier que $F(1) = 5\ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$.
3. Sur la figure 8.7 de la présente page, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer l'aire, en unités d'aire puis en cm^2, de ce domaine et en donner une valeur approchée arrondie au dixième.

FIGURE 8.7 – Figure de l'exercice 8.17



8.3.5 Études de fonctions du type e^u

Exercice 8.18 (France métropolitaine, Réunion – Septembre 2 009).
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right) e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) En remarquant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right) e^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
4. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
   Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0; 8]$ dans le plan.
5. (a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0; 8]$ de l'équation $f(x) = 0,4$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la plus grande des solutions de l'équation considérée à la question 5. a.

Exercice 8.19 (Polynésie – Septembre 2 007).
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0; +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0; 1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale.
   En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

1. (a) Vérifier que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0; 4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = -(x + 2)e^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0; 4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q + 1)e^{-q}$.

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

EXERCICE 8.20 (Métropole – La Réunion – Septembre 2 007).

La courbe ($\mathscr{C}$) donnée sur la figure 8.8 de la présente page, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3\,;\,\mathrm{e})$ et $B(4\,;\,2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

Partie I : Lectures graphiques

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3\,;\,10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

Partie II : Étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 8.8, est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

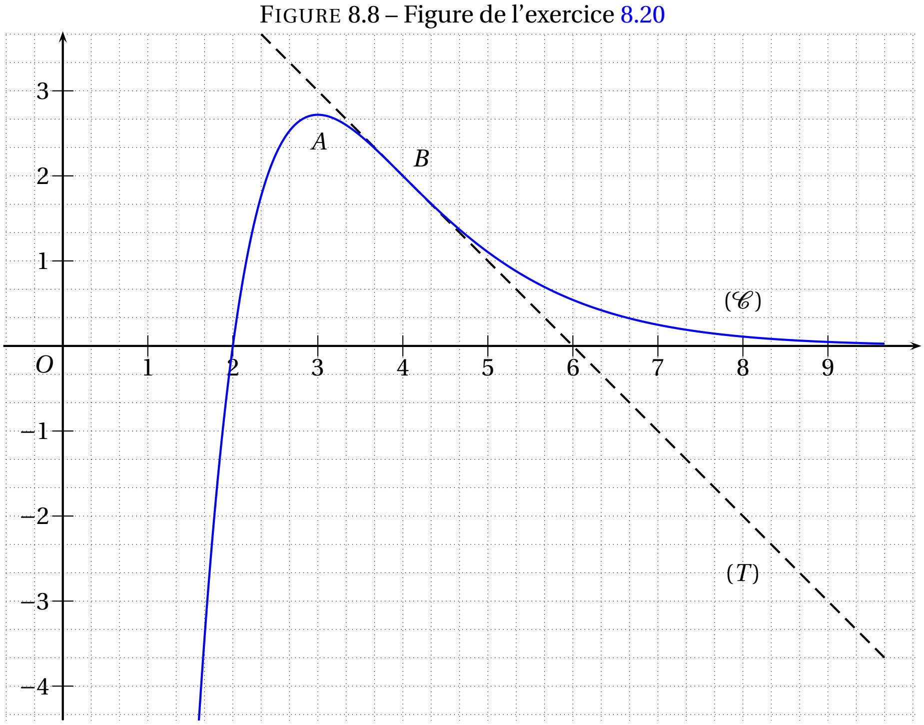
1. (a) Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
   (b) On donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2\,;\,10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.
   Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
   La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$ est le nombre m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie III : Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8\,;\,4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1'€).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

FIGURE 8.8 – Figure de l'exercice 8.20



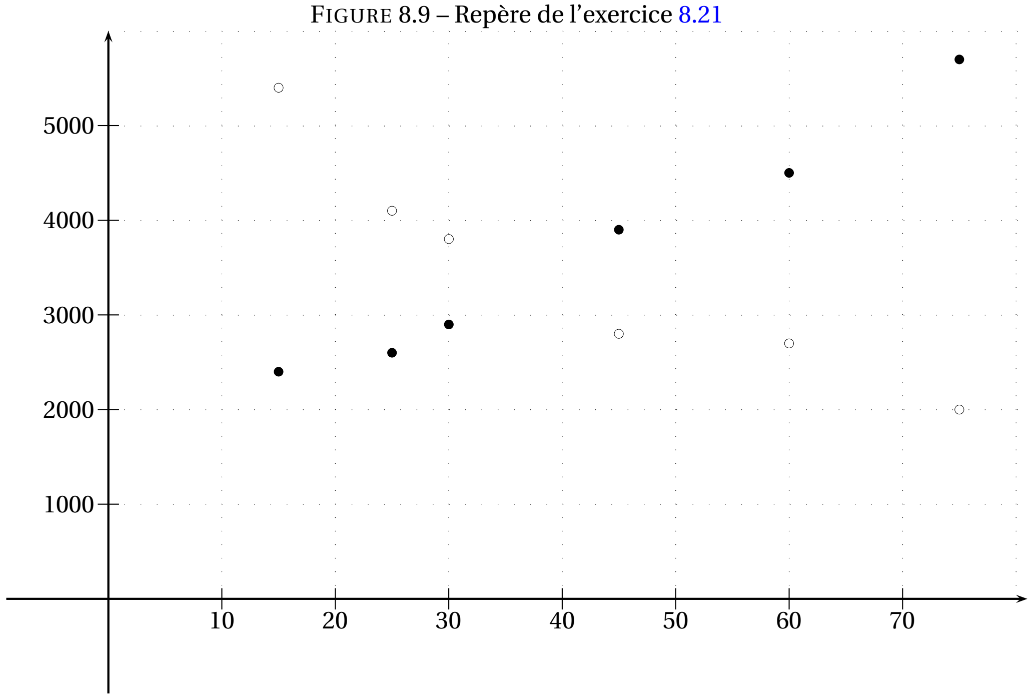
8.3.6 Ajustements non affines

EXERCICE 8.21.
Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On désigne par x le prix d'un livre, par p le nombre de livres disponibles et par q le nombre de livres demandés. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
q	5 400	4 100	3 800	2 800	2 700	2 000

On a tracé sur la figure 8.9 de la présente page les nuages de points $(x_i\,;\,p_i)$ et $(x_i\,;\,q_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

FIGURE 8.9 – Repère de l'exercice 8.21



1. On pose $y = \ln p$.
   (a) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au millième) :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
$\ln p$						

   (b) *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*
   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au centième*).
   En déduire une expression de p en fonction de x.
   (c) En utilisant cette expression, donner une estimation du nombre de livre disponibles pour un prix unitaire de 40 € (*résultat arrondi à la centaine*).
2. On pose $z = \ln q$ et on admet l'égalité suivante : $z = -0,02x + 8,73$.
   En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 2 800 livres (*résultat arrondi à l'unité*).
3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté x_0.
   (a) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.
   (b) Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?

EXERCICE 8.22 (Centres étrangers – Juin 2 009)**.**
Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$de la figure 8.10 page suivante. Les unités graphiques de ce repère sont 1 unité = 1 cm en abscisse et 4 unités = 1,5 cm en ordonnée.
Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

Première partie
En première approximation, on envisage de représenter y en tant que fonction affine de x.
La droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés admet pour équation $y = -1,5x + 16,5$ dans laquelle les deux coefficients sont des valeurs arrondies au dixième.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point dans le repère de la figure 8.10 page suivante.
2. Tracer la droite D dans le repère de la figure 8.10 page suivante.
3. En considérant cet ajustement affine, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Deuxième partie
On admet que la courbe tracée sur la figure 8.10 page suivante représente un ajustement exponentiel de y en fonction de x et que son équation est de la forme $y = k\text{e}^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013.
2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

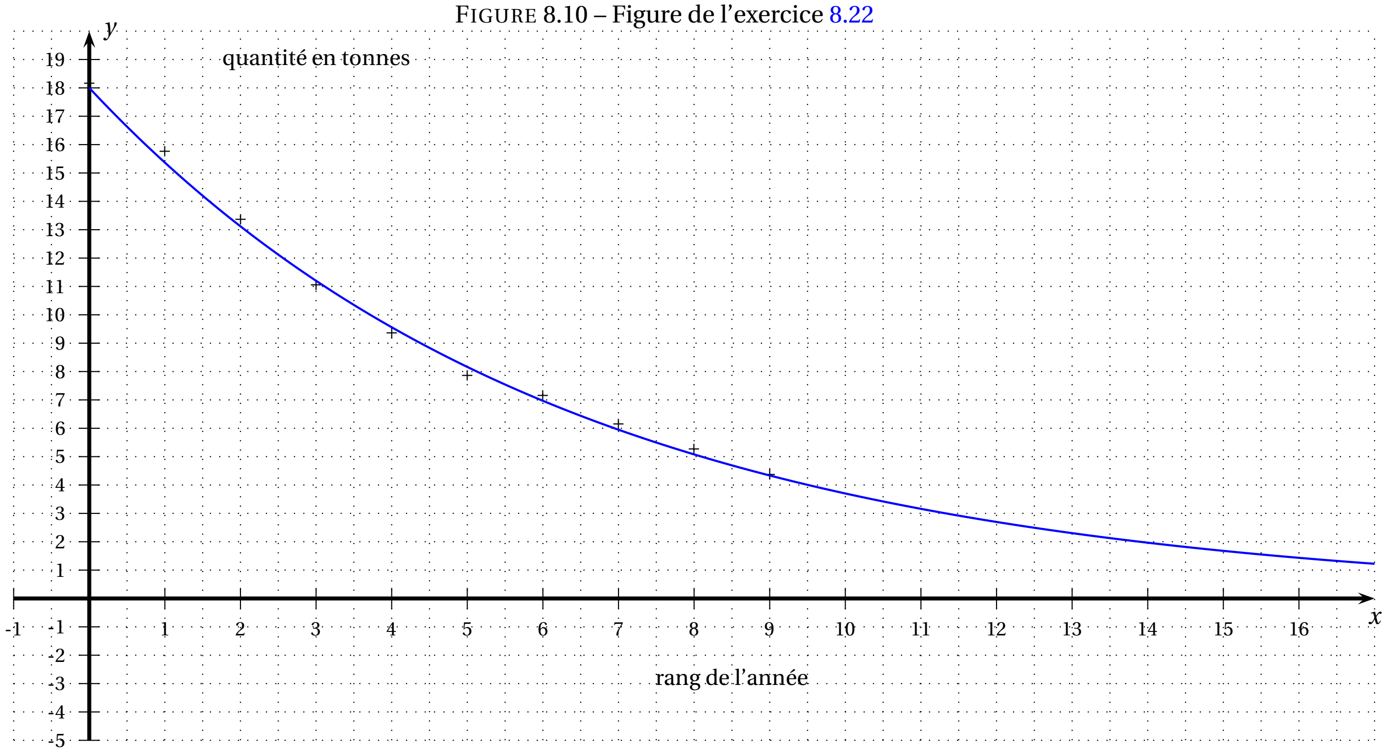
Troisième partie
On effectue le changement de variable $z = \ln y$ et on pose $z_i = \ln y_i$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant une valeur approchée de chaque résultat arrondie au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i										

2. À l'aide de la calculatrice et en donnant une valeur approchée de chaque coefficient arrondie au centième, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\text{e}^{px}$ et retrouver ainsi, en arrondissant k au dixième, les coefficients k et p calculés à la question 2. de la deuxième partie.

FIGURE 8.10 – Figure de l'exercice 8.22



EXERCICE 8.23 (Polynésie – Juin 2009)**.**

Le tableau suivant donne l'évolution du marché des capteurs solaires installés en France métropolitaine entre 2000 et 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
Surface de capteurs solaires installés en milliers de m^2 : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	6	18	23	39	52	121	220	253

Source : ENERPLAN (*Association professionnelle de l'énergie solaire*)

L'objectif gouvernemental est d'atteindre un marché d'un million de m^2 en 2010.

1. (a) Calculer le pourcentage d'augmentation de la surface des capteurs solaires installés entre les années 2006 et 2007.

   (b) Si ce pourcentage reste le même d'année en année jusqu'en 2010. l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

2. (a) Sur une feuille de papier milimétré, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$; $1 \leqslant i \leqslant 8$, dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour une année eu abscisse et en ordonnée 1 cm pour 20 milliers de m^2 de capteurs solaires installés).

   La forme du nuage suggère de faire un ajustement exponentiel.

   Pour cela on pose $z_i = \ln(y_i)$.

   (b) Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où les valeurs z_i seront arrondies au centième.

Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 8$	1,79							

   (c) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au centième.

   (d) On suppose que l'évolution se poursuit de cette façon jusqu'en 2010.

   À l'aide de cet ajustement exponentiel, estimer en m^2 la surface de capteurs solaires installés en 2010.

   Si l'évolution se poursuit selon ce modèle, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

EXERCICE 8.24 (Antilles – Guyane – 2008).
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

Partie A : un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série $(x_i\ ;\ y_i)$.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent *(aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis à l'unité).*
3. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007.

Partie B : un ajustement exponentiel.
On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés *(aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millième).*
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année.
4. En prenant l'approximation $y \approx 57,1\mathrm{e}^{0,224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007.

Partie C : comparaison des ajustements.
En 2007, il y a eu 280 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ?
Justifier la réponse.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

8.3.7 Repère semi-logarithmique

EXERCICE 8.25.
On considère deux fonctions f et g croissantes données par les tableaux de valeurs :

x	0	2,7	4	5,4	7,4	9,1
$f(x)$	1	3	5	9	20	40

x	0	2,2	2,8	3,1	4,5	7
$g(x)$	1	5	8	10	20	50

1. Représenter les fonctions f et g dans le repère de la figure 8.11 page suivante.
2. Le repère de la figure 8.12 page ci-contre est appelé repère semi-logarithmique.
La graduation sur l'axe (Oy) n'est pas « régulière ». Elle est réalisée proportionnellement au logarithme népérien. Par exemple un point d'ordonnée $y=1$ est placé à la hauteur $z=\ln 1=0$ unités graphiques, un point d'ordonnée $y=10$ est placé à la hauteur $z=\ln 10\approx 2,3$ unités graphiques (et ici 1 unité graphique = 2 cm).
Remarque. Dans le cadre de cet exercice, pour une meilleure lecture des hauteurs en unités graphiques, un axe a été ajouté à droite.
Pour l'utilisation d'un tel repère on pourra s'aider du tableau suivant :

Point	A	B	…
x			…
y			…
$z=\ln y$			…

Où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique.
(a) Placer dans ce repère les points suivants :
   - $A(2\,;1,5)$
   - $B(5\,;15)$
   - $C(5\,;19)$
   - $D(12\,;175)$

(b) Déterminer les coordonnées des points E, F, G et H.
Indication : on mesurera z avec une règle avant de déterminer y par le calcul.
(c) Représenter les courbes de f et de g dans ce repère. Que remarque-t-on pour la courbe de f ?
(d) Représenter dans les deux repères les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, respectivement, $h(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $l(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$. Que remarque-t-on ?
(e) Une fonction k est représentée dans le repère semi-logarithmique une droite passant par les points $(0\,;1)$ et $(14\,;1\,000)$.
   i. Tracer cette droite.
   ii. À l'aide d'une règle compléter la ligne z du tableau ci-dessous et compléter par la ligne y par le calcul.

x	0	1	3	5	10
z					
$y=\ldots\ldots$					

   iii. Représenter alors k dans le premier repère.

(f) Démontrer que lorsqu'une fonction positive est représenté dans un repère semi-logarithmique par une droite passant par l'origine, cette fonction est de la forme $f(x)=\mathrm{e}^{kx}$.
Indication : On posera $z=mx$, où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique et on déterminera alors une expression de y en fonction de x.
En utilisant l'égalité $f(4)=5$ donner l'expression de $f(x)$.
Déterminer l'expression de $k(x)$.
(g) Démontrer que lorsqu'une fonction positive représentée dans un repère semi-logarithmique par une droite d'équation $z=mx+p$ où z est la hauteur en unités graphiques, cette fonction est de la forme $f(x)=K\mathrm{e}^{kx}$.
Exprimer alors K et k en fonction de m et p.

FIGURE 8.11 – Premier repère de l'exercice 8.25

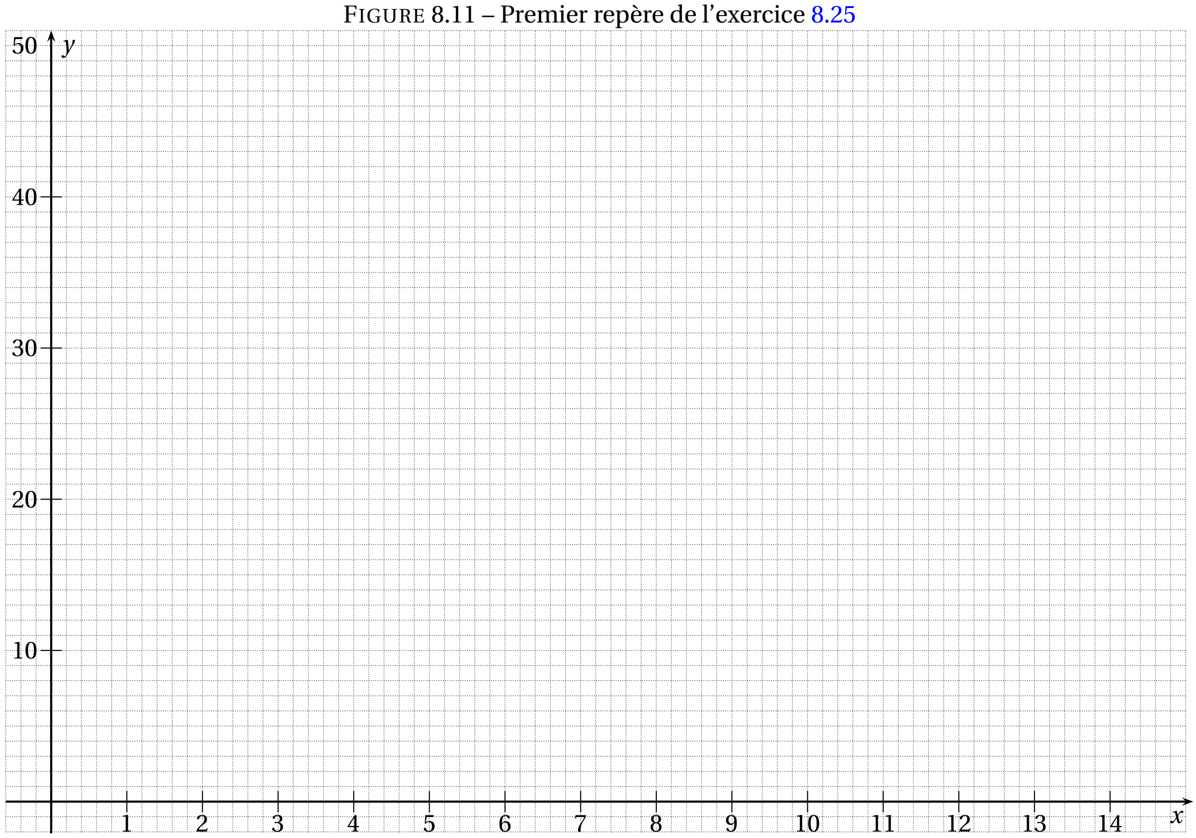
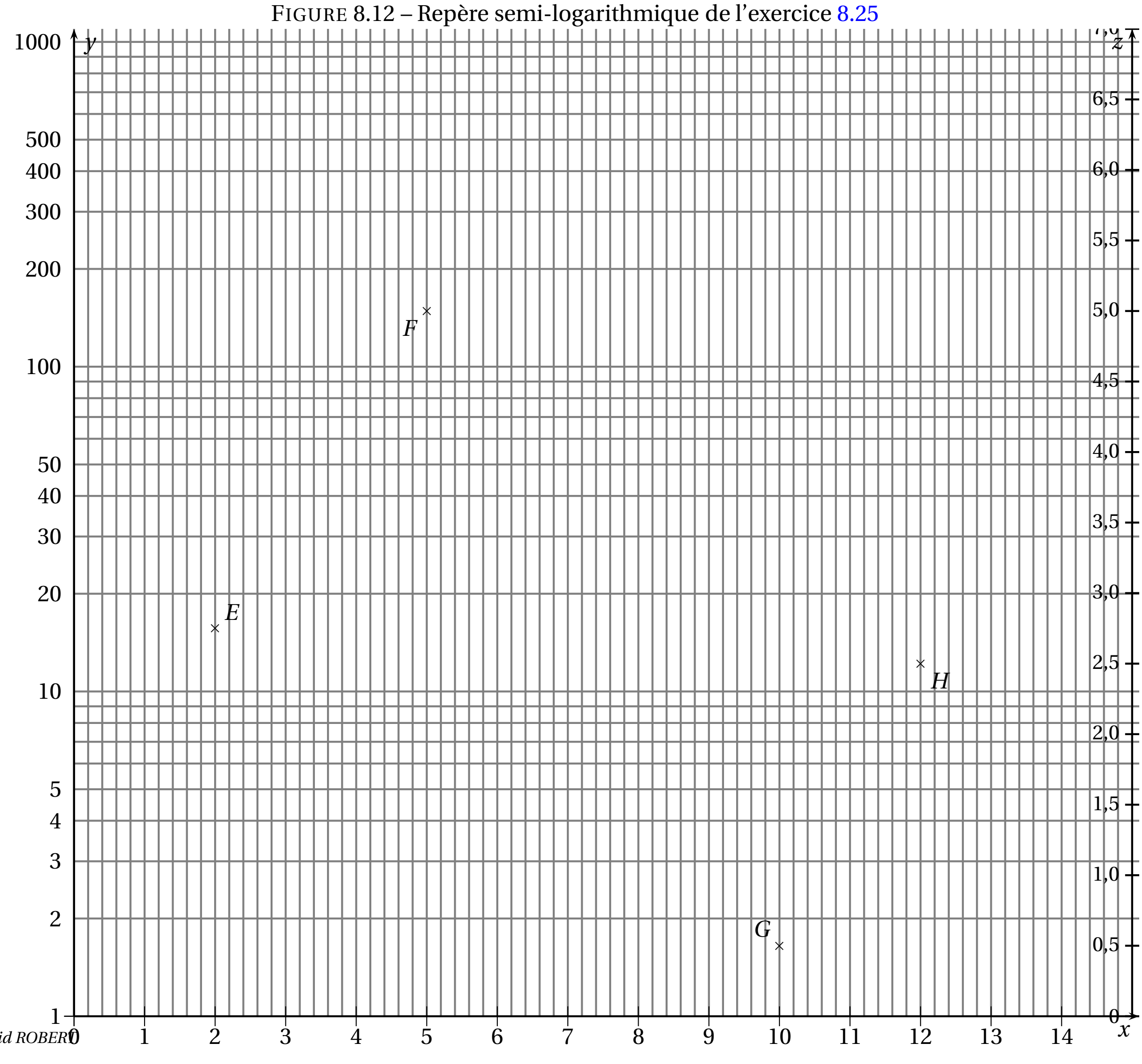


FIGURE 8.12 – Repère semi-logarithmique de l'exercice 8.25



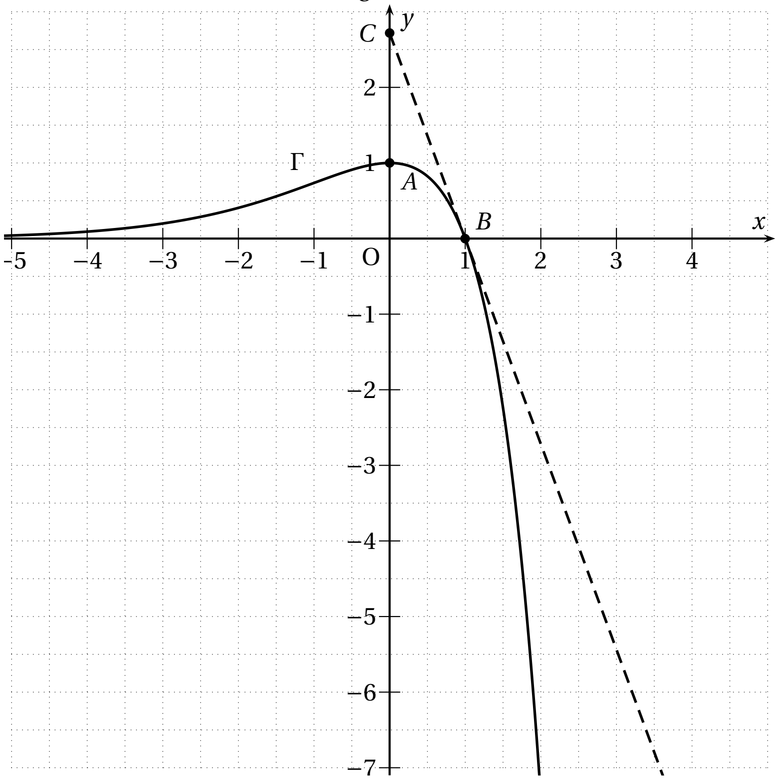
Devoir surveillé n°9

$\ln u$, $\exp u$

EXERCICE 9.1 (10 points)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On note e le nombre tel que $\ln(e) = 1$.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur la figure 9.1 de la présente page.
On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(0;1)$;
- la droite (BC) est la tangente à la courbe Γ au point $B(1;0)$, C étant le point de coordonnées $(0;e)$;
- la fonction f est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$;
- la courbe Γ admet, en $-\infty$, l'axe des abscisses comme asymptote ;
- la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.

FIGURE 9.1 – Figure de l'exercice 9.1



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$;
   (b) le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ;
   (c) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \exp[f(x)]$ déinie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (b) Déterminer les variations de g (*on répondra à cette question sans faire de tableau de variations*).
   (c) Déterminer les valeurs exactes de $g(0)$, $g(1)$, $g'(0)$ et $g'(1)$.
   (d) Dresser le tableau des variations de g.
3. On admet que la fonction f a pour expression $f(x) = (-x+1)e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto (-x+2)e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de f.
   (b) On appelle $\mathscr{D}$ la quantité $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
      i. Représenter $\mathscr{D}$ en rouge sur la figure.
      ii. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{D}$.

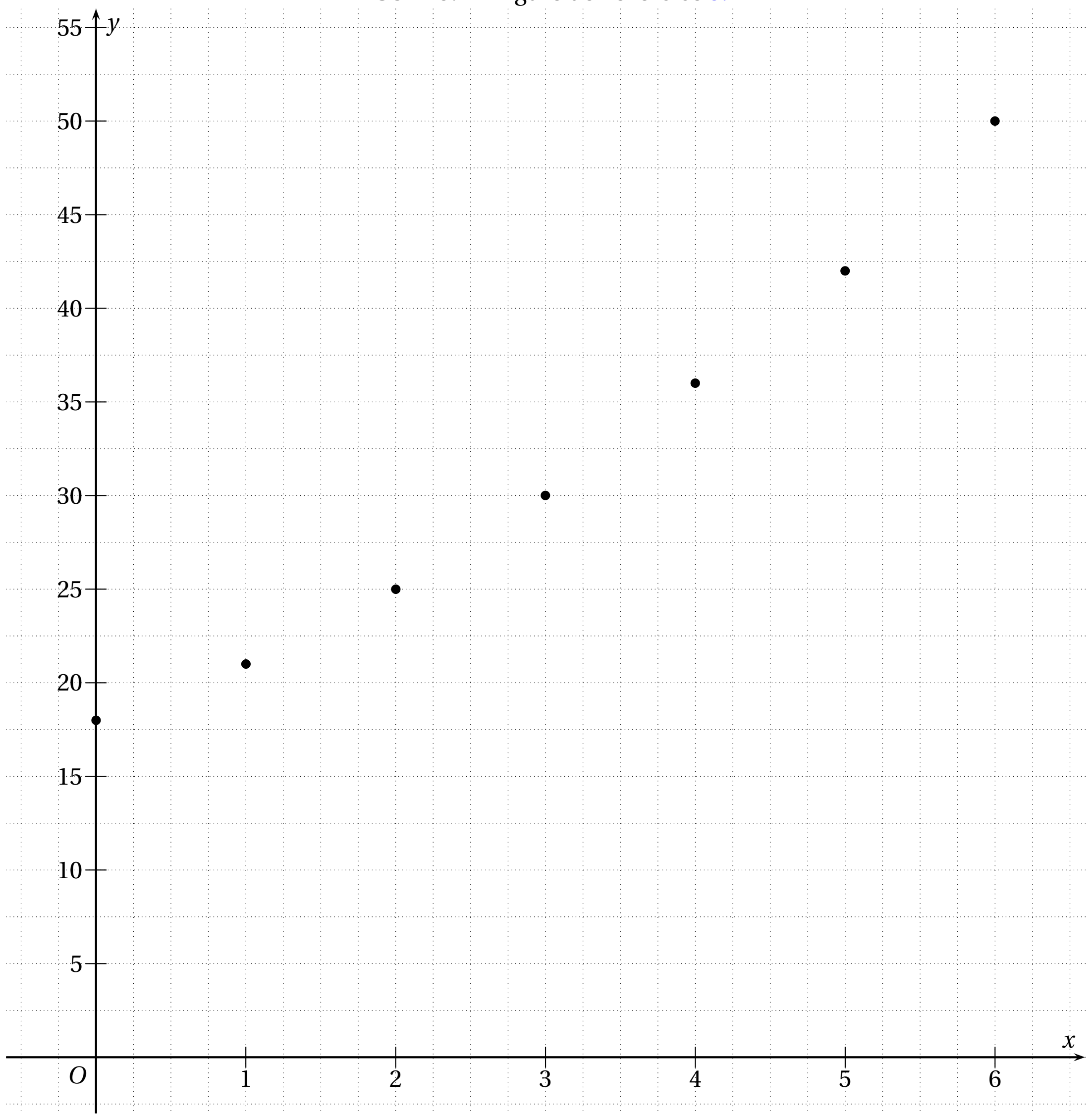
Exercice 9.2 (10 points).

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1 970 et 2 000.

Année	1 970	1 975	1 980	1 985	1 990	1 995	2 000
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	5	6
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté sur la figure 9.2 de la présente page : le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.

Figure 9.2 – Figure de l'exercice 9.2



On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau *(les résultats seront arrondis au millième)* :

x	0	1	2	3	4	5	6
z	2,890						

2. *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*
À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés *(les coefficients seront arrondis au millème).*
3. En déduire y en fonction de x.
4. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{px}$ en arrondissant k et p au millième.
5. Pour la suite nous prendrons l'approximation $y = 17,8e^{0,17x}$ et nous supposerons qu'elle reste valable pour les années suivantes.
   (a) Donner une estimation de la population de la ville en 2 005, arrondie à l'unité.
   (b) Donner une estimation de l'année où la population dépassera 100 000 habitants.

Chapitre 9

Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

Sommaire

9.1 Activité

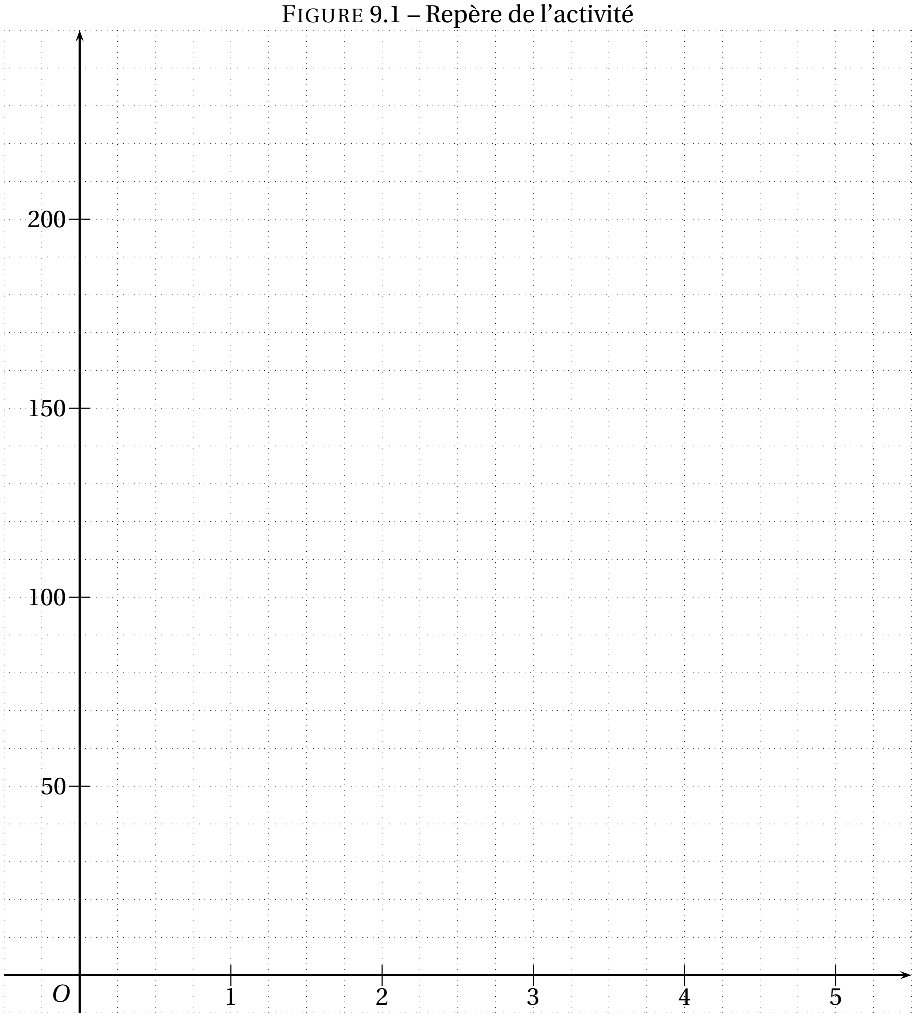
Max a placé le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000 un capital de 100 € à intérêts composés à un taux annuel de 20 % [1]. Il peut à tout moment retirer le capital augmenté des intérêts produits.
On appelle C_n le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2000 + n$. Ainsi $C_0 = 100$.

1. (a) Déterminer C_1, C_2, C_3 et C_4. De quelle nature est la suite (C_n) ? On précisera ses caractéristiques.
   (b) Représenter la suite dans le repère de la figure 9.1 page suivante.
   On rappelle que la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage constitué des points $(n\,;\,u_n)$.
   Les points sont-ils alignés ?
2. Le 1$^{\text{er}}$ juin 2003, un imprévu oblige Max à retirer l'intégralité de son capital. La banque lui reverse alors sur son compte 189,29 €. Max est surpris car ce montant ne lui semble correspondre à rien. Après renseignement, il apprend que la banque a transformé son taux annuel de 20 % en un taux mensuel équivalent. Max n'a pas bien compris mais n'a pas osé insister et il vous demande d'essayer de déterminer ce taux.
   (a) Soit t un taux mensuel quelconque.
      i. Que devient un capital C placé à ce taux mensuel au bout d'un an ?
      ii. En déduire que le taux mensuel t appliqué par la banque est solution de l'équation :
      $$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2$$
      iii. Déterminer alors une valeur approchée de t à 10^{-3} près et vérifier que ce taux donne bien la somme versée par la banque.
   (b) Étienne, un ami de Max, après avoir pris connaissance de votre travail, vous demande s'il n'y a pas plus simple. « En effet, regarde : au bout de trois ans, le capital de Max est $100 \times 1{,}2^3$, au bout de quatre ans, il est de $100 \times 1{,}2^4$ et bien au bout de trois ans et demi, il doit être de $100 \times 1{,}2^{3{,}5}$. Non ? »
   Julie est intriguée par la proposition d'Étienne : « Je ne comprend pas ce que veut dire "1,2 exposant 3,5" ». « Moi non plus, répond Étienne, mais ça doit être un peu comme la fonction exponentielle sauf que ce n'est pas e mais 1,2 ».
      i. Regarder, à la calculatrice, si le calcul proposé par Étienne donne la somme versée par la banque.
      ii. Écrire $1{,}2^{3{,}5}$ sous la forme e^{β} où β est un réel (valeur exacte demandée).
      On rappelle que, pour tout réel $a > 0$, $a = e^{\ln a}$.

1. Les taux d'intérêts sont en général plutôt de l'ordre de 3 à 4 %, la situation de l'activité est donc purement fictive.

iii. De la même manière, écrire $1,2^x$ sous la forme $e^{u(x)}$ où $u(x)$ est une fonction de x et représenter cette fonction dans le repère de la figure 9.1.
Que constate-t-on ?

FIGURE 9.1 – Repère de l'activité



9.2 Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

9.2.1 Définition

Définition 9.1. Soit a un réel strictement positif.
On appelle *fonction exponentielle de base a*, la fonction f_a (notée parfois $\exp_a$) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = e^{x\ln(a)}$$

On a vu que pour tout entier n et tout réel a strictement positif, on avait $n\ln a = \ln(a^n)$. On admettra que cela est vrai pour tout réel x. Ainsi, pour tout réel x, $x\ln a = \ln(a^x)$, et $e^{x\ln(a)} = e^{\ln(a^x)} = a^x$. On a alors :

Propriété 9.1. *Soit a un réel strictement positif.*
Alors :

$$f_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$$

9.2.2 Propriétés algébriques

Les règles de calcul, connues dans le cas d'exposants entiers, s'étendent aux exposants réels non entiers. On a alors :

Propriété 9.2. *Pour tous réels a et b strictements positifs et pour tous réels x et y, on a :*

- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^x b^x = (ab)^x$

Preuve. Toutes ces propriétés se démontrent en revenant à la définition $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$. Ainsi :
$a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a + y\ln a} = \mathrm{e}^{x\ln a}\mathrm{e}^{y\ln a} = \mathrm{e}^{\ln(a^x)}\mathrm{e}^{\ln(a^y)} = a^x a^y$.
Les autres sont laissées en exercice au lecteur. ◇

9.2.3 Cas particulier : racines n-ièmes d'un réel a $(a>0)$

Définition 9.2. Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul. Alors le nombre $b = a^{\frac{1}{n}}$ est l'unique nombre positif tel que $b^n = a$. On l'appelle la racine n-ième de a et on le note $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Remarque. Dans le cas de la racine "deuxième", on retrouve la racine carrée et on peut omettre le 2 dans la notation $\sqrt[2]{a}$.

Exemple 9.1. Dans l'activité au point 2(a)ii, où $t \geqslant 0$, on peut résoudre l'équation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}2 \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100} &= \sqrt[12]{1{,}2}(\text{ou } = 1{,}2^{\frac{1}{12}})\\ \Leftrightarrow \frac{t}{100} &= \sqrt[12]{1{,}2}-1\\ \Leftrightarrow t &= 100\left(\sqrt[12]{1{,}2}-1\right) \approx 1{,}531\end{aligned}$$

9.2.4 Étude des fonctions $x \mapsto a^x (a>0)$

Lorsque $a=1$, on a $a^x = 1^x = 1$. La fonction est donc constante. On écartera ce cas trivial pour la suite.

Ensemble de définition

Comme $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$, les fonctions expontielles de base a sont définies pour tout réel x, donc sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes

$a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ or
- $\ln a$ négatif $\Leftrightarrow \ln a < 0 \Leftrightarrow \ln a < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (on rappelle que $a>0$) ;
- $\ln a$ nul $\Leftrightarrow a = 1$;
- $\ln a$ positif $\Leftrightarrow \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

Donc :
- si $0<a<1$,
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0^+$ donc $\lim\limits_{xto+\infty} a^x = 0^+$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{xto-\infty} a^x = +\infty$;
- si $a=1$, la fonction est constante, égale à 1 ;
- si $a>1$,
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+$

Variations

$a^x = \mathrm{e}^{x\ln a} = \mathrm{e}^{u(x)}$ où $u(x) = x\ln a$ et $u'(x) = \ln a$.
Donc $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = \ln a \times \mathrm{e}^{x\ln a} = \ln a \times a^x$.

Comme $\mathrm{e}^X > 0$, $(a^x)'$ est du signe de $\ln a$ (vu ci-dessus). Les fonctions exponentielles de base a $(a>0)$ sont donc :
- décroissantes quand $0<a<1$;
- constantes quand $a=1$;
- croissantes quand $a>1$.

Tableaux de variations

Les tableaux de variations page suivante résument les paragraphes qui précèdent.

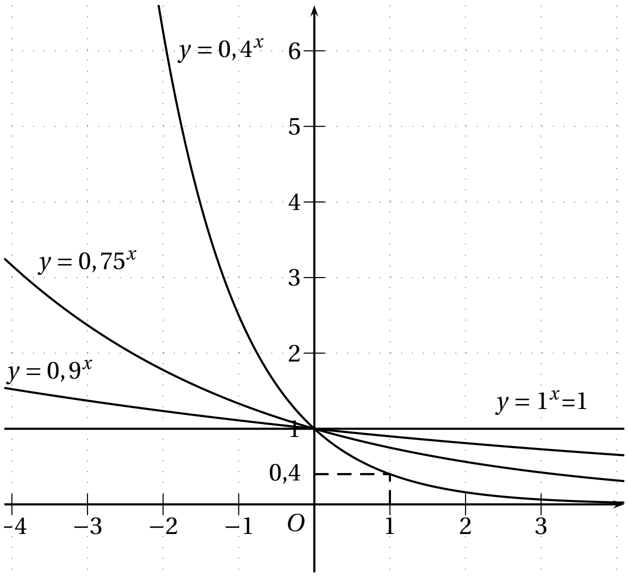
TABLE 9.1 – Tableaux de variations et courbes

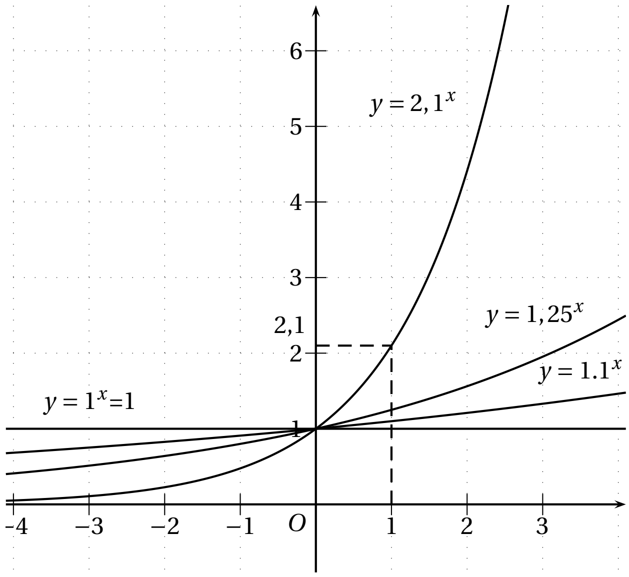
$0<a<1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0^+

$a>1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$+$	
a^x	0^+ ↗	$+\infty$





Courbes représentatives

Trois types de courbes, donc, selon si $0<a<1$, si $a=1$ ou si $a>1$. Plusieurs exemples sont donnés sur la figure de la présente page.
On remarquera que, pour tout réel a ($a>0$) :

- $a^0=1$ et donc toutes les courbes passent par le point $(0;1)$;
- $a^1=a$ et donc toutes les courbes passent par le point $(1;a)$.

Croissances comparées

Le théorème suivant (qu'on admettra) règle les deux cas d'indétermination :

Théorème 9.3. • *Si* $a>1$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=+\infty$.
• *Si* $0<a<1$ *alors* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x}=-\infty$.

Remarque. Les cas suivants sont aussi des cas d'indétermination :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{e^x}$ avec $a>1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a^x}{e^x}$ avec $0<a<1$

Cependant, en posant $a^x=e^{x\ln a}$, il vient $\frac{a^x}{e^x}=\frac{e^{x\ln a}}{e^x}=e^{x\ln a-x}=e^{x(\ln a-1)}$ dont les limites en l'infini ne sont plus une forme indéterminée.

Lien avec les suites géométriques

On rappelle qu'une suite géométrique est une suite définie par récurrence par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1}=q\times u_n$ où q est la raison de la suite.
On a alors, pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n$.
On a aussi : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=1^{\text{er}}\text{terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Propriété 9.4. *Soit (v_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$.*
- *Si $0 < q < 1$, (v_n) est décroissante ; on parle de décroissance exponentielle.*
- *Si $q = 1$, (v_n) est constante.*
- *Si $q > 1$, (v_n) est croissante ; on parle de croissance exponentielle.*

9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement : $f(x) = 3^x$ et $g(x) = 0,5^{x+3}$.

1. Déterminer les limites de ces deux fonctions en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer les variations de ces deux fonctions et dresser leur tableau de variations.
3. (a) Afficher les courbes représentatives de ces deux fonctions sur la calculatrice.
   (b) Conjecturer l'existence de points d'intersection.
   (c) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 9.2.
Une personne se demande en combien de temps son capital C_0 doublera en le laissant placé aux taux annuels de t %. Calculer le temps qu'il faut pour que le capital C_0 double dans chacun des cas suivants :

- $t = 1$
- $t = 2$
- $t = 3$
- $t = 5$
- $t = 6$

EXERCICE 9.3.
Un banquier propose à son client un placement au taux annuel de 3,5 % sur 10 ans. On note S la somme obtenue par ce client au bout de 10 ans, s'il souscrit ce placement.

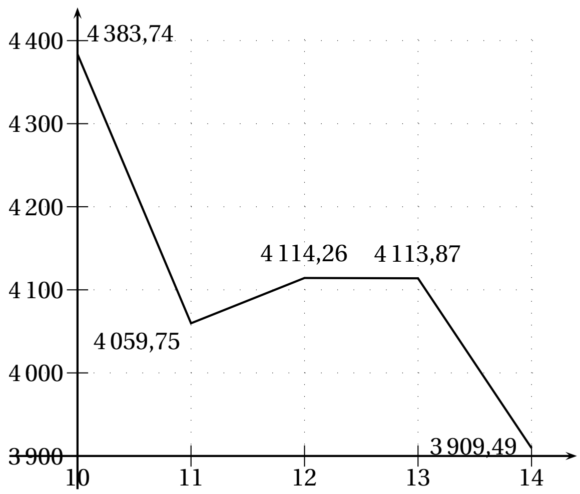
1. Quel taux le client doit-il négocier avec son banquier pour obtenir au moins la même somme S en 7 ans et demi ?
2. Quelques mois plus tard, le placement proposé par le banquier est au taux de 2,5 %.
   Pendant combien de temps le client devra-t-il placer le même capital pour obtenir la même somme ?

EXERCICE 9.4.
Le CAC 40 est un indice de valeurs françaises, concernant les 40 plus importantes valeurs cotées à la bourse de Paris (Michelin, France Télécom, Alcatel, etc.). Le Dow Jones est un équivalent à New York du CAC 40.

Voici un extrait du *Journal des Finances* du 15 au 21 septembre 2 001 :

Cotations : Violente rechute *par* ROLAND LASKINE

Après le choc du 11 septembre qui a fait plonger, mardi, toutes les places boursières mondiales, les investisseurs se sont ressaisis, refusant de céder au marasme ambiant. Vendredi, la crainte d'une reprise des cotations en forte baisse à New York dès le début de la semaine prochaine a tétanisé les marchés. Ceux-ci sont de nouveau violemment repartis à la baisse en Europe. Les actions qui ont subi les plus fortes attaques ne sont pas les technologiques, mais des valeurs plus traditionnelles appartenant au secteur des assurances, des transports, du luxe et des loisirs. Dès lundi, tous les yuex seront braqués sur les trente valeurs de l'indice Dow Jones, qui constitue le désormais baromètre de la tendance sur tous les marchés mondiaux.



1. C_i représente l'indice CAC 40 le $(10+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 4)$. Que valent C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ?
2. t_i est le pourcentage de variation du CAC 40 du $(10+i)$ septembre 2 001 au $(11+i)$ septembre 2 001 $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. Calculer t_0, t_1, t_2, t_3.
3. On appelle pourcentage journalier moyen de variation du cours du CAC 40, le pourcentage t_j % tel que, si le cours du CAC 40 avait varié chaque jour de ce taux constant t_j %, son cours serait encore C_4 le 14 septembre 2 001.
   (a) Vérifier que $C_0\left(1+\frac{t_j}{100}\right)^4 = C_4$.
   (b) Calculer l'arrondi au dixième de t_j. En donner une interprétation économique.

Exercice 9.5 (Amérique du nord – 2 005)**.**
Les deux questions sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.
Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1. On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.
2. La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.
   (a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?
   (b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

Exercice 9.6.
On prévoit qu'une automobile, achetée neuve, subit une décote de 20 % la première année d'utilisation, puis une nouvelle décote de 15 % la deuxième année, et enfin une décote de 10 % chacune des années suivantes.

1. Une automobile est achetée neuve 20 000 €. Quelle est sa valeur, à un euros près :
   (a) au bout d'un an ; (b) au bout de 2 ans ; (c) au bout de 4 ans.
2. Quel est le taux annuel moyen de décote si l'automobiliste garde sa voiture 4 ans ?
3. Une automobile achetée neuve au prix de P_0 (en euros). On appelle P_n la valeur de cette automobile, en euros, au bout de n années.
   (a) Exprimer P_n en fonction de P_0, lorsque $n \geqslant 3$.
   (b) Au bout de 4 ans, la valeur d'une automobile est 8 262 €. Quel était à l'euro près, son prix initial ?
   (c) Quel est le plus petit entier n tel que : $0,68 \times (0,9)^{n-2} \leqslant 0,5$?
   Donner une interprétation de ce résultat.
   (d) Une voiture a été achetée en l'an 2 000. À partir de quelle année, sa valeur sera-t-elle pour la première fois, inférieure ou égale à la moitié du prix neuf ?

Exercice 9.7.
Le tableau suivant donne l'évolution du pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998. On désigne par x le rang de l'année et par y le pourcentage de logiciels piratés.

année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998
rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
pourcentage y_i	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1. Représenter l'ensemble des points $M_i\,(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal tel que :
   - 0,5 cm représente un an sur l'axe des abscisses ;
   - 0,5 cm représente 5 % sur l'axe des ordonnées.
2. Cette évolution est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 85,115(0,905)^x$, où x désigne le rang de l'année, et y le pourcentage de logiciels piratés.
   (a) Étudier le sens de variation de f.
   (b) Représenter $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f, dans le même repère que celui utilisé au 1.
   (c) Peut-on dire que le pourcentage de logiciels piratés en France de 1 990 à 1 998 a une décroissance exponentielle ? Pourquoi ?
   (d) Donner une estimation du pourcentage de logiciels piratés en France en 2 004. Vérifier graphiquement.

Exercice 9.8 (Remboursement d'emprunt)**.**
Une somme C, empruntée au taux annuel t, est remboursée en n annuités A égales.
La formule qui relie C, t, n et A est :

$$C = A \times \frac{1-(1+t)^{-n}}{t}$$

Monsieur X a emprunté la somme de 26 243 € au taux annuel de 7 %. Il peut effectuer ses remboursements :

- par annuités de 10 000 € ;
- par annuités de 8 000 €.

Déterminer, dans chacun des deux cas, quel serait :

1. la durée de remboursement du prêt ;
2. la somme totale versée par Monsieur X pour rembourser son emprunt.

EXERCICE 9.9 (Élasticité)**.**
Après une étude de marché, on a modélisé l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit en fonction de son prix unitaire x, pour $x \in [1;8]$: $f(x) = 10 \times 1,9^x$ et $g(x) = 600 \times 0,5^x$, le prix unitaire étant exprimé en euros, et $f(x)$ et $g(x)$ donnant le nombre d'objets offerts ou demandés en milliers.

1. Déterminer le prix d'équilibre du produit.
2. (a) Étudier le sens de variation de f, puis de g sur $[1;8]$.
   (b) Tracer les représentations graphiques de f et de g dans un même repère orthogonal.
   (c) Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 1.
3. On considère la fonction E_f définie sur I par :
$$E_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f.$$
   Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « élasticité de l'offre par rapport au prix x » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix x donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.
   (a) Déterminer l'élasticité-prix instantané de l'offre en fonction du prix x.
   (b) Calculer cette élasticité pour un prix unitaire de 4 €.
   (c) En donner une interprétation en terme de variation.
4. Mêmes questions pour l'élasticité-prix de la demande.

EXERCICE 9.10 (Modèles démographiques et fonction exponentielle)**.**
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A. Croissance exponentielle ou modèle de MALTHUS
On suppose qu'une population évolue selon la loi $P(t) = 10 \times 1,07^t$ où $P(t)$ est la population au temps t.

1. Calculer $P(0)$. Quel est le sens de variation de la fonction P sur $[0;+\infty[$?
2. Calculer la croissance instantanée relative $\frac{P'(t)}{P(t)}$ de cette population modélisée par P.
3. h désigne un réel quelconque. Démontrer que le rapport $\frac{P(t+h)}{P(t)}$ est indépendant de t.
   Calculer l'intervalle de temps h nécessaire pour que la population P double.
4. Quelle est la limite de la fonction P en $+\infty$?

Partie B. Croissance « en S », dite sigmoïde, ou modèle de VERHULST
On suppose qu'une population évolue selon la loi $N(t) = \frac{10000(1,07)^t}{999+(1,07)^t}$ où $N(t)$ est la population au temps t.

1. Calculer $N(0)$ sans utiliser de calculatrice.
2. (a) Vérifier que, pour tout t, $\frac{1}{N(t)} = 0,0999(1,07)^{-t} + 0,0001$.
   (b) Donner le sens de variation de la fonction $t \mapsto (1,07)^{-t}$, puis celui de la fonction $t \mapsto \frac{1}{N(t)}$ sur $[0;+\infty[$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction N sur $[0;+\infty[$.
3. Étudier la limite de la fonction $t \mapsto \frac{1}{N(t)}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction N en $+\infty$.
4. On note $C(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$ la croissance instantanée de cette population modélisée par N.
   On admet que le calcul donne $C(t) = \ln 1,07 - \ln 1,07 \times 10^{-4} N(t)$.
   (a) Déduire le sens de varation de C sur $[0;+\infty[$ de celui de N.
   (b) Calculer $C(0)$, $C(100)$, $C(200)$.
5. Le nombre de parasites d'une plante évolue selon la loi $N(t) = \frac{10000(1,07)^t}{999+(1,07)^t}$ où t est le temps exprimé en jours.
   On choisit un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 000 parasites sur l'axe des ordonnées.
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction N sur $[0;200]$.
   (b) Tracer dans le même repère la courbe représentant la fonction P de la partie A qui donnerait le nombre de parasites pour une croissance relative instantanée constante, égale à $C(0)$.
   (c) Utiliser le graphique pour répondre à la question suivante :
   Jusqu'à quelle valeur approximative e t, la différence $P(t) - N(t)$ reste-t-elle inférieure à 500 ?

Chapitre 10

Adéquation à une loi équirépartie

Sommaire

10.1 Le contexte

D'après bac à maths.

Imaginons que l'on dispose d'une pièce de monnaie dont on souhaite savoir si elle est bien équilibrée ou non.

On la lance 50 fois (on peut difficilement envisager de la lancer un très grand nombre de fois à la main) et on obtient, par exemple, 30 fois PILE et 20 fois FACE. Peut-on raisonnablement estimer que la pièce est bien équilibrée ou non ?

En fait, on ne peut être sûr de rien mais on peut, d'un point de vue statistique, avoir une idée plus ou moins valide de la réponse grâce aux simulations. En effet, on peut simuler (avec l'ordinateur par exemple) 10 000 fois l'expérience consistant à lancer 50 fois une pièce de monnaie bien équilibrée, et examiner si obtenir 30 fois PILE et 20 fois FACE est exceptionnel ou non, et dans quelle mesure. On pourra ainsi décider si notre piece est, elle aussi, bien équilibrée (au risque de commettre une erreur).

Nous sommes donc confrontés à plusieurs questions :

quels sont les critères de décisions ?
quel est le risque d'erreur ?

Voilà pour le principe.

Voyons maintenant, plus en détails, les calculs et la méthode.

Notons $\mathscr{E}$ l'expérience qui consiste à lancer 50 fois une pièce de monnaie. On simule, sur ordinateur, 10 000 fois l'expérience $\mathscr{E}$ pour une pièce bien équilibrée (hypothèse d'équirépartition : chaque face à une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'apparition) et on obtient les résultats donnés dans le tableau 10.1 page suivante et illustrés dans le diagramme en dessous.

Par exemple, sur les 10 000 expériences, 76 ont donné 17 PILE (et donc 33 FACE). On constate que 413 ont donné 30 PILE (et donc 20 FACE) ce qui répresente tout de même 4,13 % de l'effectif total. On constate, sur cette simulation, qu'à peine plus de un dixième de l'effectif donne exactement 25 PILE et 25 FACE et que de nombreuses expériences montrent que sur 50 lancers, le nombre de PILE ou FACE n'est pas forcément voisin, bien que les calculs aient été faits pour une pièce bien équilibrée (phénomène de fluctuation d'échantillonnage).

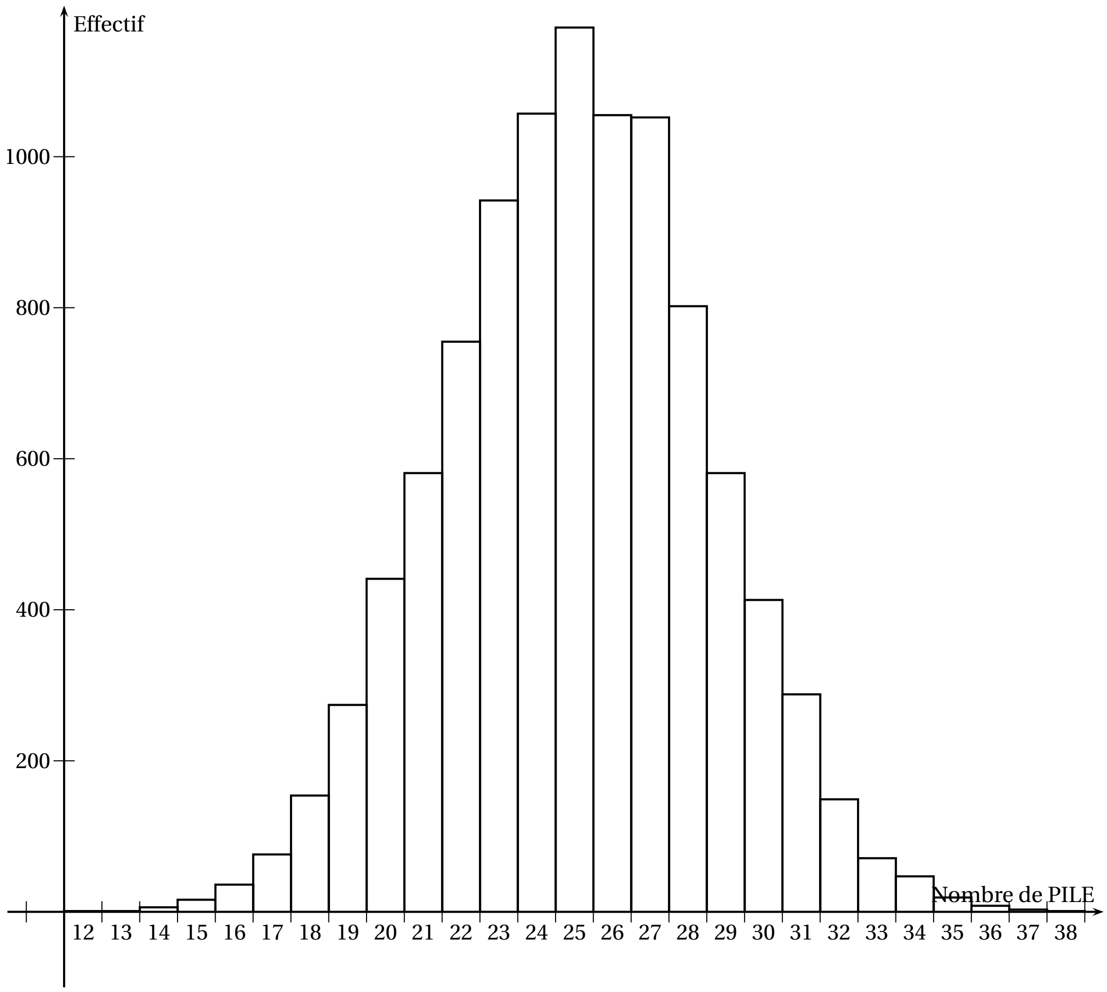
Finalement nos 30 PILE et 20 FACE ne sont peut-être pas si loin que ça de la théorie d'équiprobabilité.

Pour mesurer la *distance* de l'événement « Obtenir 30 PILE et 20 FACE » à la théorie dans le cas d'une pièce équilibrée, nous passons par les fréquences : nous avons obtenu une fréquence de PILE de $\frac{3}{5}$ au lieu de $\frac{1}{2}$, et une fréquence de FACE de $\frac{2}{5}$ au lieu de $\frac{1}{2}$.

TABLE 10.1 – Distribution obtenue suite à la simulation sur ordinateur

Nombre de « PILE » obtenus	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
effectifs	1	1	6	16	36	76	154	274	441	581	755	942	1 057	1 171
Nombre de « PILE » obtenus	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
effectifs	1 055	1 052	802	581	413	288	149	71	47	19	8	3	1	

TABLE 10.2 – Diagramme de la distribution



Nous disposons de deux moyens[1] de mesurer la distance entre deux nombres x et y :

- soit $|x-y|$;
- soit $(x-y)^2$.

Pour des raisons pratiques et de cohérence avec la variance, c'est la seconde distance qui a été choisie par les statisticiens. On la note d^2_{obs} (le carré pour rappeler qu'il s'agit de la distance de l'événement observé à la simulation donnée par le carré de la différence).

On a ainsi :

$$d^2_{\text{obs}} = \left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 = 0,02$$

Ce nombre étant souvent très petit, pour des raisons de lisibilité (il est plus facile de comparer, par exemple, 210 et 196 que 0,0210 et 0,0196) on le multiplie parfois par un coefficient arbitraire. Ici nous utiliserons $5\,000d^2_{\text{obs}}$. Pour l'événement « Obtenir 30 PILE et 20 FACE », $5\,000d^2_{\text{obs}} = 100$
Calculons la quantité $5\,000d^2$ pour chaque résultat de la simulation pour savoir si une telle distance est rare. Cela donne :

1. Voir l'introduction des mesures de dispersion en Première.

Nombre de « PILE » obtenus	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$5\,000d^2$	676	576	484	400	324	256	196	144	100	64	36	16	4	0
effectifs	1	1	6	16	36	76	154	274	441	581	755	942	1 057	1 171
Nombre de « PILE » obtenus	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	
$5\,000d^2$	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676	
effectifs	1 055	1 052	802	581	413	288	149	71	47	19	8	3	1	

Évidemment, plus une épreuve de la simulation est proche des fréquences théoriques, plus sa valeur de $5\,000d^2$ est proche de 0 et inversement. Ainsi si une épreuve a donné très exactement 25 PILE (et donc 25 FACE), $5\,000d^2$, c'est-à-dire la distance par rapport à la théorie de l'équiprobabilité, sera de 0 et si une épreuve a donné 50 PILE (et donc 0 FACE), $5\,000d^2$, c'est-à-dire la distance par rapport à la théorie de l'équiprobabilité, sera de 1 250, c'est-à-dire très grande.

Réorganisons les données en faisant un tableau des valeurs $5\,000d^2$ suivants les effectifs cumulés croissants :

Valeurs de $5000d^2$	0	4	16	36	64	100	144	196	256	324	400	484	576	676
effectifs cumulés croissants	1 171	3 283	5 277	6 834	7 996	8 850	9 412	9 715	9 862	9 945	9 980	9 994	9 998	1 0000

Maintenant, nous allons décider, suivant une marge d'erreur fixée à l'avance, si nous considérons que notre pièce peut être envisagée comme bien équilibrée ou non. Pour cela, tout dépend de la position de notre $5\,000d^2_{\text{obs}}$ dans le tableau ci-dessus.

La règle de décision usuelle est la suivante :

- si on se donne une marge d'erreur de 10 %, on raisonne par rapport au neuvième décile, D_9, qui est défini comme un réel tel qu'au moins 90 % de l'effectif total ait une valeur inférieure ou égale à D_9 :
  - si $5\,000d^2_{\text{obs}} \leqslant D_9$, alors on considere que le modèle observe suit la loi d'équirépartition
  - $5\,000d^2_{\text{obs}} > D_9$, alors on considère que le modèle observé ne suit pas la loi d'équirépartition

  Cela revient à considérer que 90 % des distances à la théorie, celles les plus proches de 0, comme pouvant relever des variations dues à la fluctuation d'échantillonage et à considérer que 10 % des distances à la théorie, celles les plus éloignées de 0, comme pouvant revéler un problème quant à l'adéquation entre le phénomène observé et la loi équirépartie.
- si on se donne une autre marge d'erreur, par exemple 1 %, on raisonne de même en comparant $5\,000d^2_{\text{obs}}$ au quatre-vingt-dix-neuvième centile.

Dans notre situation, calculons le neuvième décile D_9. Parmi les valeurs de $5\,000d^2$, on prend celles qui sont inférieures ou égales à la 9 000$^{\text{ième}}$ distance (il y a 10 000 simulations). D'après le tableau, D_9 est compris entre 100 et 144.
Ici $5\,000d^2_{\text{obs}} = 100 \leqslant D_9$, donc, nous pouvons affirmer, avec une marge d'erreur de 10 %, que notre pièce est bien équilibrée. Par contre, si nous avions eu une autre pièce donnant 32 PILE et 18 FACE, nous aurions eu dans ce cas :

$$5\,000d^2_{\text{obs}} = \left(\frac{32}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{50} - \frac{1}{2}\right)^2 = 196$$

Cette valeur de $5\,000d^2_{\text{obs}}$ est trop marginale : $5\,000d^2_{\text{obs}} > D_9$. Une telle pièce serait considérée comme non équilibrée (la distance à la théorie de l'équiprobabilité est trop grande, c'est qu'il ne doit pas s'agir d'une pièce équilibrée) avec une marge d'erreur de 10 %.

Remarques.
- Les résultats peuvent différer si on recommence une autre simulation car l'étendue peut être différente, les valeurs des déciles (ou centiles ou autres) également.
- Il peut arriver qu'on rejette le modèle observé s'il est inférieur au premier décile. Dans ce cas, les fréquences observées sont très proches des fréquences théoriques (puisque d^2 est petit). La probabilité que le modèle observé soit équiréparti est donc très forte. Ceci dit, certains statisticiens le considèrent comme « douteux » (trop beau pour être vrai), c'est ce qui s'est passé pour certains résultats du biologiste Mendel qui avait des résultats statistiques tellement conformes aux fréquences théoriques que certains le soupçonnent aujourd'hui d'avoir embelli ses mesures !

10.2 Bilan

Soit $\mathscr{E}$ l'expérience qui consiste à répéter n fois une épreuve comportant k issues.
On cherche à savoir, si d'après les résultats observés, on peut décider si l'épreuve suit le modèle d'équirépartition.
On note :

$$d^2_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^{k} \left(f_{\text{obs}} - \frac{1}{k} \right)^2$$

On suppose que l'on dispose de données simulées (un grand nombre de fois) sur un modèle théoriquement équireparti et on étudie la série statistique des grandeurs d^2 obtenues.
Pour une marge d'erreur de 10 %, on raisonne avec le neuvième decile D_9 de la série des d^2 obtenue par la simulation : si $d^2_{\text{obs}} \leqslant D_9$, on considère que l'expérience observée est équirépartie avec une marge d'erreur de 10 % ; dans le cas contraire, on considère que l'expérience observée n'est pas équirépartie.

10.3 Exercices

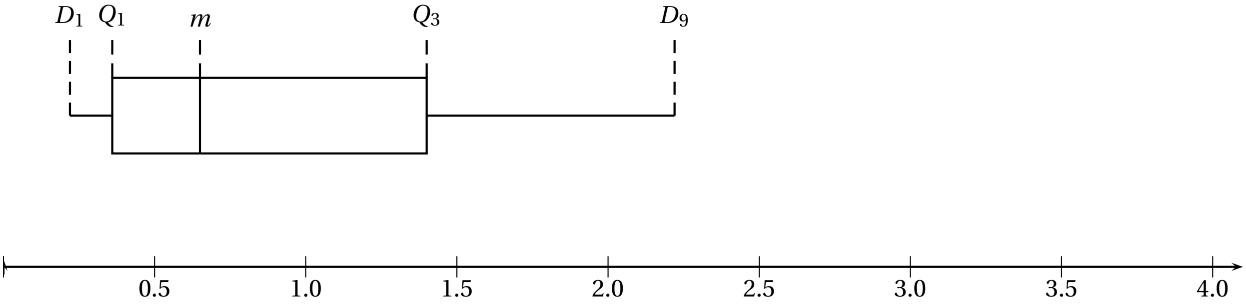
Exercice 10.1.
Une clinique fait des statistiques sur les naissances (naturelles et non provoquées) selon le jour de la semaine.
Sur 1 000 naissances naturelles relevées, on obtient les résultats suivants :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Nombre de naissances	146	163	158	156	156	116	105

On s'intéresse à la validité de l'hypothèse « le nombre de naissance est indépendant du jour de la semaine ». Pour tout entier i compris entre 1 et 7, on note f_i la fréquence des naissances le $i^{\text{ème}}$ jour de la semaine.

1. Calculer $d^2_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^{7} \left(f_i - \frac{1}{7} \right)$ puis donner la valeur de $1\,000 d^2_{\text{obs}}$ arrondie à 10^{-2}.
2. On simule sur un ordinateur 50 000 séries de 1 000 naissances équiréparties sur les sept jours de la semaine. Pour chacune de ces 5 000 séries, l'ordinateur a calculé la valeur de $1\,000 d^2$ (où d est la distance entre les fréquences de la série et les fréquences théoriques). Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte de la figure 10.1 de la présente page. Avec un risque d'erreur de 10 %, peut-on considérer que le nombre de naissances observées dans la clinique est indépendant du jour de la semaine ?

Figure 10.1 – Diagramme en boite de l'exercice 10.1



Exercice 10.2.
D'après une étude de l'INSERM, les infarctus ne se produisent pas également chaque jour de la semaine.
Les fréquences calculées sur 17 000 hommes âgés de 25 à 54 ans décédés entre 1 991 et 2 001 sont les suivantes :

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Fréquence	14,8 %	13,3 %	13,4 %	13,6 %	13,8 %	15 %	16,1 %

Reprendre la simulation de l'exercice 10.1 pour confirmer ou infirmer l'étude de l'INSERM.

EXERCICE 10.3.
On dispose d'un dé tétraèdrique et on voudrait savoir s'il est bien équilibré. Pour cela on lance 200 fois le dé et on obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

1. Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.
2. On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4} \left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.
3. On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraèdrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Mimimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,001 24	0,001 92	0,002 35	0,002 81	0,003 45	0,004 52	0,010 15

   Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?
4. Mêmes questions avec un autre dé ayant donné les résultats suivants :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	30	52	46	32

EXERCICE 10.4.
Un professeur a demandé à ses élèves de jeter 200 fois un dé et de noter leurs résultats.
Voici les relevés de Mathieu :

Face k	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties de la face k	37	34	33	33	29	34

Les résultats lui semblent très probants et Mathieu s'attend à des félicitations.

1. Calculer la valeur de $6000d^2_{\text{obs}}$ dans l'hypothèse d'un dé bien équilibré.
2. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

i	5	10	20	30	40	50	100	150
Nombre de simulations où $6000d^2 < i$	36	155	451	698	847	920	995	1000

   Pourquoi le professeur peut-il légitimement penser que Mathieu n'a pas lancé 200 fois le dé ?

EXERCICE 10.5 (Amérique du nord – Juin 2 009)**.**
Un pépiniériste a planté trois variétés de fleurs dans une prairie de quelques hectares : des violettes, des primevères et des marguerites. Il se demande s'il peut considérer que sa prairie contient autant de fleurs de chaque variété. Il cueille au hasard 500 fleurs et obtient les résultats suivants :

Variétés	Violettes	Primevères	Marguerites
Effectifs	179	133	188

1. Calculer les fréquences f_V d'une fleur de variété Violette, f_P d'une fleur de variété Primevère et f_M d'une fleur de variété Marguerite. On donnera les valeurs décimales exactes.
2. On note $d^2_{\text{obs}} = \left(f_V - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_P - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_M - \frac{1}{3}\right)^2$.

   Calculer $500d^2_{\text{obs}}$. On donnera une valeur approchée arrondie au millième.
3. Le pépiniériste, ne voulant pas compter les quelques milliards de fleurs de sa prairie, opère sur ordinateur en simulant le comptage, au hasard, de 500 fleurs suivant la loi équirépartie. Il répète 2 000 fois l'opération et calcule à chaque fois la valeur de $500d^2_{\text{obs}}$. Ses résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Intervalle auquel appartient $500d^2_{\text{obs}}$	[0 ; 0,5[	[0,5 ; 1[	[1 ; 1,5[	[1,5 ; 2[	[2 ; 2,5[	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[
Nombre par intervalle	163	439	458	350	231	161	80	47	37	34

   Par exemple : le nombre $500d^2_{\text{obs}}$ apparaît 163 fois dans l'intervalle [0 ; 0,5[.

   On note D_9 le neuvième décile de cette série statistique.

   Montrer que $D_9 \in [2,5\,;\,3[$.
4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer avec un risque inférieur à 10 % que « la prairie est composée d'autant de fleurs de chaque variété ».

EXERCICE 10.6 (Adéquation à une loi binomiale)**.**
Une étude sur 1 000 familles de trois enfants a donné les résultats suivants :

Nombre de garçons i	0	1	2	3	Total
effectif e_i	110	384	382	124	1 000
fréquence f_i					1

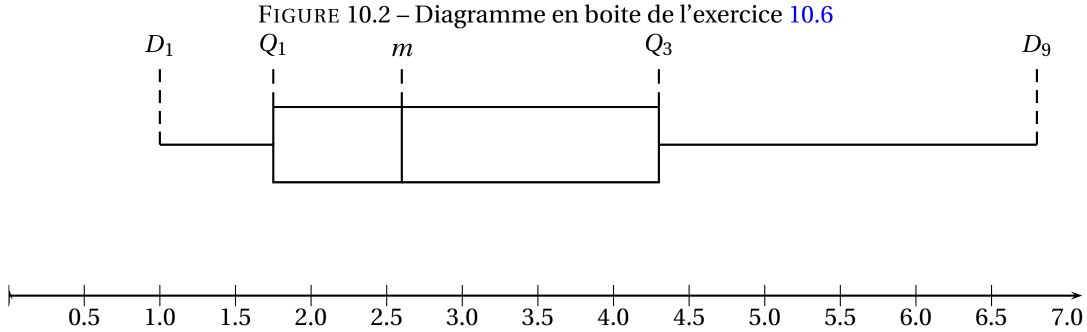
On se propose d'étudier la compatibilité de ses résultats avec l'hypothèse que la naissance d'une fille ou d'un garçon sont deux événements équiprobables.

1. Si cette hypothèse est correcte, la loi théorique du nombre de garçons dans une famille de trois enfants est une loi binomiale de paramètres 3 et 0,5.
   Compléter alors le tableau suivant :

Nombre de garçons i	0	1	2	3
probabilité p_i				

2. Pour une loi binomiale (et pour toute autre loi) on mesure la distance entre les fréquences observées et les probabilités théoriques par la formule :
$$\chi^2_{\text{obs}} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i - p_i)^2}{p_i}$$
   Ici $n = 1000$; calculer la valeur de χ^2_{obs} (on pourra s'aider d'un tableur).
3. Une simulation sur 100 essais a donné les résultats résumés dans le diagramme de la figure 10.2 de la présente page.
   Indiquer une valeur approximative du neuvième décile de cette distribution.

FIGURE 10.2 – Diagramme en boite de l'exercice 10.6



4. La distribution observée est-elle en adéquation avec la loi $\mathscr{B}(3; 0,5)$?
   L'hypothèse d'équiprobabilité pour la naissance d'une fille ou d'un garçon est-elle acceptable ?