Mathématiques en Seconde

David ROBERT

2011–2012

Sommaire

1 Translation – Vecteurs **1**
1.1 Translation . . . 1
1.1.1 Définition . . . 1
1.1.2 Activités . . . 1
1.1.3 Bilan et compléments . . . 3
1.2 Vecteurs . . . 3
1.2.1 Définition – Égalité . . . 3
1.2.2 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES . . . 5
1.2.3 Vecteur nul – Vecteurs opposés . . . 6
1.2.4 Produit d'un vecteur par un réel . . . 7
1.2.5 Colinéarité de deux vecteurs . . . 8
1.3 Exercices . . . 9

2nde 06 – Devoir surveillé n°1 : Vecteurs **13**

2nde 11 – Devoir surveillé n°1 : Vecteurs **15**

2 Repérage **17**
2.1 Repères et coordonnées . . . 17
2.1.1 Repères . . . 17
2.1.2 Coordonnées de vecteur . . . 17
2.1.3 Coordonnées de point . . . 18
2.2 Propriétés . . . 19
2.3 Exercices . . . 20
2.3.1 Repère donné . . . 20
2.3.2 Repère à choisir . . . 21
2.3.3 Algorithmique . . . 22

2nde 06 – Devoir surveillé n°2 : Repérage **23**

2nde 11 – Devoir surveillé n°2 : Repérage **25**

2nde 11 – Devoir surveillé n°2 : Repérage **27**

3 Généralités sur les fonctions **29**
3.1 Activité . . . 29
3.2 Premières notions . . . 31
3.2.1 Notion de fonction . . . 31
3.2.2 Ensemble de définition . . . 31
3.2.3 Tableau de valeurs . . . 32
3.2.4 Représentation graphique . . . 32
3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations . . . 34
3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$ . . . 34
3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$ . . . 34
3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$ . . . 35
3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$ . . . 35
3.4 Variations, extremums . . . 35
3.4.1 Sens de variation . . . 35
3.4.2 Tableau de variations . . . 36
3.4.3 Extremums . . . 37

3.5 Exercices et problèmes 37
3.5.1 Premières notions 37
3.5.2 Résolutions graphiques 40
3.5.3 Variations, extremums 41

2nde 06 – Devoir surveillé n°3 : Généralités sur les fonctions **43**

2nde 11 – Devoir surveillé n°3 : Généralités sur les fonctions **45**

4 Statistiques discrètes **47**
4.1 Vocabulaire 47
4.2 Mesures centrales 48
4.2.1 Mode 48
4.2.2 Moyenne arithmétique 48
4.2.3 Médiane 48
4.3 Mesures de dispersion 49
4.3.1 Valeurs extrêmes 49
4.3.2 Quartiles 49
4.4 Représentations graphiques 49
4.4.1 Diagramme à bâtons 49
4.4.2 Diagrammes basés sur la fréquence 50
4.4.3 Diagramme en boite 51
4.5 Exercices 51

2nde 06 – Devoir surveillé n°4 : Statistiques discrètes – Expressions algébriques **55**

2nde 11 – Devoir surveillé n°4 : Statistiques discrètes – Expressions algébriques **57**

5 Calculs dans l'espace **59**
5.1 Perspective cavalière 59
5.1.1 Principe 59
5.1.2 Construction et propriétés 60
5.2 Solides usuels et volumes 60
5.2.1 Famille des prismes droits 60
5.2.2 Famille des pyramides 60
5.2.3 Sphère 61
5.3 Exercices 61

2nde 06 – Devoir surveillé n°5 : Géométrie dans l'espace – Algorithmique **65**

2nde 11 – Devoir surveillé n°5 : Géométrie dans l'espace – Algorithmique **67**

6 Équations de droites – Fonctions affines **69**
6.1 Activités 69
6.2 Bilan et compléments 70
6.2.1 Équations de droites 70
6.2.2 Fonctions affines 71
6.3 Exercices 72
6.3.1 Équations de droites 72
6.3.2 Fonctions affines 74
6.4 Problèmes 75

2nde 06 – Devoir surveillé n°6 – Première partie : Équations de droite **77**

2nde 11 – Devoir surveillé n°6 : Équations de droite – Fonctions affines **79**

7 Statistiques continues **81**
7.1 Un exemple 81
7.1.1 Valeurs extrêmes 81
7.1.2 Moyenne 81
7.1.3 Médiane 81
7.1.4 Mode 82
7.2 Exercices 82

8 Incidence et parallélisme dans l'espace **85**
8.1 Positions relatives de droites et de plans 85
8.1.1 Règles d'incidence 85
8.1.2 Positions relatives de deux droites 85
8.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan 86
8.1.4 Positions relatives de deux plans 86
8.2 Parallélisme dans l'espace 87
8.2.1 Parallélisme entre droites 87
8.2.2 Parallélisme entre plans 87
8.2.3 Parallélisme entre droite et plan 87
8.3 Exercices 89
8.3.1 Incidence 89
8.3.2 Parallélisme 90
8.3.3 Sections 91

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°7 : Statistiques continues – Géométrie dans l'espace – Algorithmique **93**

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°7 : Statistiques continues – Géométrie dans l'espace – Algorithmique **95**

9 Fluctuations d'échantillonage **97**
9.1 Activité 98
9.2 Bilan et compléments 102
9.3 Exercices 102

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°8 : Fluctuations **105**

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°8 : Fluctuations **106**

10 Fonction carrée
Fonctions trinômes **107**
10.1 Activité 107
10.2 Fonction carrée 108
10.3 Fonctions trinômes 109
10.4 Exercices 109
10.4.1 Fonction carrée 109
10.4.2 Fonctions trinômes 110
10.4.3 Problèmes 111

11 Probabilités **113**
11.1 Vocabulaire des ensembles 113
11.2 Expériences aléatoires 114
11.2.1 Issues, univers 114
11.2.2 Événements 114
11.3 Loi de probabilité sur un univers Ω 114
11.3.1 Cas général 114
11.3.2 Cas particulier : l'équiprobabilité 116
11.4 Exercices 116

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°9 : Trinômes **119**

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°9 : Trinômes – Probabilités – Algorithmique **120**

12 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique **123**
12.1 Enroulement de la droite des réels 123
12.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian 123
12.3 Cosinus et sinus d'un réel x 124

Devoir surveillé n°10 : Probabilités – Enroulement du cercle **128**

13 Fonction inverse
Fonctions homographiques **129**
13.1 Activités . . . 129
13.2 Fonction inverse . . . 130
13.3 Fonctions homographiques . . . 131
13.4 Exercices . . . 131
13.4.1 Technique . . . 131
13.4.2 Études de variation de fonctions homographiques . . . 132
13.4.3 Problèmes . . . 133

A Expressions algébriques **i**
A.1 Rappels . . . i
A.2 Exercices . . . i
A.3 Problèmes . . . ii

B Algorithmique : boucle « pour » **i**

Chapitre 1

Translation – Vecteurs

Sommaire

1.1 Translation **1**
1.1.1 Définition 1
1.1.2 Activités 1
1.1.3 Bilan et compléments 3
1.2 Vecteurs **3**
1.2.1 Définition – Égalité 3
1.2.2 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES 5
1.2.3 Vecteur nul – Vecteurs opposés 6
1.2.4 Produit d'un vecteur par un réel 7
1.2.5 Colinéarité de deux vecteurs 8
1.3 Exercices **9**

1.1 Translation

1.1.1 Définition

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

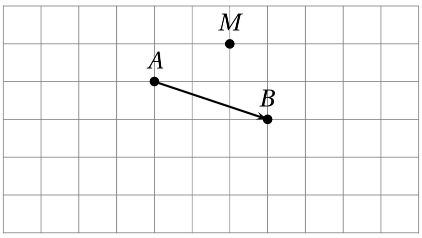
1.1.2 Activités

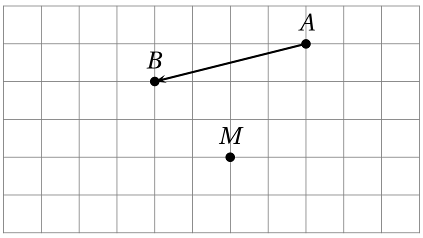
ACTIVITÉ **1.1** (Image d'un point par une translation).

Cas général

1. Sur la figure 1.1 de la présente page, construire M', image de M par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 1.1 – Figures de la question 1 du *cas général* de l'activité 1.1

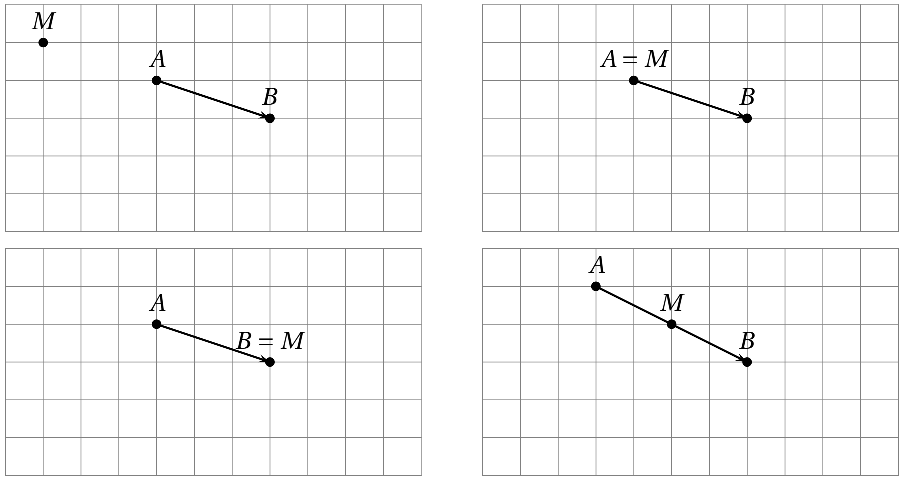




2. Dans chaque construction, on voit apparaître une figure familière. Laquelle ?
   Démontrer que c'est toujours le cas.

Quelques cas particuliers Sur la figure 1.2 page suivante, construire M', l'image de M par la translation qui transforme A en B.

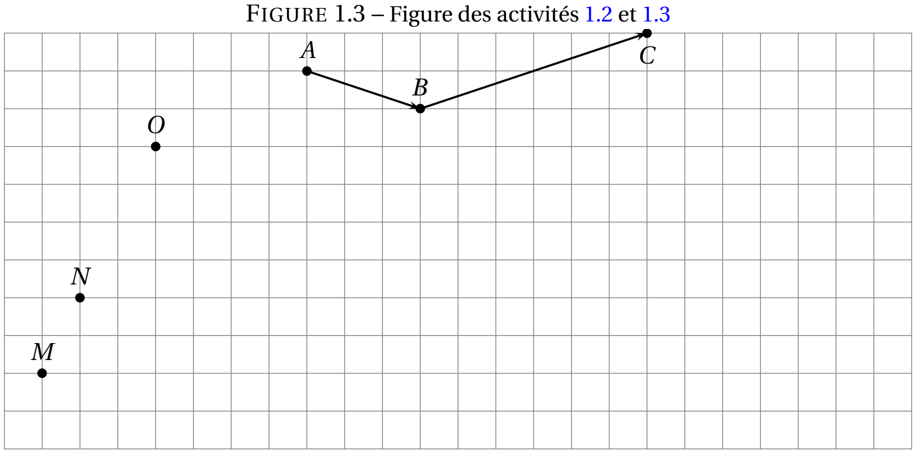
FIGURE 1.2 – Figures de la question *cas particulier* de l'activité 1.1



ACTIVITÉ 1.2 (Quelques propriétés de la translation)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 1.3 de la présente page.

1. Construire M', N' et O', images respectives de M, N et O par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 1.3 – Figure des activités 1.2 et 1.3



2. Construire P, image de O la translation qui transforme M en M'. Que constate-t-on ?
3. Les points M, N et O sont alignés. Cela semble-t-il être aussi le cas des points M', N' et O' ?
   Démontrons-le.
   (a) D'après la propriété obtenue dans le cas général, quels sont les parallélogrammes issus de la translation ?
   (b) Quelles sont alors les droites parallèles à (AB) ? Quelles sont les longueurs égales à AB ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les quadrilatères $MNN'M'$, $NOO'N'$?
   (d) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et $(M'N')$? Et pour les droites (ON) et $(O'N')$?
   (e) Conclure.
4. Construire l'image d'un autre point situé sur le segment $[OM]$. Sur quel segment est située cette image ?
   Conjecturer quelle est l'image du segment $[OM]$ et celle de la droite (OM).
5. Que peut-on dire des longueurs MN et $M'N'$? Et des longueurs ON et $O'N'$? *Justifier, en utilisant éventuellement un résultat de la démonstration de la question 3.*

ACTIVITÉ 1.3 (Enchaînement de deux translations)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 1.3 de la présente page.

1. Construire M'', N'' et O'', images respectives de M', N' et O' par la translation qui transforme B en C.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ONN''O''$? *Justifier.*
3. Quelle est la transformation qui permet de passer des points M, N et O aux points M'', N'' et O'' ?

1.1.3 Bilan et compléments

Définition 1.1 (Rappel)**.** Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Propriété 1.1. *Soient A et B deux points du plan et M ayant pour image M' par la translation qui transforme A en B. Alors $ABM'M$ est un* ....

Cela a été démontré dans l'activité.

Propriété 1.2. *Soient A et B deux points du plan et M, N et O ayant pour images respectives M', N' et O' par la translation qui transforme A en B. Alors :*
- *Si M, N et O sont alignés alors* ....
- *L'image du segment $[MN]$ est* .... *de même* ....
- *Si O est le milieu du segment $[MN]$ alors* ....

On dit que la translation conserve .... , ... *et* ....

Le premier et le deuxième points ont été démontrés dans l'activité. Le troisième point est une conséquence triviale des deux premiers.

Propriété 1.3 (admise)**.** *L'image d'une droite par une translation est* ....
L'image d'un cercle par une translation est ....

Enfin, comme on l'a vu en activité :

Propriété 1.4. *L'enchaînement (on parle de la* composition*) de deux translations est une translation.*

1.2 Vecteurs

1.2.1 Définition – Égalité

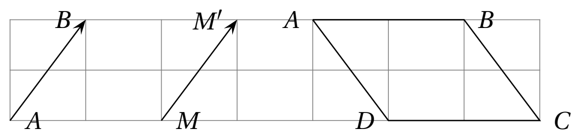
Définition 1.2. On appelle *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 1.3. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

On a vu précédemment que
- d'une part, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ parallélogramme (éventuellement aplati),
- d'autre part que les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Ce cas est général. Ainsi :

Propriété 1.5.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow$ ....
- $\overrightarrow{AB} =$ .... $\Leftrightarrow$ *ABDC est un parallélogramme*



Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Ainsi, on peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

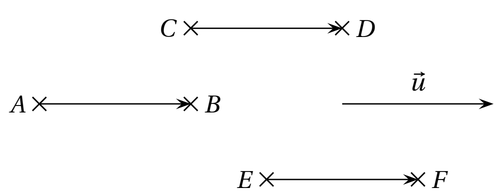
Définition 1.4. Un vecteur non nul est déterminé par :
- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 1.6. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

En effet, en appellant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ces deux vecteurs, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

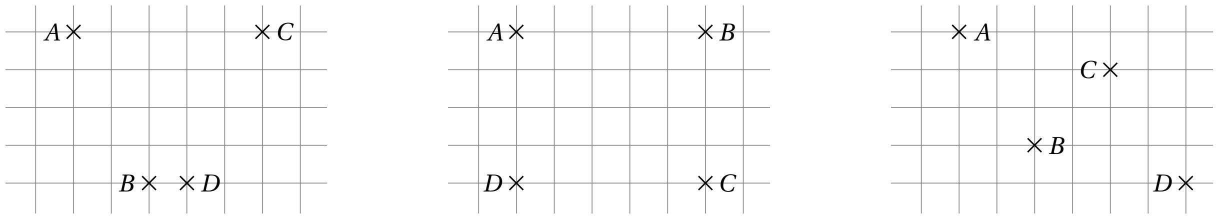
Notation $\vec{u}$



Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

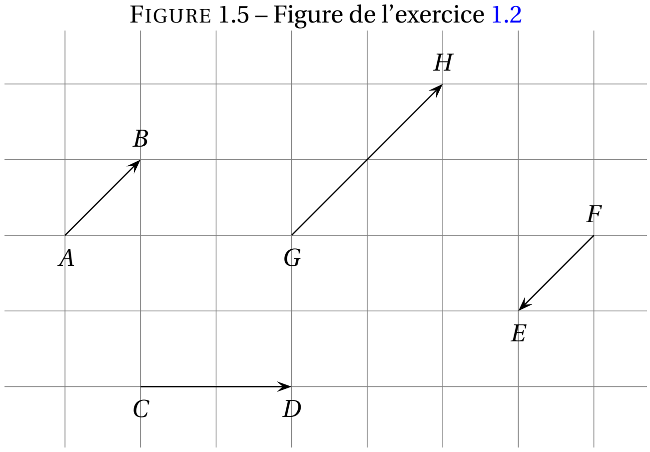
EXERCICE 1.1.
Sur chaque schéma de la figure 1.4, de la présente page, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?

FIGURE 1.4 – Figure de l'exercice 1.1



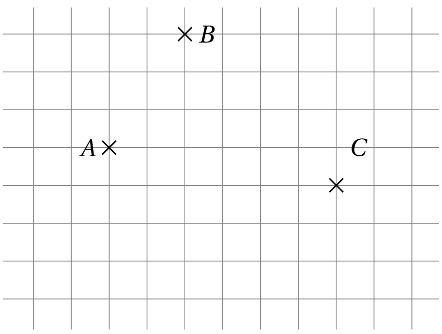
EXERCICE 1.2.
Sur la figure 1.5 de la présente page, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.

FIGURE 1.5 – Figure de l'exercice 1.2



EXERCICE 1.3.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
$\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BF} = \ldots\ldots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?

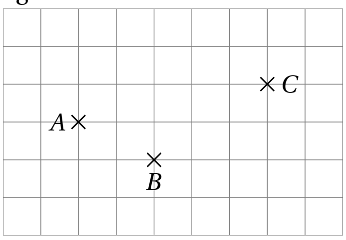


1.2.2 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

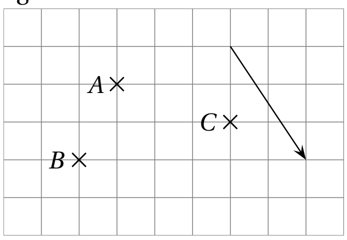
Définition 1.5. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

EXERCICE 1.4.

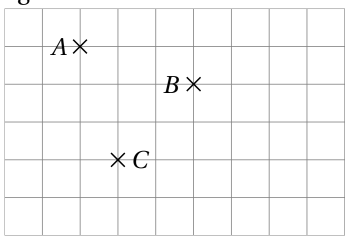
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



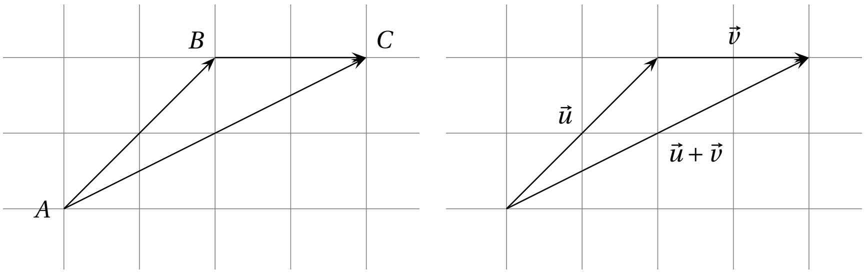
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$?



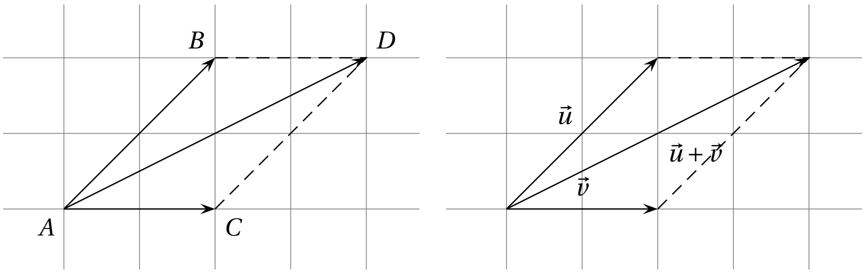
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



Propriété 1.7 (Relation de CHASLES)**.** *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Propriété 1.8 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ *parallélogramme.*

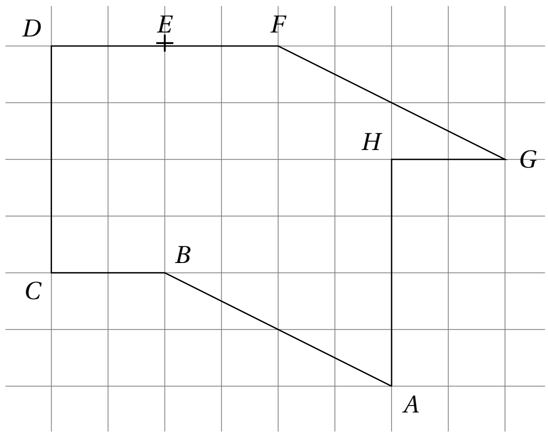


EXERCICE 1.5 (Relation de CHASLES)**.**
Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{XL}+\overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\ldots P}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E}=\overrightarrow{F\ldots}+\overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots}=\ldots\ldots+\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R\ldots}+\overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots C}+\overrightarrow{\ldots D}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y}=\overrightarrow{XJ}+\ldots\ldots+\overrightarrow{R\ldots}$

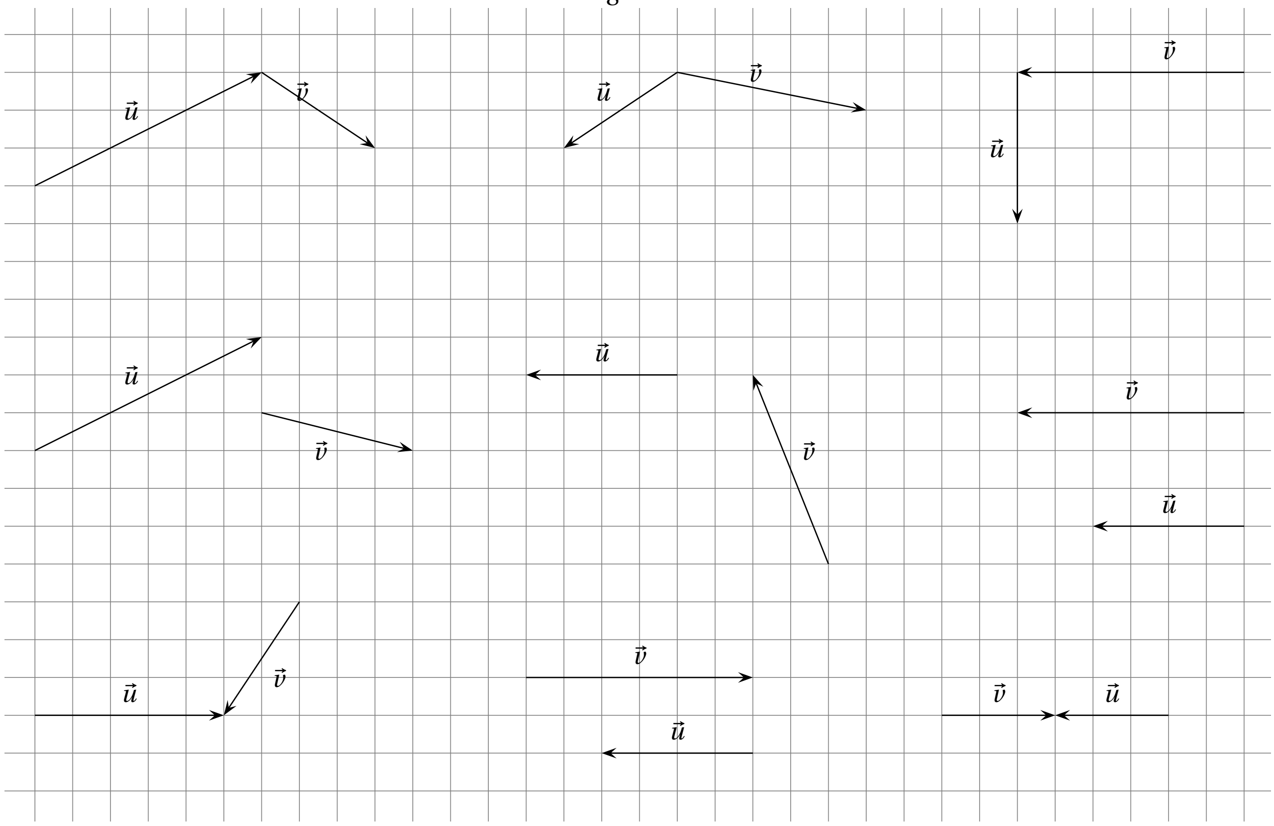
EXERCICE 1.6 (Vecteurs égaux, somme)**.**
On considère le motif représenté ci-contre.

1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif ;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$



EXERCICE 1.7 (Sommes)**.**
Dans chacun des cas de la figure 1.6 page suivante, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

FIGURE 1.6 – Figure de l'exercice 1.7



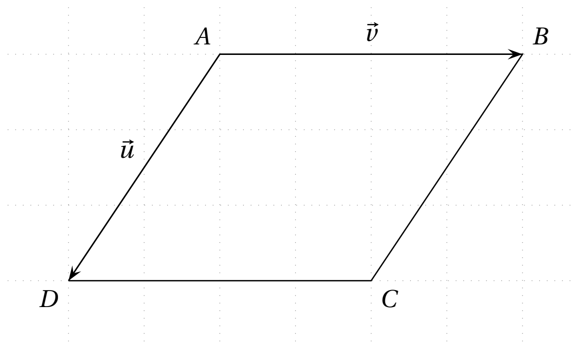
1.2.3 Vecteur nul – Vecteurs opposés

Définition 1.6. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. On a donc :

Propriété 1.9. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB}=$ .... et $\overrightarrow{BA}=$ ....*

EXERCICE 1.8 (Différence)**.**
Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DA}=$ ....;
- $\overrightarrow{CB}=$ ....;
- $\overrightarrow{DC}=$ ....;
- $\overrightarrow{AC}=$ ....;
- $\overrightarrow{CD}=$ ....;
- $\overrightarrow{CA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DB}=$ ....;
- $\overrightarrow{BD}=$ ....;
- $\overrightarrow{BC}=$ ....;

Enfin on a la propriété suivante :

Propriété 1.10. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors* .... $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

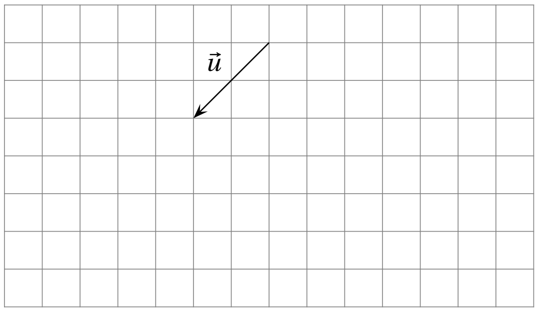
1.2.4 Produit d'un vecteur par un réel

ACTIVITÉ 1.4.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.

   Quelles propriétés géométriques partagent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Quelles sont leurs différences ?

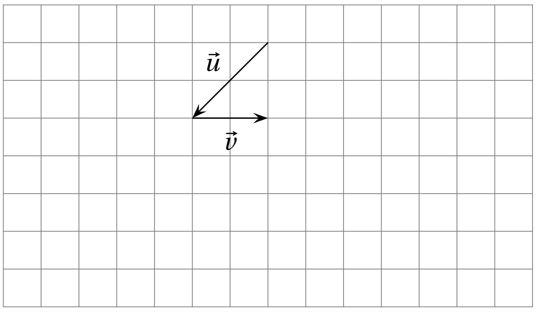
2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
   En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{\imath} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\jmath} = 1,5\vec{u}$.

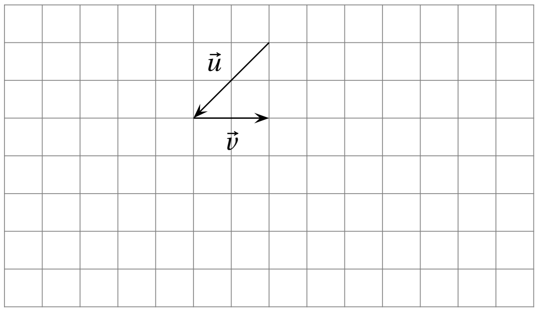


On a ainsi :

Définition 1.7. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :
- la direction est ....
- le sens est ....
- la norme est ....

ACTIVITÉ 1.5.
On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.
Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?





On a ainsi :

Propriété 1.11. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u} + \vec{v}) =$ .... et $k\vec{u} + k'\vec{u} =$ ....*

On a de plus :

Propriété 1.12. *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $0\vec{u} =$ .... et $k\vec{0} =$ ....*

Propriété 1.13. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan, alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} =$ .... $\overrightarrow{AB}$.*

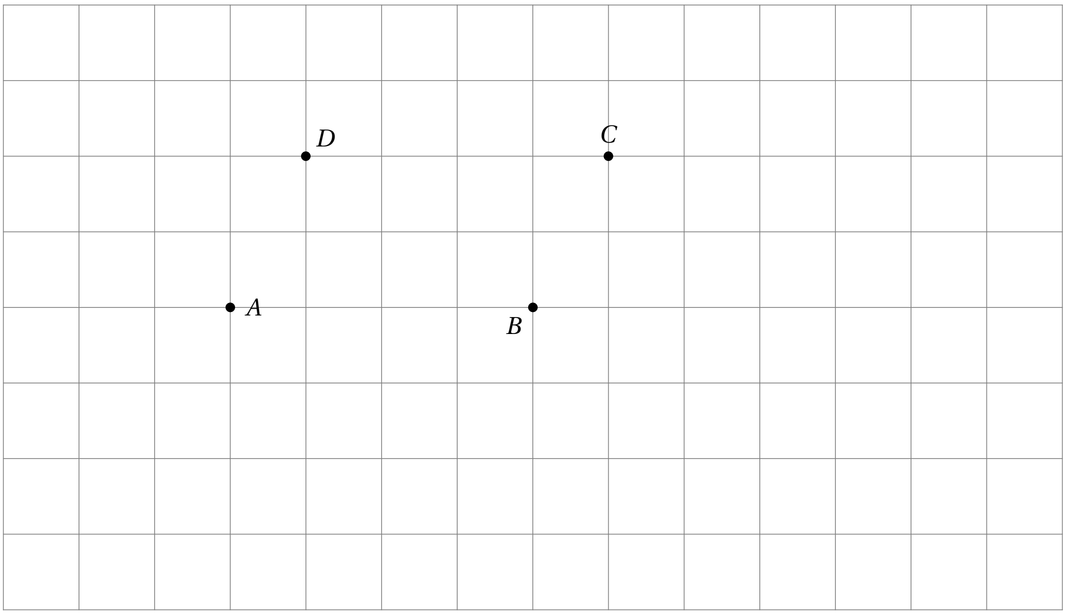
1.2.5 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 1.8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

ACTIVITÉ 1.6.
Sur la figure 1.7 de la présente page le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
On appelle E le symétrique de D par rapport à C et F le symétrique de D par rapport à A.

FIGURE 1.7 – Figure de l'activité 1.6



1. Construire E et F.
2. Démontrer que les points F, B et E sont alignés.
3. Démontrer que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.
4. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ d'une part et $\overrightarrow{FE}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
5. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont-ils colinéaires ?

Ce résultat est général. Plus précisément :

Propriété 1.14. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

1.3 Exercices

EXERCICE 1.9.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

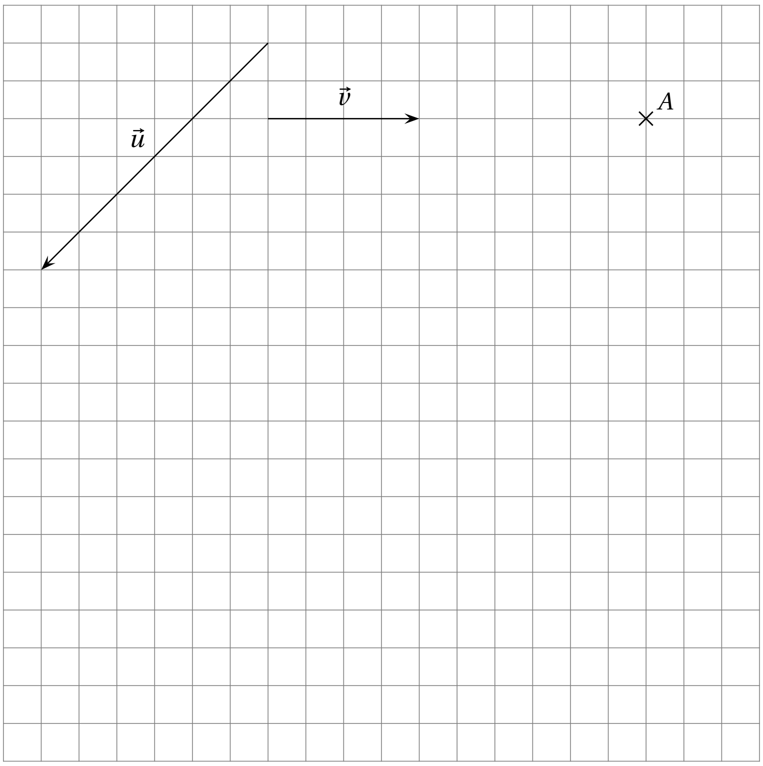
1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 1.10.
Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

EXERCICE 1.11.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné (voir la figure 1.8 de la présente page).

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{v}$ et $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on ? *Le justifier par un calcul sur les vecteurs.*

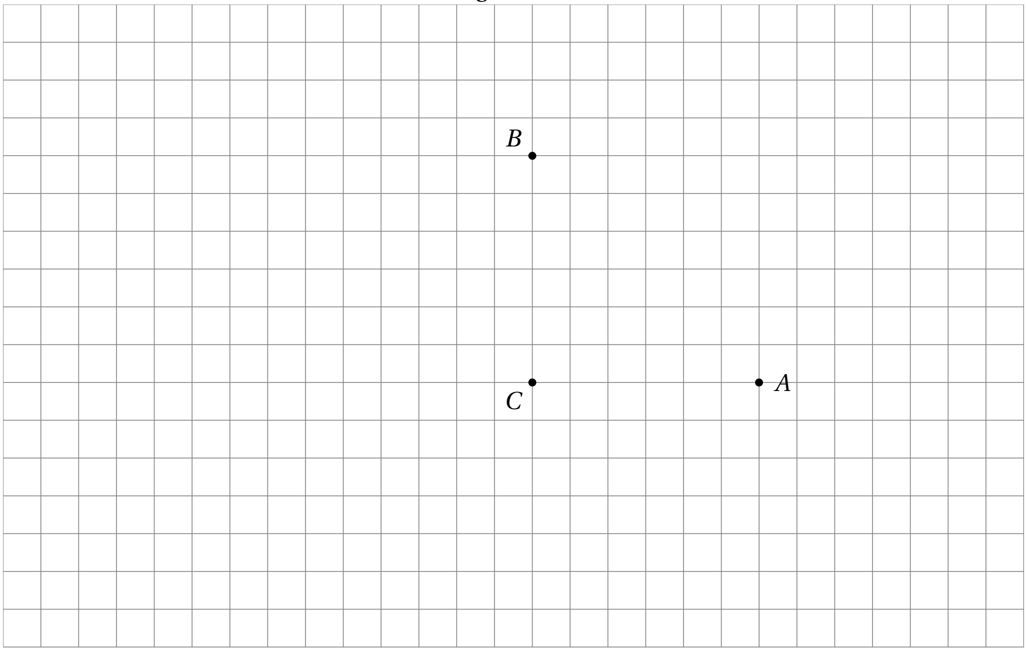
FIGURE 1.8 – Figure de l'exercice 1.11



EXERCICE 1.12.
Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 1.9 page suivante).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
   En déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$.
   Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.

FIGURE 1.9 – Figure de l'exercice 1.12



EXERCICE 1.13.
Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 1.14.
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 1.15.
Sur la figure 1.10 page ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Construire A' et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ d'une part et $\overrightarrow{DA'}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DA'}$?
4. Que peut-on en déduire pour les points A', E et D ?

EXERCICE 1.16.
Sur la figure 1.11 page suivante, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points B, F et J sont alignés.

FIGURE 1.10 – Figure de l'exercice 1.15

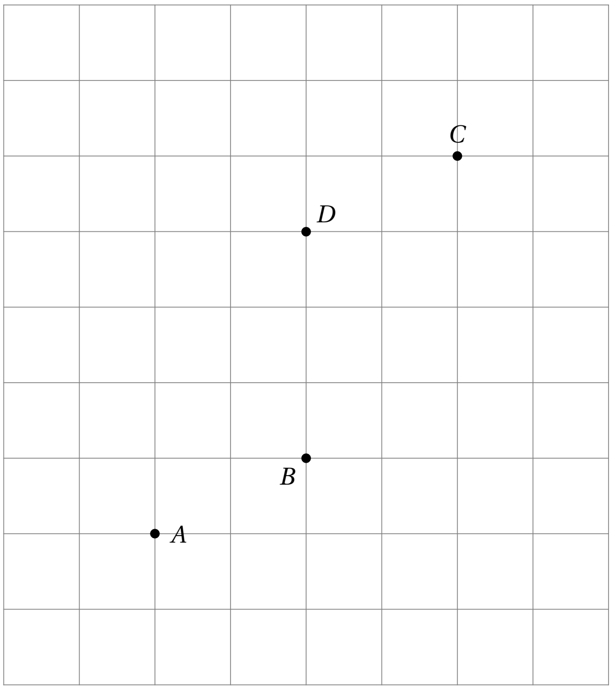
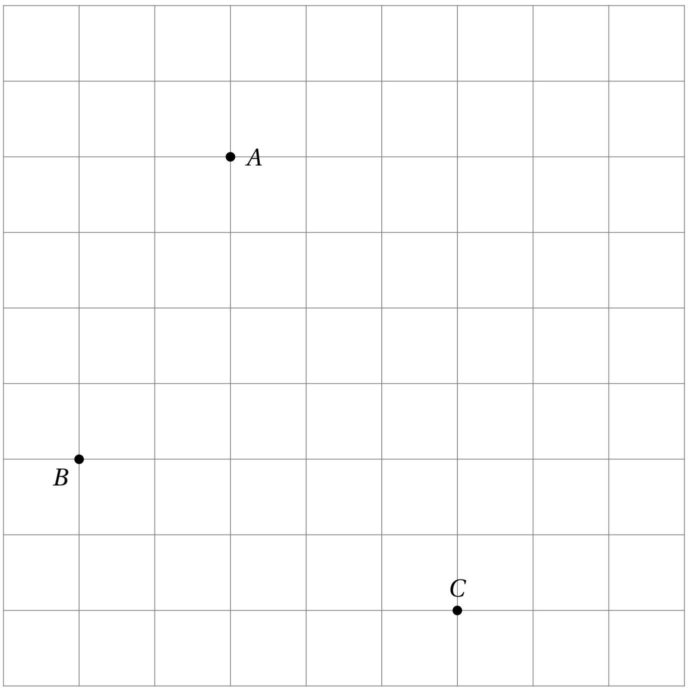


FIGURE 1.11 – Figure de l'exercice 1.16



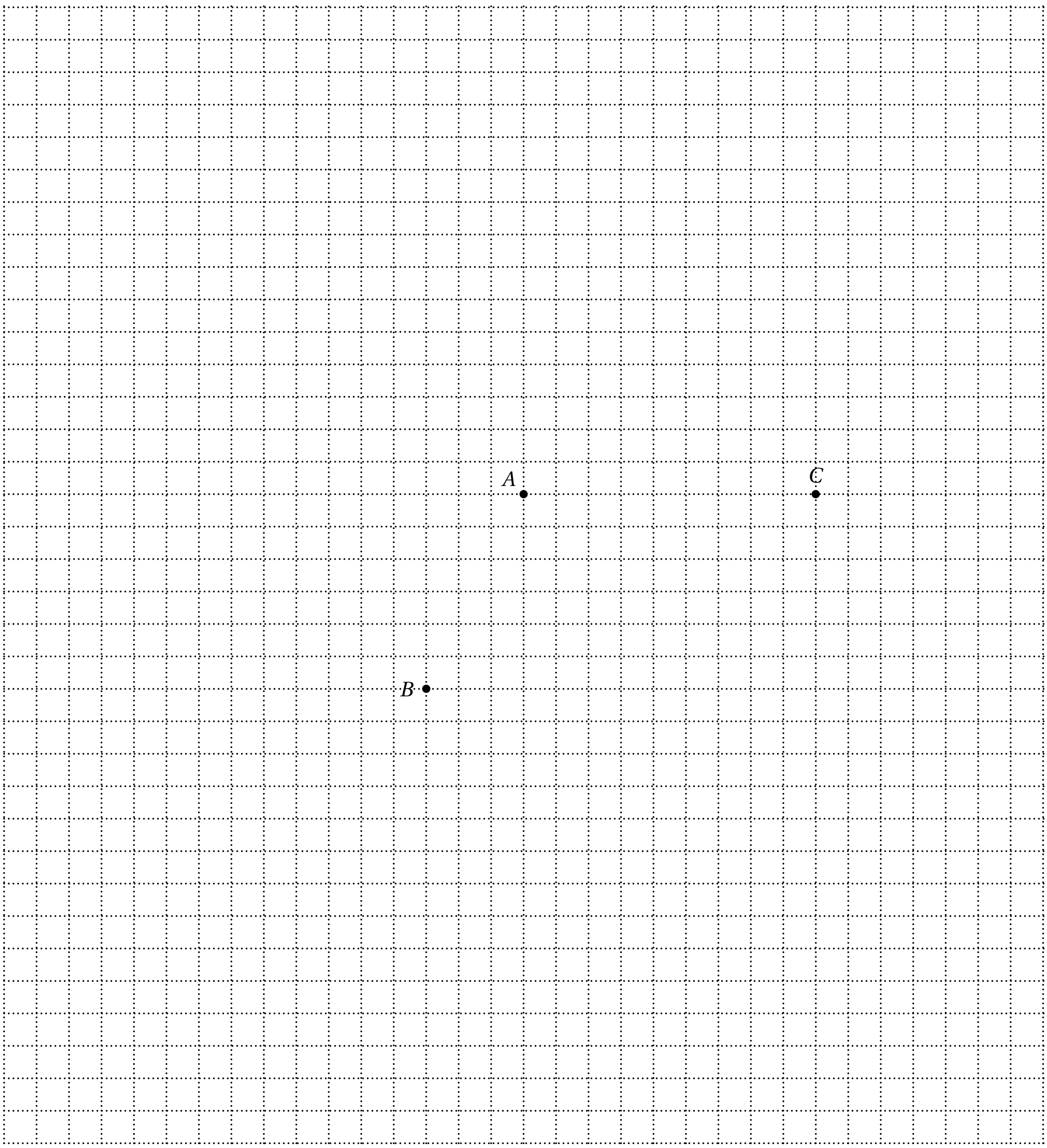
2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°1

Vecteurs

EXERCICE 1.1 (6 points)**.**
On donne sur la figure 1.1 de la présente page trois points A, B et C. Sur cette figure, construire les points D, E, F, G, H et I définis par :

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BA} + 1,5\overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$

FIGURE 1.1 – Figure de l'exercice 1.1

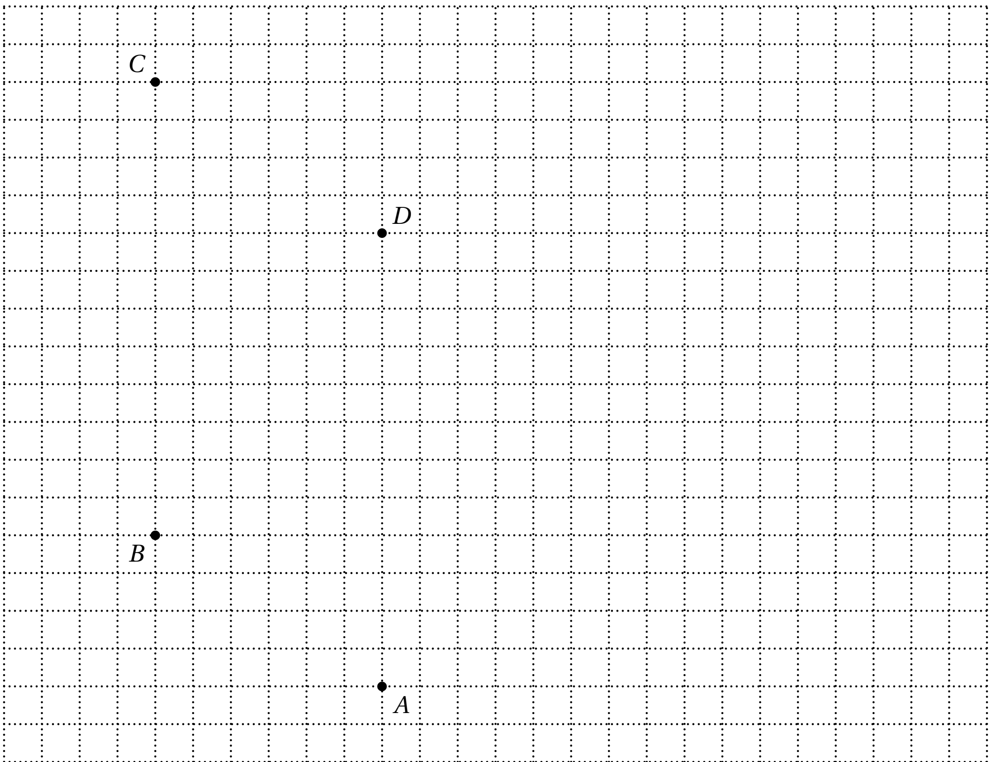


EXERCICE 1.2 (14 points)**.**
On donne sur la figure 1.2 de la présente page le parallélogramme $ABCD$.
Les points E, F, G et H sont définis par :

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Construire les points E, F, G et H.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{DG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BA}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour le quadrilatère $ABDG$?
3. On a vu dans la question 2b que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BA}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ puis de $\overrightarrow{DG}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour le point G et le segment $[DE]$?
4. (a) Exprimer $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ puis montrer que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ puis montrer que $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
   (d) Que peut-on en conclure ?
5. On a vu dans la question 4b que $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{HG}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HG}$? *On justifiera.*
   (d) Que peut-on en conclure ?

FIGURE 1.2 – Figure de l'exercice 1.2



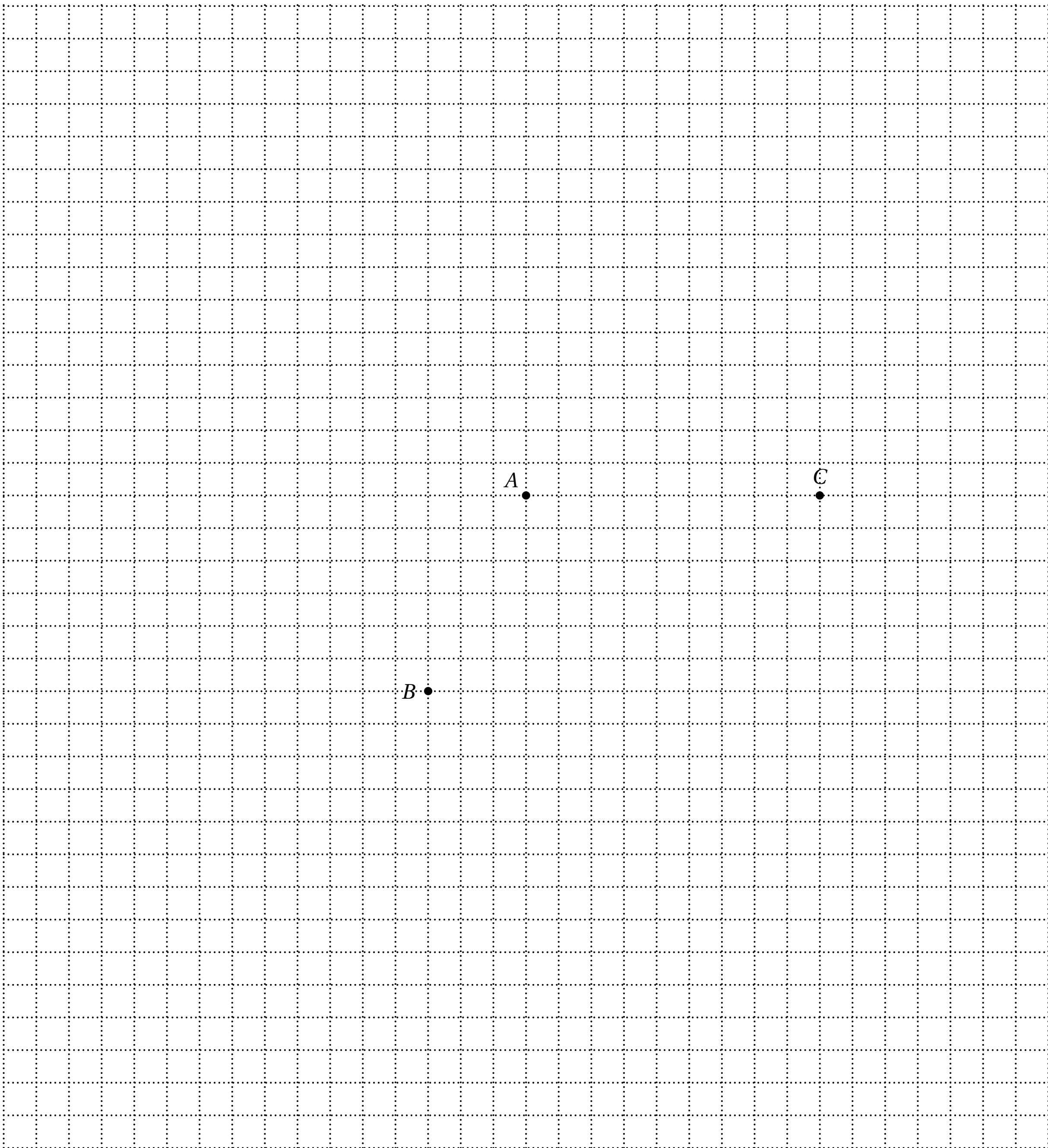
2^nde 11 – Devoir surveillé n°1

Vecteurs

EXERCICE 1.1 (6 points).
On donne sur la figure 1.1 de la présente page trois points A, B et C. Sur cette figure, construire les points D, E, F, G, H et I définis par :

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$
- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA}$
- $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$

FIGURE 1.1 – Figure de l'exercice 1.1

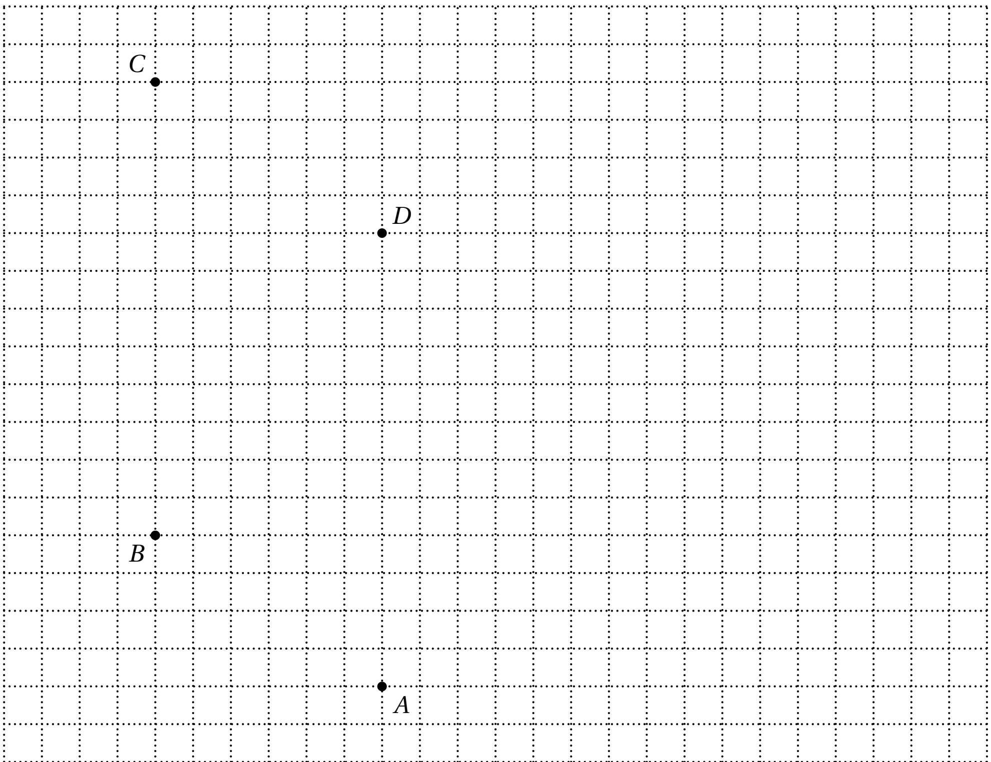


EXERCICE 1.2 (14 points)**.**
On donne sur la figure 1.2 de la présente page le parallélogramme $ABCD$.
Les points E, F, G et H sont définis par :

- $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1. Construire les points E, F, G et H.
2. (a) Exprimer $\overrightarrow{DG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BA}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour le quadrilatère $ABDG$?
3. On a vu dans la question 2b que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BA}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ puis de $\overrightarrow{DG}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour le point G et le segment $[DE]$?
4. (a) Exprimer $\overrightarrow{BF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}$ puis montrer que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ puis montrer que $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.
   (d) Que peut-on en conclure ?
5. On a vu dans la question 4b que $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   (b) En déduire $\overrightarrow{HG}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HG}$? *On justifiera.*
   (d) Que peut-on en conclure ?

FIGURE 1.2 – Figure de l'exercice 1.2



Chapitre 2

Repérage

Sommaire

2.1 Repères et coordonnées **17**
2.1.1 Repères 17
2.1.2 Coordonnées de vecteur 17
2.1.3 Coordonnées de point 18
2.2 Propriétés **19**
2.3 Exercices **20**
2.3.1 Repère donné 20
2.3.2 Repère à choisir 21
2.3.3 Algorithmique 22

2.1 Repères et coordonnées

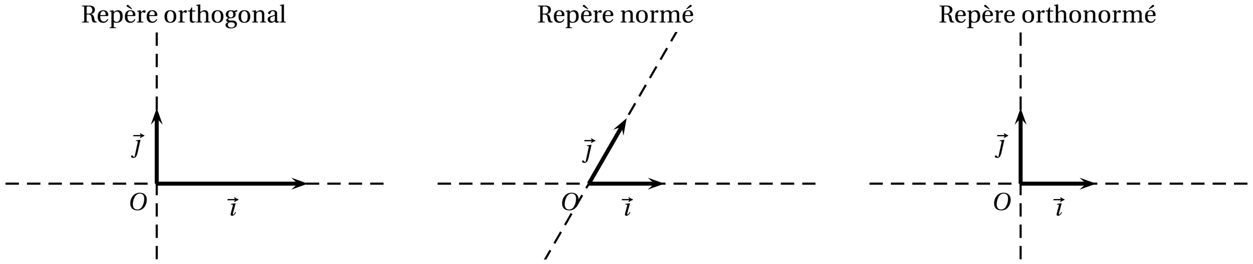
2.1.1 Repères

Définition 2.1. Soient O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes, alors $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *repère* du plan.

Remarque. O est appelée *origine* du repère et le couple $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *base* du repère.

Définition 2.2. Soit un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.

Repère orthogonal — Repère normé — Repère orthonormé



2.1.2 Coordonnées de vecteur

Propriété 2.1 (admise)**.** *Le plan est muni d'une base* $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. *Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x\,;y)$, *appelé* coordonnées de $\vec{u}$, *tel que* $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

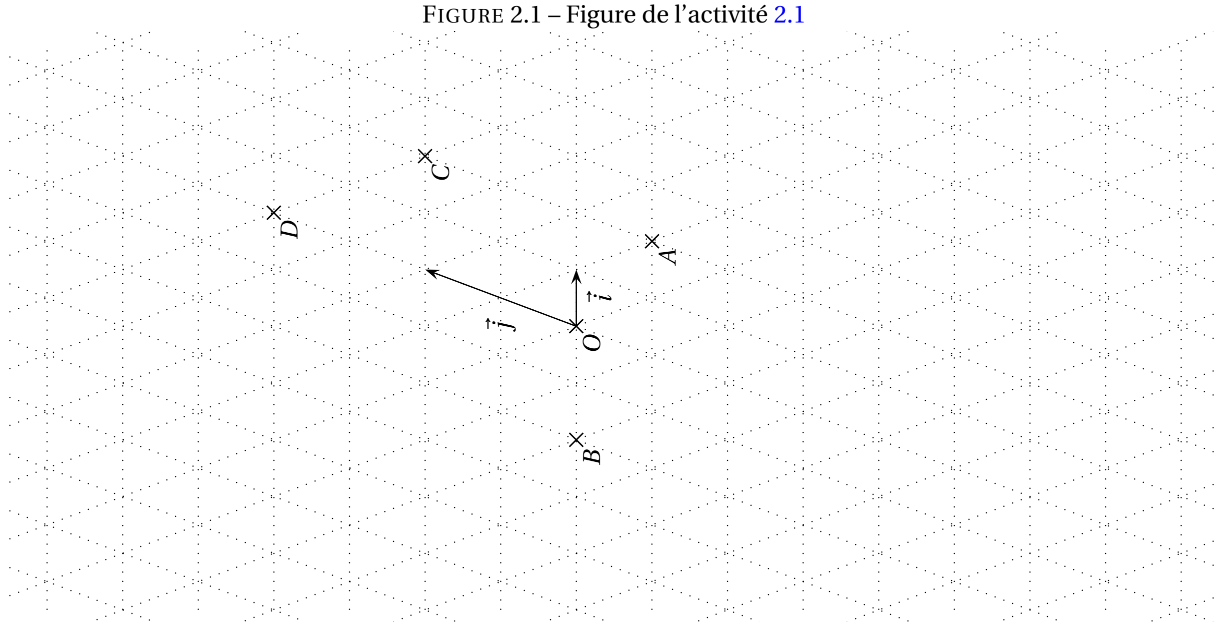
On notera indifférement $\vec{u}(x;y)$, ou $\vec{u}=(x;y)$, ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou $\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0;0)$.

ACTIVITÉ 2.1.
Sur la figure 2.1 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}$; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. (a) Soit E tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$. Construire E puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$.
   (b) Soit F tel que $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OC}$. Construire F puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$.
3. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?
4. (a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{DB}$. Que remarque-t-on ?
   (b) Construire un représentant du vecteur $\vec{v}=2\overrightarrow{OA}$. Déterminer ses coordonnées et les comparer à celles de $\overrightarrow{OA}$.
   (c) Soit K le milieu de $[AD]$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que remarque-t-on ?

FIGURE 2.1 – Figure de l'activité 2.1



Plus généralement, on a les propriétés suivantes :

Propriété 2.2. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}=(x;\,y)$ et $\vec{v}=(x';\,y')$ deux vecteurs et k un nombre.*
- *$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow$ .... = ... et .... = ...*
- *Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées* (......... ; ....).
- *Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées* (......... ; ....).

Elles seront démontrées en classe.

2.1.3 Coordonnées de point

Définition 2.3. Le plan étant muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M.

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

2.2 Propriétés

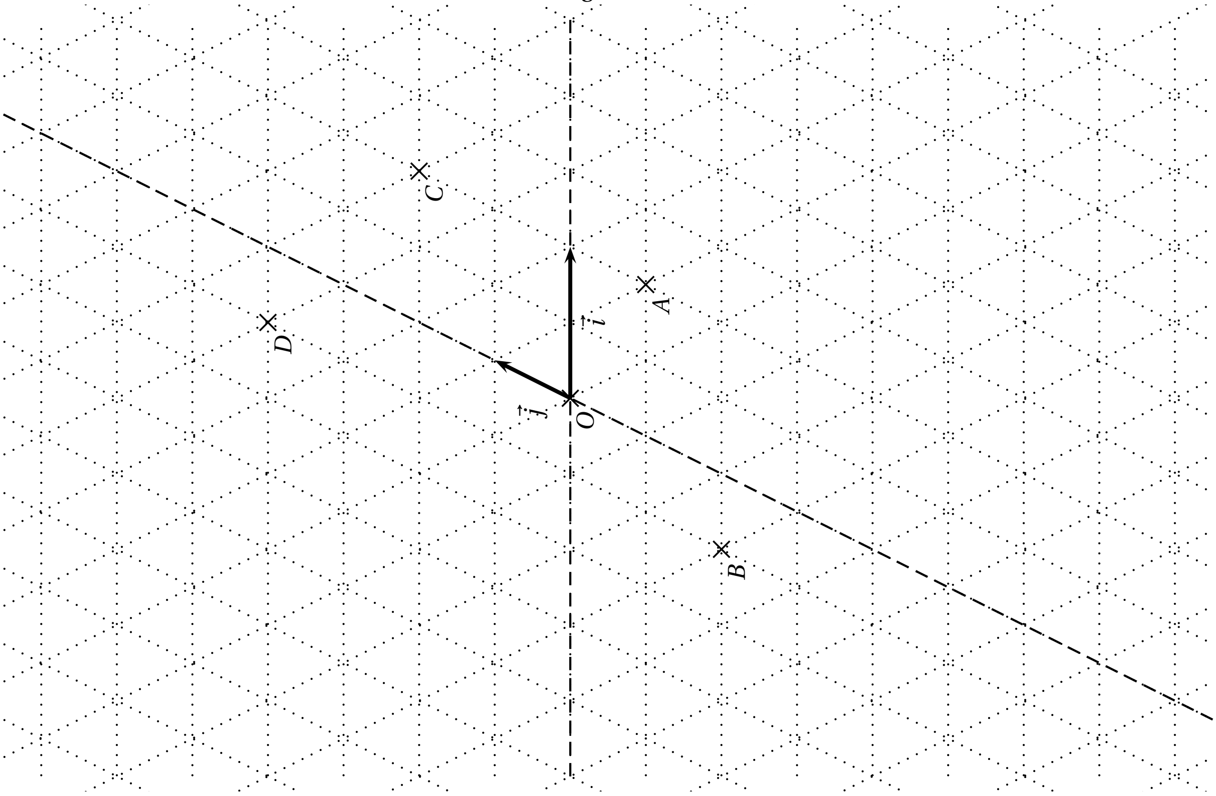
ACTIVITÉ 2.2.
Sur la figure 2.2 de la présente page ci-dessous, où le plan est muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

1. Placer les points $M(3;1)$, $N(-1;1,5)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-1)$.
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Par lectures graphiques, compléter le tableau suivant :

Point X	Coordonnées de X	Point Y	Coordonnées de Y	Coordonnées de $\overrightarrow{XY}$
A		B		
A		C		
A		D		
B		A		
B		C		
B		D		

Quel lien peut-on conjecturer entre les coordonnées des points X et Y et celles du vecteur $\overrightarrow{XY}$?

FIGURE 2.2 – Figure de l'activité 2.2



ACTIVITÉ 2.3.
En faisant quelques essais sur la figure de l'activité précédente, conjecturer le lien existant entre les coordonnées de deux points et les coordonnées du milieu de ces deux points.

Bilan et compléments

Les propriétés suivantes seront démontrées en classe :

Propriété 2.3. *Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (………… ; …………).

Propriété 2.4. *Soit P un plan muni d'un repère quelconque.*
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors $x_I =$ ………… *et* $y_I =$ …………

Propriété 2.5. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. Alors :*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 2.6. *Soit P un plan muni d'un repère* ***<u>orthonormé</u>****.*
Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

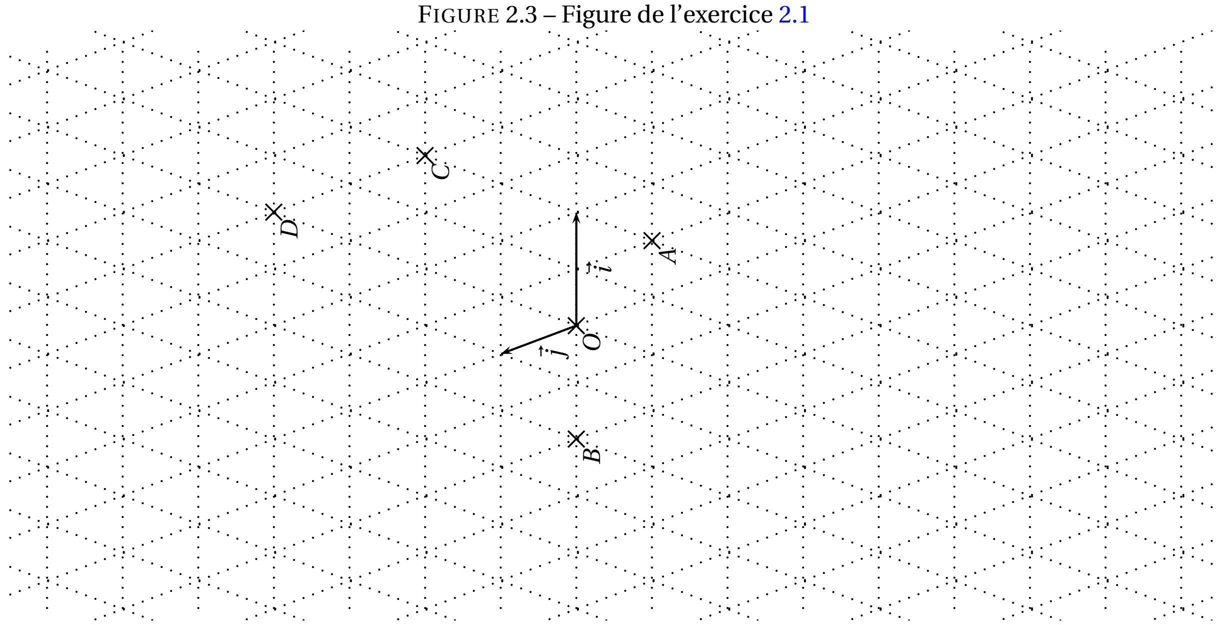
2.3 Exercices

2.3.1 Repère donné

EXERCICE 2.1.
Sur la figure 2.3 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $M(2;1)$, $N(-1,5;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(1,5;-1)$;
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.1



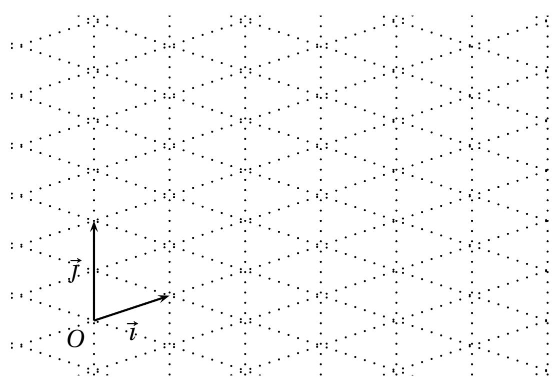
EXERCICE 2.2.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(2\,;\,-4)$, $B\,(-1\,;\,3)$, $C\,(-3\,;\,-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$, du vecteur $\overrightarrow{CB}$ et du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD} = \vec{u}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$?
4. Montrer que F milieu de $[OA]$.

EXERCICE 2.3.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(2\,;\,3)$ et $I\,(-4\,;\,1)$.
On sait que I est le milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées de B.

EXERCICE 2.4.
Sur le schéma ci-dessous où le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,1{,}5)$, $C(4\,;\,0{,}5)$ et $D(2\,;\,1)$;
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXERCICE 2.5.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A(-5;3)$, $B(-4;1)$ et $C(1;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2.6.
Le plan est muni du repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(-9;-10)$, $B(2;9)$, $C(5;3)$, $D(-1;-8)$ et $E(3;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 2.7.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

EXERCICE 2.8.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle ABC.

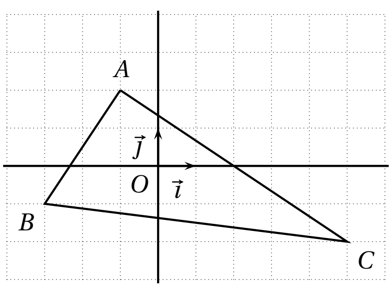
1. $A(-4;-1)$, $B(4;-2)$ et $C(-2;2)$
2. $A(-5;0)$, $B(3;-4)$ et $C(2;4)$
3. $A(0;0)$, $B(4;2\sqrt{3})$ et $C(-1;3\sqrt{3})$

EXERCICE 2.9.
Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne $A(1;1)$, $B(4;5)$ et $C(10;13)$.

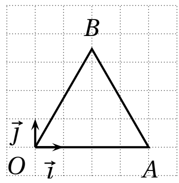
1. Déterminer les longueurs AB, AC et BC.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

EXERCICE 2.10.
Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on donne $A(-1;2)$, $B(-3;-1)$ et $C(5;-2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Montrer que :
   (a) Le périmètre p de ABC vaut $\sqrt{13}(3+\sqrt{5})$;
   (b) L'aire a de ABC est un nombre entier.



EXERCICE 2.11.
Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, A a pour coordonnées $(4;0)$ et le triangle OAB est équilatéral.
Démontrer que B a pour coordonnées $(2;2\sqrt{3})$.



EXERCICE 2.12.
Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on a appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3.
Pour chacun des points suivants, déterminer, par le calcul, s'il est sur le cercle $\mathscr{C}$ et, sinon, s'il est sur le disque délimité par $\mathscr{C}$.

- $B(-1;-2,8)$
- $C(2,5;-1,7)$
- $D(-1,5;2,5)$

EXERCICE 2.13.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$:

1. $A(1;0)$, $B(1;3)$, $C(2;3)$ et $D(3;1)$;
2. $A(1;2)$, $B(4;7)$, $C(1;6)$ et $D(-2;1)$;
3. $A(1;0)$, $B(0;2)$, $C(4;4)$ et $D(5;2)$;
4. $A(-4;-1)$, $B(4;-2)$, $C(8;5)$ et $D(0;6)$;
5. $A(0;-2)$, $B(3;-1)$, $C(2;2)$ et $D(-1;1)$.

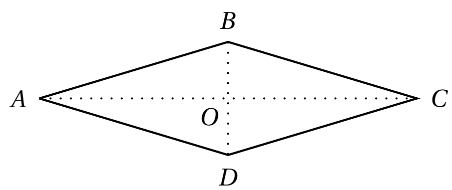
EXERCICE 2.14.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points $A(-3;-4)$, $B(3;2)$, $C(7;-2)$ et $D(1;-8)$.

1. Montrer que :
   (a) $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ;
   (b) $AC = BD$.
2. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
   (b) Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

2.3.2 Repère à choisir

EXERCICE 2.15.
Le quadrilatère $ABCD$ donné ci-dessous est un losange de centre O.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire de quel type est le repère et donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.

- $\left(A;\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$
- $\left(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$
- $\left(O;\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right)$
- $\left(D;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}\right)$



EXERCICE 2.16.
$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AD]$, E est le symétrique de B par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et montrer que D est le milieu de $[EC]$

EXERCICE 2.17.
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $AD = 5$ cm.
J est le point de $[AD]$ tel que $AJ = 3$ cm.
M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer la nature du triangle MJC.

EXERCICE 2.18.
$BOIS$ est un carré de côté 12 cm.
P est le milieu de $[BS]$ et N est le point de $[BO]$ tel que $BN = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer si le triangle PIN est rectangle.

EXERCICE 2.19.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm.
E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[OD]$.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et démontrer que le triangle CFE est rectangle et isocèle.

2.3.3 Algorithmique

EXERCICE 2.20.
Que fait l'algorithme suivant qui pourrait être en rapport avec ce chapitre ?

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
  f EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR a
  SAISIR b
  SAISIR c
  SAISIR d
  e PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
  f PREND_LA_VALEUR (b+d)/2
  AFFICHER e
  AFFICHER f
FIN_ALGORITHME
```

EXERCICE 2.21.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de deux points et retournant la distance entre ces deux points dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2.22.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de trois points A, B et C et dessinant le triangle ABC dans un repère.

EXERCICE 2.23.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de trois points A, B et C, calculant les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme et dessinant $ABCD$ dans un repère.

EXERCICE 2.24.
Écrire les algorithmes prenant comme argument les coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé et

- pour le premier : indiquant si le triangle est isoèle.
- pour le deuxième : indiquant si le triangle est équilatéral.
- pour le troisième : indiquant si le triangle est rectangle.
- pour le dernier : indiquant la nature du triangle.

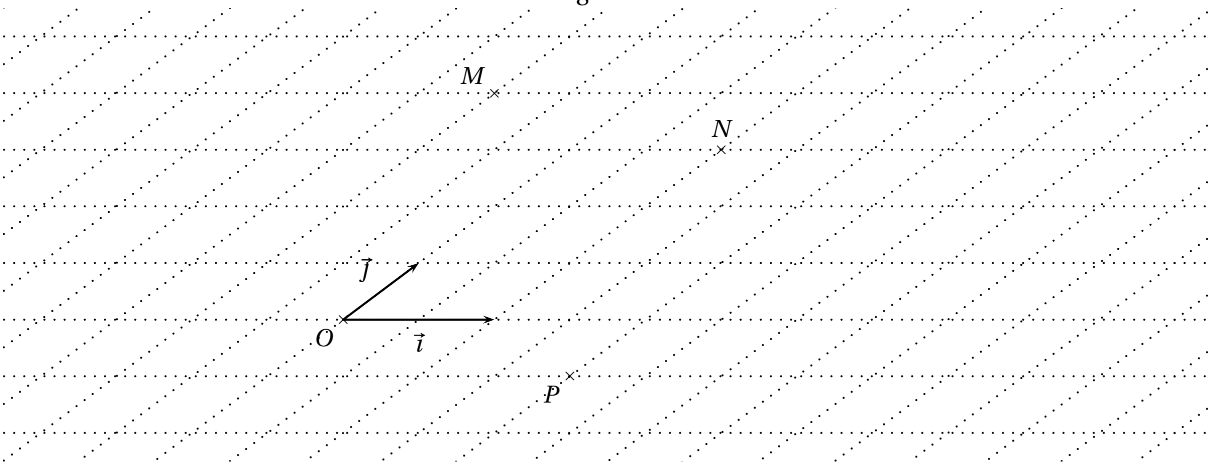
2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°2

Repérage

EXERCICE 2.1 (7,5 points)**.**
On donne la figure 2.1 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P
2. Placer les points $A\,(1\,;1)$, $B\,(3\,;2)$ et $C\,(1\,;4)$.
3. Déterminer, par le calcul, quelles sont les coordonnées de D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de I, sachant que I est le milieu du segment $[AB]$.
5. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de J, sachant que B est le milieu du segment $[CJ]$.

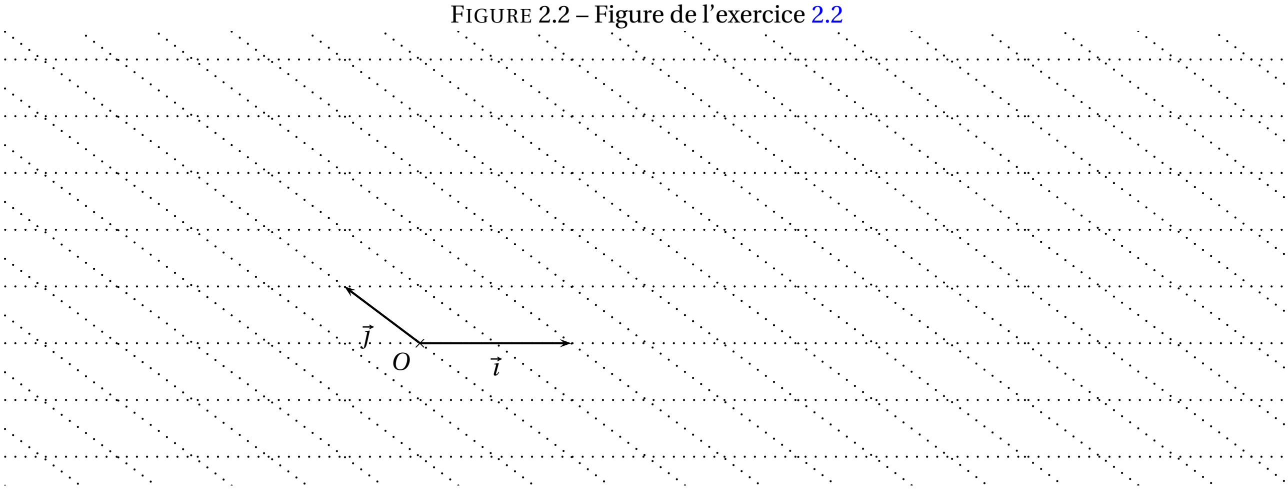
FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.2 (7 points)**.**
On donne la figure 2.2 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points $A\,(1\,;3)$, $B\,(2\,;2)$, $C\,(3\,;4)$, $D\,(5\,;2)$ et $E\,(4\,;0)$.
2. Montrer que les points A, B et E sont alignés.
3. Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.
4. Montrer que le quadrilatère $BEDC$ est un parallélogramme.

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2

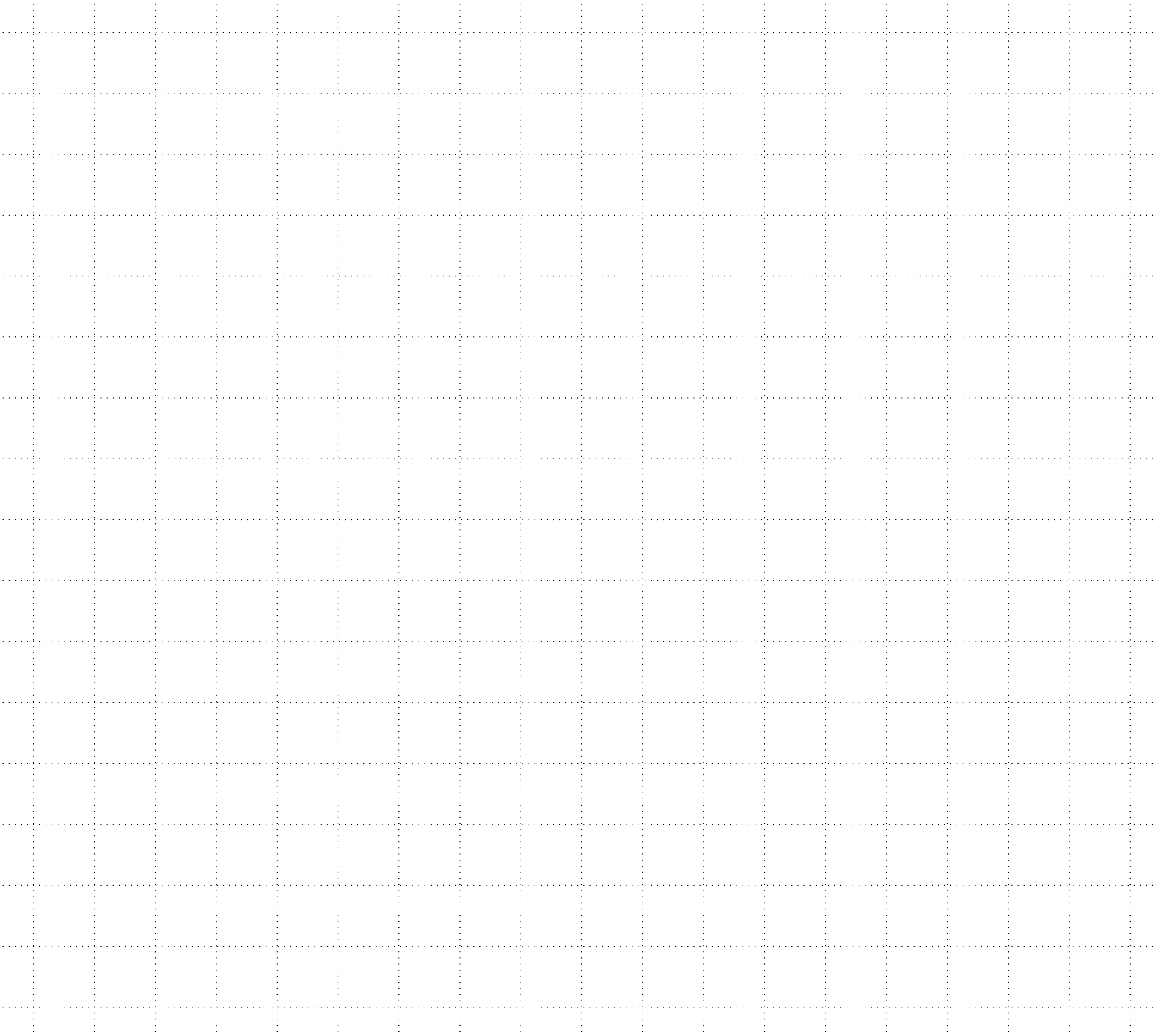


EXERCICE 2.3 (5,5 points)**.**
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(3;-3)$, $B(5;1)$, $C(-1;4)$ et $D(-3;0)$.

1. Faire une figure sur le quadrilage ci-dessous.
2. (a) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?

   (b) Prouver, par le calcul, que c'est bien le cas.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3



2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°2

Repérage

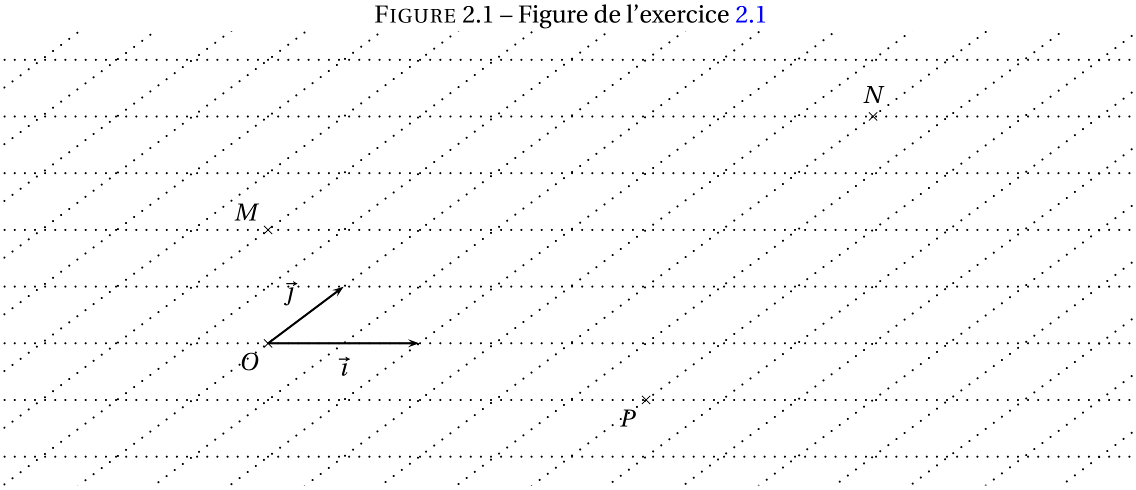
EXERCICE 2.1 (3 points)**.**
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A = (x-2)^2 - (2x+5)^2$
- $B = 3x^2 - 2x$

EXERCICE 2.2 (6 points)**.**
On donne la figure 2.1 page 27 où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P
2. Placer les points $A(1;1)$, $B(-1;3)$ et $C(1;4)$.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de I, sachant que I est le milieu du segment $[AC]$.
4. Déterminer, par le calcul, quelles sont les coordonnées de D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

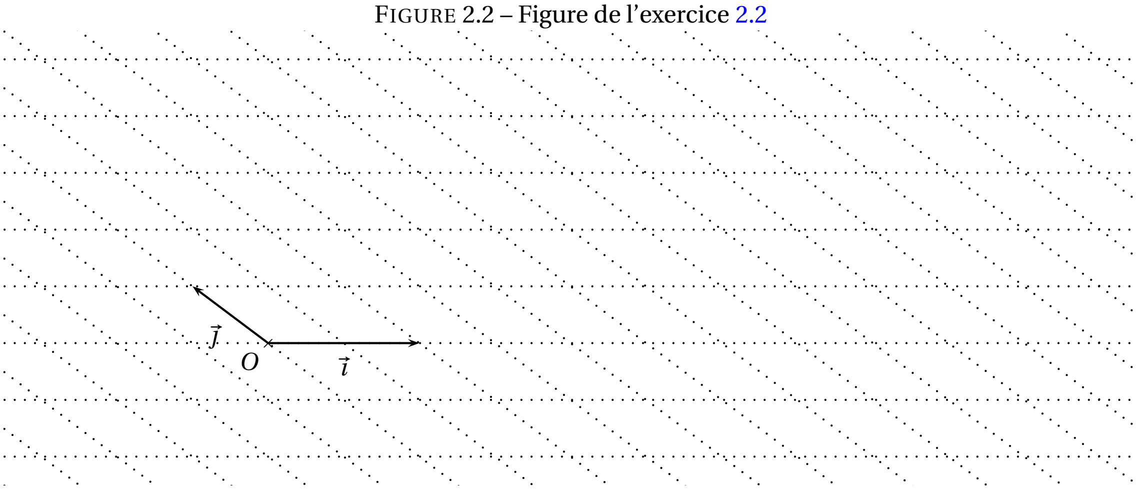
FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.3 (5,5 points)**.**
On donne la figure 2.2 page 27 où le plan est muni d'un repère quelconque $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points $A(1;3)$, $B(2;2)$, $C(3;4)$, $D(5;2)$ et $E(4;0)$.
2. Montrer que les points A, B et E sont alignés.
3. Montrer que les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2

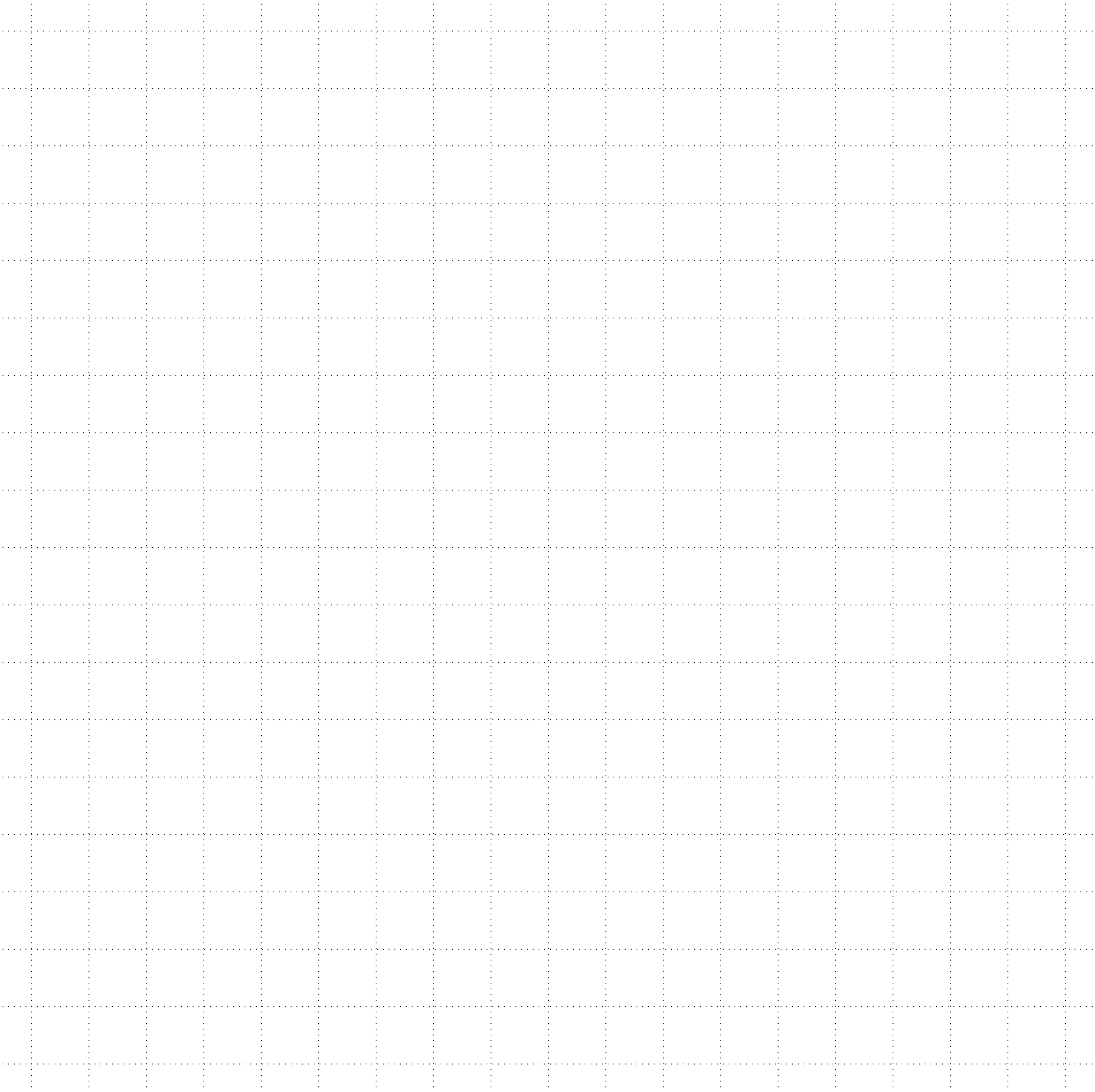


EXERCICE 2.4 (5,5 points)**.**
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2\,;-3)$, $B(2\,;2)$, $C(-2\,;5)$ et $D(-2\,;0)$.

1. Faire une figure sur le quadrilage ci-dessous.
2. (a) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?

   (b) Prouver, par le calcul, que c'est bien le cas.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3



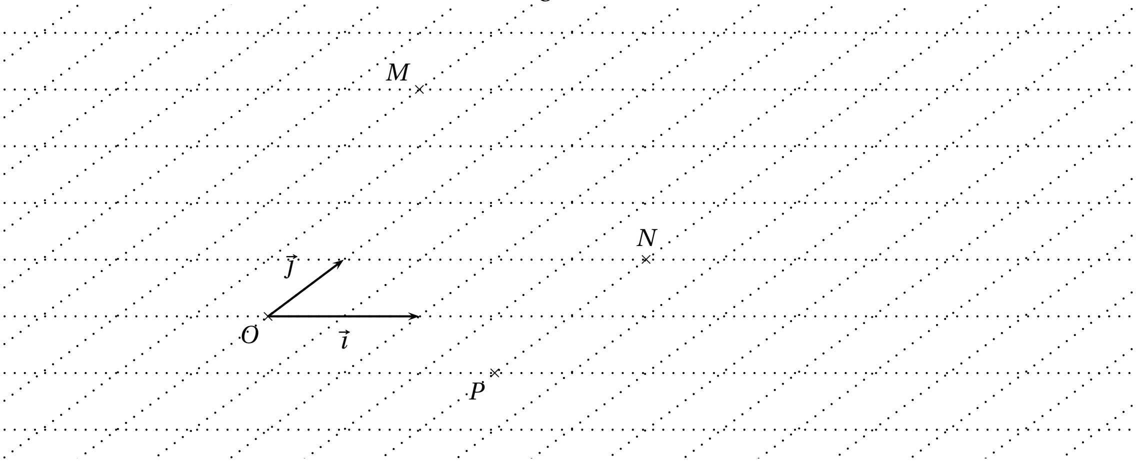
Devoir surveillé n°2 : rattrapage

Repérage

EXERCICE 2.1 (7,5 points)**.**
On donne la figure 2.1 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P
2. Placer les points $A(-0,5;2)$, $B(2;-1)$ et $C(2,5;2)$.
3. Déterminer, par le calcul, quelles sont les coordonnées de D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Déterminer, par le calcul, les coordonnées de I, sachant que I est le milieu du segment $[AC]$.
5. Déterminer, mar le calcul, les coordonnées de J, sachant que A est le milieu du segment $[JB]$.

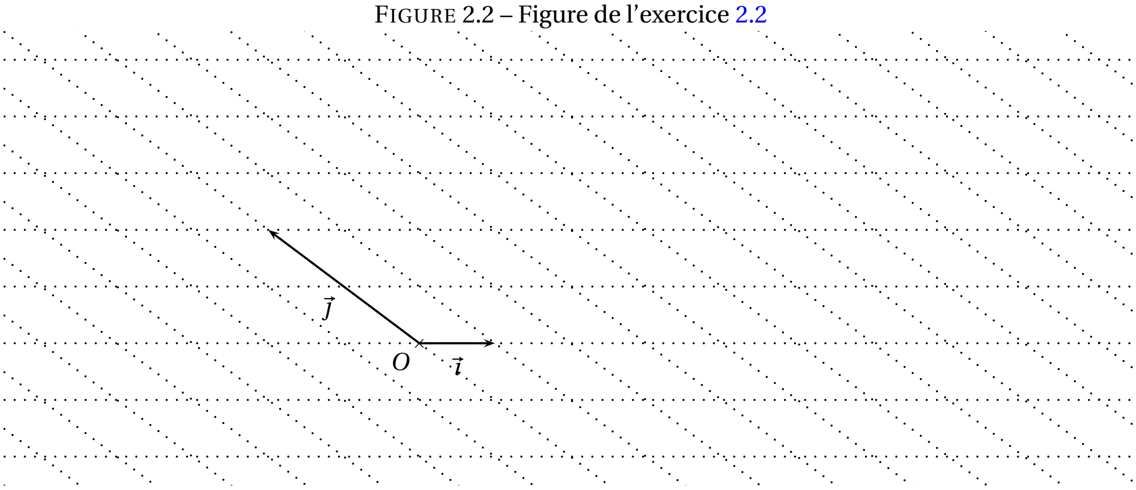
FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.2 (7 points)**.**
On donne la figure 2.2 de la présente page où le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Placer les points $A(2,;1)$, $B(0;2)$, $C(5;-0.5)$, $D(3;2,5)$ et $E(8;0)$.
2. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
3. Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.
4. Montrer que le quadrilatère $BCED$ est un parallélogramme.

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2



EXERCICE 2.3 (5,5 points)**.**
Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(4\,;0)$, $B(6\,;2)$, $C(-1\,;5)$ et $D(1\,;7)$.

1. Faire une figure sur le quadrilage ci-dessous.
2. (a) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?

   (b) Prouver, par le calcul, que c'est bien le cas.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.3

Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Activité **29**
3.2 Premières notions **31**
3.2.1 Notion de fonction 31
3.2.2 Ensemble de définition 31
3.2.3 Tableau de valeurs 32
3.2.4 Représentation graphique 32
3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations **34**
3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$ 34
3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$ 34
3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$ 35
3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$ 35
3.4 Variations, extremums **35**
3.4.1 Sens de variation 35
3.4.2 Tableau de variations 36
3.4.3 Extremums 37
3.5 Exercices et problèmes **37**
3.5.1 Premières notions 37
3.5.2 Résolutions graphiques 40
3.5.3 Variations, extremums 41

3.1 Activité

PROBLÈME 3.1.
On dispose d'une feuille cartonnée de dimensions $\ell \times L$ avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela, on découpe à chaque coin de la feuille un carré de côté x comme indiqué sur la figure 3.1 page suivante. On obtient le patron de la boîte (qu'on plie suivant les pointillés pour obtenir la boîte).
Le problème est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le volume de la boîte est maximal.

Travail préparatoire Avec votre voisin prendre une feuille A4 et :

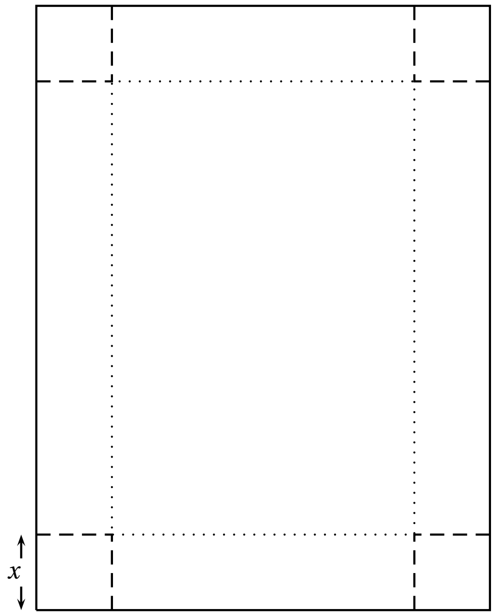
- choisir une valeur pour x ;
- découper un carré de côté x à chacun des coins pour réaliser le patron de la boîte ;
- reconstituer la boîte ;
- calculer le volume de la boîte.

Faire de même avec une autre feuille en choisissant une autre valeur de x.

Formules Pour la suite et pour simplifier les calculs, nous considèrerons que la feuille de départ à comme dimensions 24×32.

1. Entre quelles valeurs peut alors varier x ?
2. Calculer le volume de la boîte pour $x = 2$ cm puis pour $x = 3$ cm puis pour $x = 5$ cm.
3. Déterminer les formules qui donnent, en fonction de x, la longueur et la largeur de la base de la boîte et sa hauteur. En déduire la formule qui donne le volume de la boîte en fonction de x.
   Faire contrôler votre formule par le professeur.

FIGURE 3.1 – Figure du problème 3.1



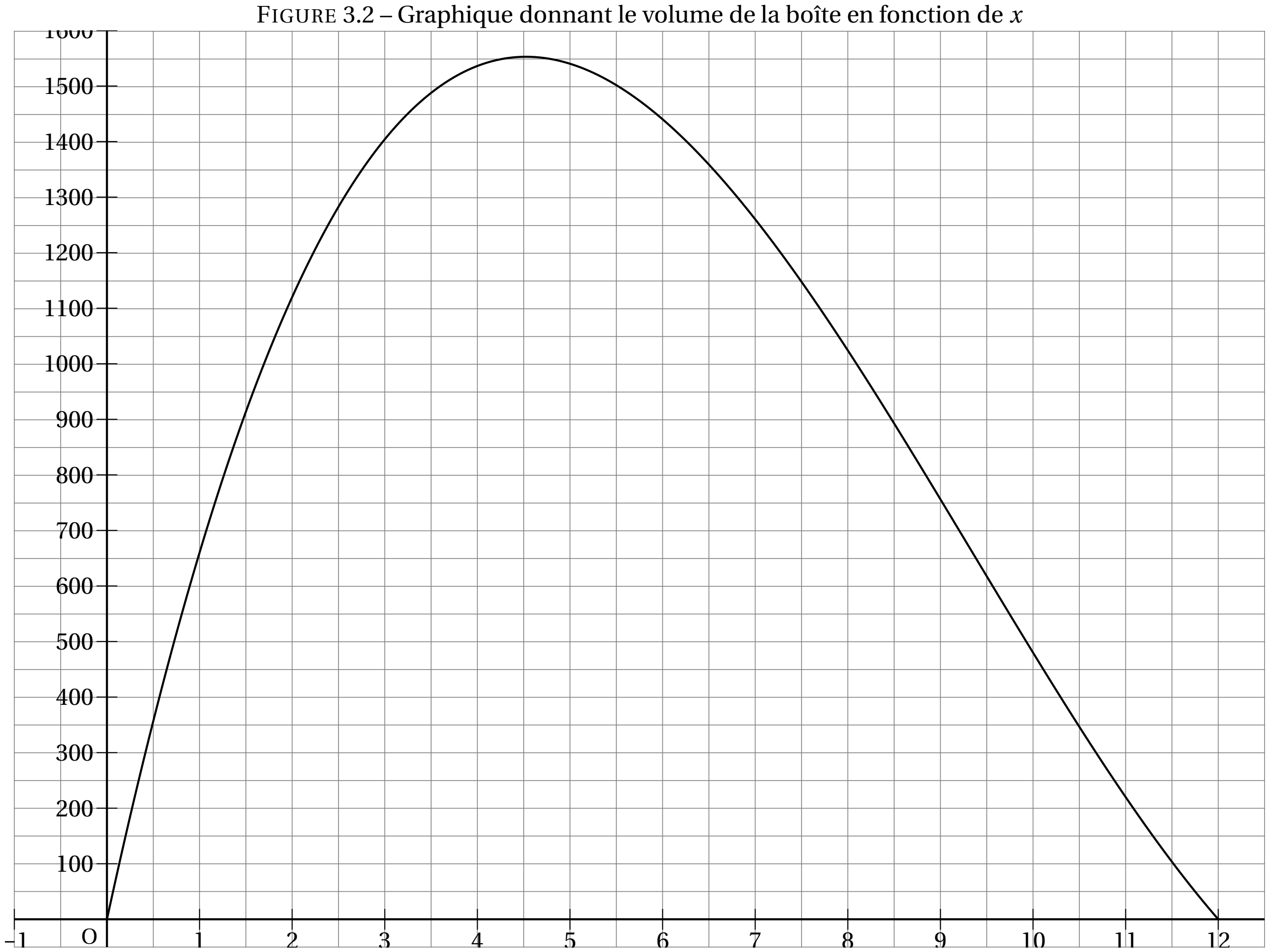
Utilisation de la calculatrice Nous allons obtenir un graphique qui indique en fonction des valeurs de x, en abscisses, les valeurs du volume, en ordonnées, puis nous allons obtenir un tableau de valeurs.

- **Le graphique**
  Sur les Casio il faut d'abord choisir *graphique* (ou *Graph*) puis entrer la formule tandis que sur les TI il faut d'abord entrer la formule ($Y =$ ou $f(x) =$) puis choisir *graphique*.
  Dans tous les cas entrer la formule trouvée à la question 3 et afficher le graphique. *Régler la fenêtre d'affichage au besoin (*V-Windows *ou* Def-Fenêtre*) afin de voir entièrement la courbe pour les valeurs de x trouvées à la question 1.*
  Par lecture graphique, parmi les valeurs de x, déterminer celle pour laquelle le volume de la boîte semble être le plus grand.
- **Le tableau de valeurs**
  Sur les Casio il faut d'abord choisir *tableau* (ou *Tabl*) puis entrer la formule tandis que sur les TI il faut d'abord entrer la formule ($Y =$ ou $f(x) =$) puis choisir *tableau*.
  Dans tous les cas, la formule entrée précédemment est gardée en mémoire donc afficher directement le tableau.
  Modifier les paramètres du tableau (en choisissant Range *ou* Def.Tabl*) pour que les valeurs de x varient entre les valeurs trouvées à la question 1, le pas (ou* Picth*) étant égal à 1.*
  Noter ces résultats sur votre cahier. Contrôler les résultats de la question 2.
  Parmi les valeurs de x, déterminer celle pour laquelle le volume de la boîte semble être le plus grand.
  À l'aide de ce tableau, reconstituer sur son cahier le graphique.

Exploitation de la courbe représentative ou du tableau Vous trouverez sur la figure 3.2 page ci-contre le graphique qui donne le volume de la boîte en fonction de x et vous disposez du tableau de valeurs obtenu à la question précédente.
On note $V(x)$ ce volume. Ainsi $V(2) = 1120\,\text{cm}^3$ car pour $x = 2\,\text{cm}$, on peut lire graphiquement ou dans le tableau de valeurs que le volume est de $1120\,\text{cm}^3$.
À l'aide du graphique ou du tableau de valeurs, répondre aux questions suivantes.

1. Pour quelle valeurs de x, peut-on déterminer $V(x)$?
   L'ensemble des valeurs possibles pour x est appelé *ensemble de définition* de V.
2. Quel est le volume pour $x = 5\,\text{cm}$?
   Compléter $V(5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   On dit que :
   - 5 *a pour image* .... par la fonction V ;
     .... *est l'image de* 5 par la fonction V ;
   - .... *a pour antécédent* 5 par la fonction V ;
     5 *est un antécédent* de .... par la fonction V.
3. Pour quelles valeurs de x, le volume est-il de 1000 cm^3 ?
   Compléter :
   - 1000 a pour antécédent(s) .... par la fonction V ;
4. Peut-on déterminer l'image de 13 par la fonction V ? Pourquoi ?
   Peut-on déterminer les antécédents de 1600 par la fonction V ? Pourquoi ?

FIGURE 3.2 – Graphique donnant le volume de la boîte en fonction de x



3.2 Premières notions

3.2.1 Notion de fonction

Définition 3.1. Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe un élément y d'un ensemble d'arrivée.
Les fonctions sont désignées par des lettres, en général f, g, h, etc.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f(x) = y$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y »..
On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.
x sera parfois appelé *la variable* et y sera parfois appelé *la grandeur* qui est fonction de x.
Si l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$, la fonction est dite *fonction numérique*.

L'ensemble de départ peut être imposé par la définition de la fonction, c'est-à-dire le contexte dans lequel on définit la fonction.
Un élément de l'ensemble de départ a *au plus* une image : certains éléments n'ont pas d'image et ceux qui en ont n'en ont qu'une.
Un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents.

3.2.2 Ensemble de définition

Définition 3.2. L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction f*. On le note souvent D_f.

En Seconde, la plupart des fonctions numériques définies par une expression algébrique seront définies sur $\mathbb{R}$ sauf dans les cas suivants :
- un quotient n'est défini que lorsque son dénominateur est différent de 0 (on ne divise pas par 0) ;
- on ne peut prendre la racine carrée d'une quantité que si elle est positive.

3.2.3 Tableau de valeurs

On peut associer à une fonction un tableau de valeurs. Il comporte deux lignes : la première regroupe des antécédents et la seconde leurs images respectives par cette fonction.
Un tableau de valeurs peut aussi définir une fonction.

Exemple. Fonction donnant un tableau de valeurs.
À la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ on peut associer, par exemple, le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3	9	17

Exemple. Tableau de valeurs définissant une fonction.
Le tableau suivant donne le nombre de titulaires du R.M.I. tous les deux ans :

Année	1989	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005
Nombre de titulaires du R.M.I.	396 160	567 556	774 803	925 286	1 045 303	1 120 251	1 051 725	1 120 844	1 266 400

On peut définir la fonction f qui à chaque année associe le nombre de titulaires du R.M.I.
Ainsi $f(1989) = 396160$, $f(1991) = 567556$, etc.

3.2.4 Représentation graphique

On peut associer à une fonction une représentation graphique et l'on peut définir une fonction à partir d'une représentation graphique.

Définition 3.3 (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :
- L'abscisse x de M décrit l'ensemble de définition D_f ;
- L'ordonnée y est l'image de x par f. $y = f(x)$.

On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction f.

Remarque. L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on utilise souvent un tableau de valeurs.

Exemple. Reprenons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et le tableau de valeurs déjà obtenu :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3	9	17

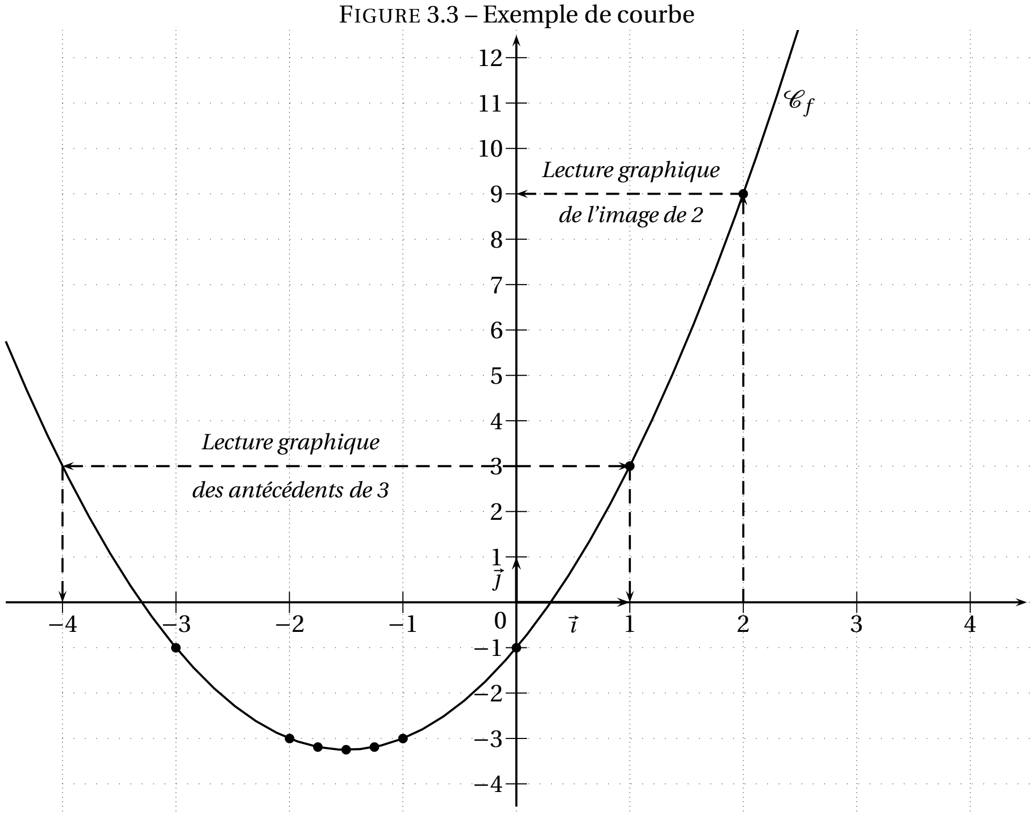
On place les points $(x; f(x))$ correspondants dans un repère, notés ici $\bullet$
On obtient une courbe qui semble régulière mais on complète le tableau avec des valeurs de x entre -2 et -1 pour préciser l'allure de la courbe là où elle semble avoir un sommet :

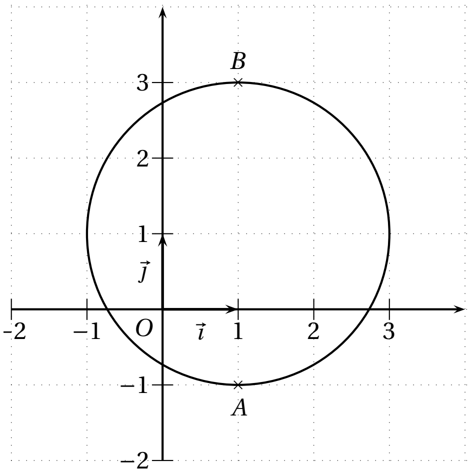
x	-2	$-1,75$	$-1,5$	$-1,25$	-1
$f(x)$	-3	$-3,1875$	$-3,25$	$-3,1875$	-3

On place les nouveaux points.
La courbe semblant suffisamment détaillée, on la trace (voir la figure 3.3 page suivante).

Remarque. Une courbe ne représente pas toujours une fonction. Sur le schéma ci-dessous, par exemple, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1, -1)$ et $B(1, 3)$. Ce n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction car alors 1 aurait plusieurs images.

FIGURE 3.3 – Exemple de courbe



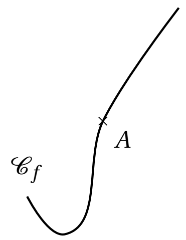


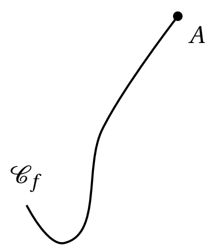
Quelques conventions graphiques

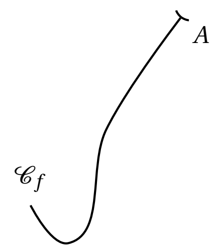
Lorsqu'un point A sur la courbe est connu avec précision, il est noté par une croix.

Lorsqu'un point A est l'extrémité de la courbe, il est noté par un gros point.

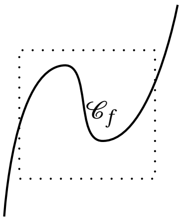
Lorsqu'un point A à l'extrémité de la courbe n'appartient pas à la courbe, il est noté par une « encoche ».



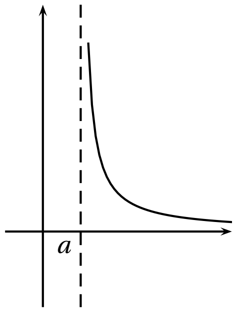




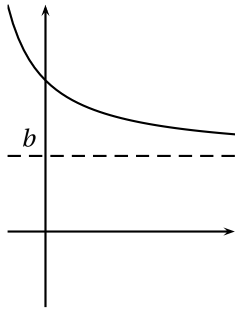
Une courbe est donnée dans une fenêtre ; s'il n'y a pas d'extrémités, la courbe garde la même allure quand on la prolonge.



Une droite verticale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite. Sur l'exemple ci-dessous, a n'appartient pas à D_f.



Une droite horizontale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite.

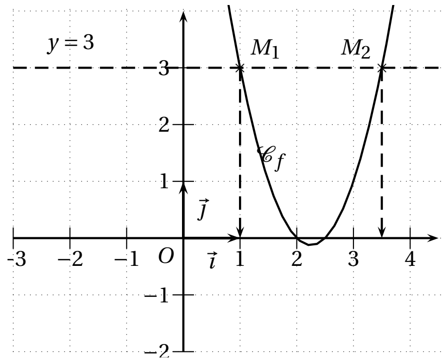


3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$

Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément k de l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction f.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de f et on obtient :



On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3. Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.
On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont 1 et $\frac{7}{2}$ car les points de la courbe de f d'ordonnée 3 ont pour abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ ».

3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{5}{2}\right]$. Ou bien $S = \left[0;\frac{5}{2}\right]$.

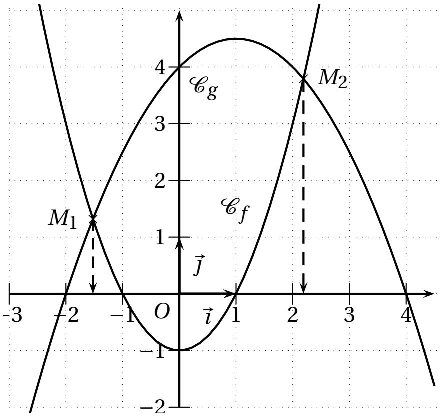
Remarque. • On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.
On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.
Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.
  Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{5}{2}\right[$.

3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$

Cela revient à chercher les éléments de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g.
Une telle recherche peut se faire graphiquement. On recherche alors les points des deux courbes représentatives ayant même abscisse et même ordonnée, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes. Une telle résolution ne donne pas toujours les valeurs exactes, la lecture graphique tant parfois approximative.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 + x + 4$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
On commence par tracer soigneusement les deux courbes représentatives et on obtient :



On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1,5$ et $2,2$.
Les solutions sont donc $x \approx -1,5$ et $x \approx 2,2$.

3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1,5$ et 2,2.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5; 2,2]$. Ou bien $S = [-1,5; 2,2]$.

Remarque.
- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.
  On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.
  Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5] \cup [2,2; +\infty[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
  Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5; 2,2[$.

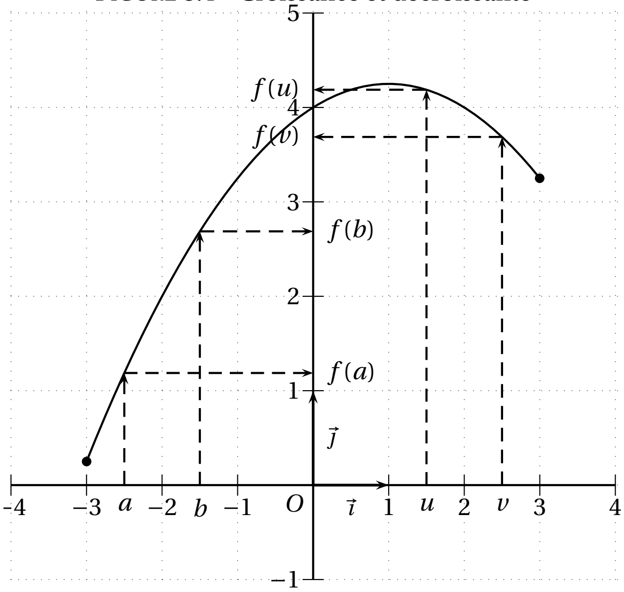
3.4 Variations, extremums

3.4.1 Sens de variation

Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

Exemple. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3; 3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure 3.4 page suivante. On constate que lorsque $x \in [-3; 1]$, si x augmente, $f(x)$ augmente aussi alors que lorsque $x \in [1; 3]$, si x augmente, $f(x)$ diminue.
C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction f.

FIGURE 3.4 – Croissance et décroissante



Définition 3.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est
- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- *monotone* si elle n'est que croissante sur I ou si elle n'est que décroissante sur I.
- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarque. • Ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** et pas sur une réunion d'intervalles disjoints.
- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- On obtient les définitions d'une fonction *strictement* croissante ou *strictement* décroisante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. Ainsi on dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I

3.4.2 Tableau de variations

Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau de variation, qui est une forme stylisée de courbe représentative où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f.

Exemple. Dans l'exemple précédent on obtient

x	-3		1		3
f			$\approx 4,25$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\approx 0,25$				$\approx 2,25$

Exemple. Le tableau ci-contre indique que la fonction f est croissante lorsque $x \in [-2;-1]$, décroissante lorsque $x \in [-1;1]$ et constante lorsque $x \in [1;2]$.
Il indique aussi que $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $f(x) = -2$ pour tout $x \in [1;2]$.

x	-2		-1		1		2
f			3				
		$\nearrow$		$\searrow$			
	-1				-2	$\longrightarrow$	-2

3.4.3 Extremums

Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément :

Définition 3.5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que
- f admet un *maximum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- f admet un *minimum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Les maximum et minimum sont appelés les *extremums*.

Remarque. Un extremum doit être atteint par une valeur x_0.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'admet pas -1 comme minimum.
En effet, si on a bien $f(x) \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de x_0 tel que $f(x_0) = -1$.
Par contre 1 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ car
- $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **ET**
- $f(0) = 1$

On dira donc : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 et il est atteint pour $x_0 = 0$.

3.5 Exercices et problèmes

3.5.1 Premières notions

EXERCICE 3.1.
Dire dans chacun des exemples ci-dessous quel est l'ensemble de définition, quelles sont les images possibles et si la fonction est numérique.

1. À chaque élève de la classe on associe la couleur de ses cheveux.
2. À chaque élève de la classe on associe le nombre de ses frères et soeurs.
3. Pour un élève donné, on associe la taille qu'il mesurait à chaque moment de sa vie.
4. Soit $ABCD$ un rectangle dont un des côtés est fixe et mesure 6 cm et l'autre est variable et mesure x cm.
   On définit la fonction f de la façon suivante : à chaque x possible, on associe $f(x)$, l'aire du rectangle $ABCD$.
5. La fonction g définie par $g(x) = x^2 + 2x + 3$.
6. La fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.
7. La fonction i définie par $i(x) = \sqrt{x+2}$.

EXERCICE 3.2.
On définit f et g, deux fonctions :
- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6.
- $g : x \mapsto x^2 - 4$.

1. Donner l'expression correspondant à f puis simplifier cette expression.
2. Quel réel n'a pas d'image par f ?
3. Quelle est l'image de 3 par g ?
4. Quelle est l'image de -1 par g ?
5. Quels sont les antécédents éventuels de 12 par g ?
6. Quels sont les antécédents éventuels de -5 par g ?

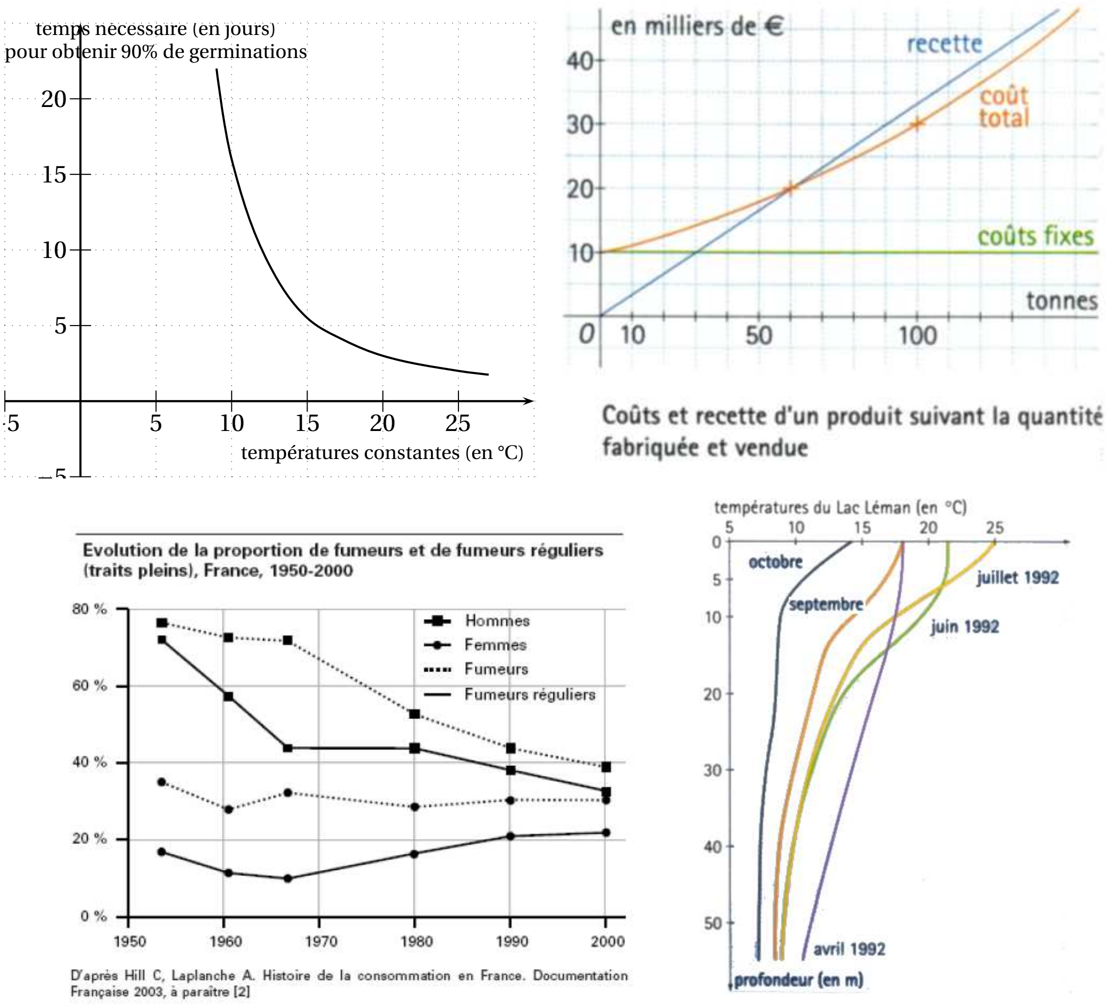
EXERCICE 3.3.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*

1. $f(-2) = 0$ signifie que l'image de 0 est -2
2. $f(0) = 3$ signifie que la courbe de f passe par le point $(0;3)$
3. $f(1) = 2$ signifie que l'antécédent de 1 est 2
4. L'image de 2 par f est -3 s'écrit $f(2) = -3$
5. Dire que $(5;1)$ est un point de la courbe de f s'écrit $5 = f(1)$
6. Par la fonction g, -5 est l'image de 3 s'écrit $g(-5) = 3$
7. 2 a pour image 0 par f signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses en 2

8. $f(4)=0$ signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point $(4;0)$
9. 3 a pour image 5, signifie que 3 est l'image de 5
10. 4 a pour antécédent 5 signifie que 5 est l'image de 4

EXERCICE 3.4 (Variable, grandeur)**.**
Dans chacune des situations de la figure 3.5 de la présente page, indiquer quelle est la variable et quelle est la grandeur qui en dépend.

FIGURE 3.5 – Figure de l'exercice 3.4



EXERCICE 3.5.
Vrai ou faux ? *Justifier la réponse lorsque c'est faux.*
Les courbes de la figure 3.6 page ci-contre représentent des fonctions de la variable x.

EXERCICE 3.6.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure 3.7 page suivante.

1. La fonction f est définie entre -2 et 6 inclus
2. Les images par la fonction f sont comprises entre -1 et 4 inclus
3. La fonction g est définie entre -2 exclu et 6 inclus
4. Les images par la fonction g sont comprises entre 0 exclu et 3 inclus

EXERCICE 3.7.
Vrai ou faux ? *Corriger la proposition lorsqu'elle est fausse.*
- D'après la représentation graphique de la figure 3.8 page ci-contre $D_f=[-4;2]$
- D'après la représentation graphique de la figure 3.8 page suivante $D_g=]-\infty;3[\cup]3;5]$

FIGURE 3.6 – Courbes de l'exercice 3.5

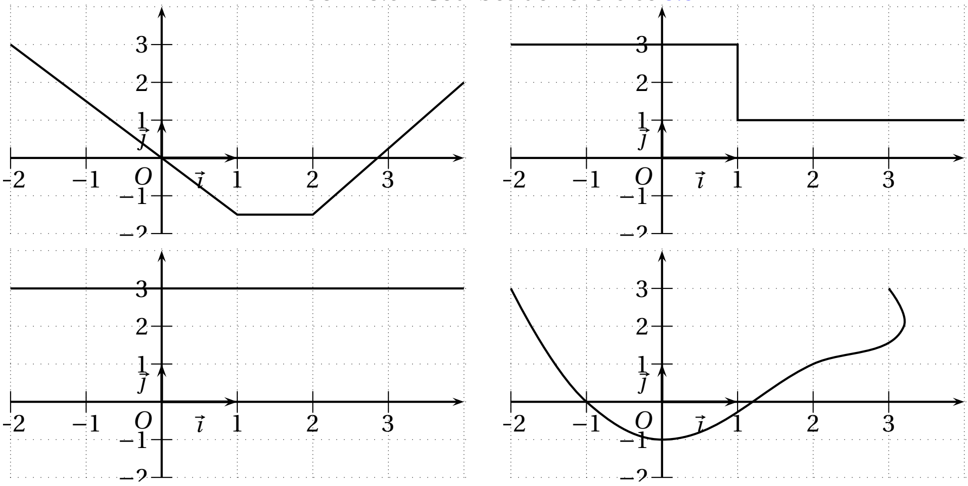


FIGURE 3.7 – Courbes de l'exercice 3.6

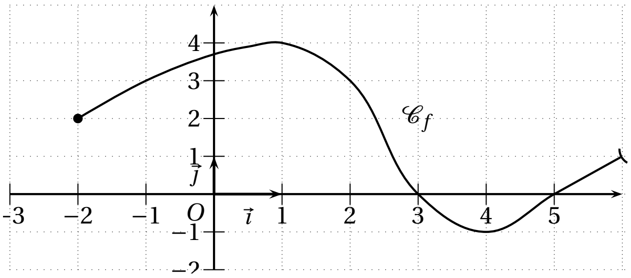
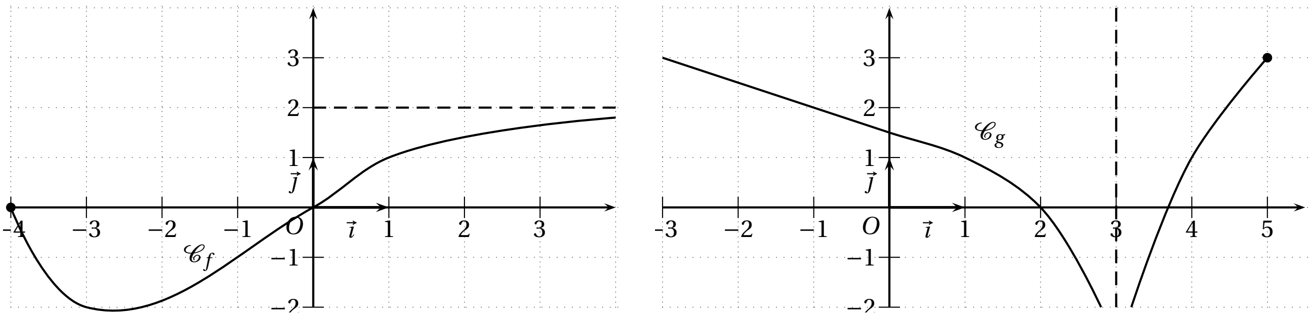


FIGURE 3.8 – Courbes de l'exercice 3.7



EXERCICE 3.8 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-1,5;2]$ par : $f(x) = 2x^3 - 1,5x^2 - 3x$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f.

EXERCICE 3.9 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Après avoir dressé un tableau de valeurs de la fonction, tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3.10.
Tracer une représentation graphique possible d'une fonction f sachant que :

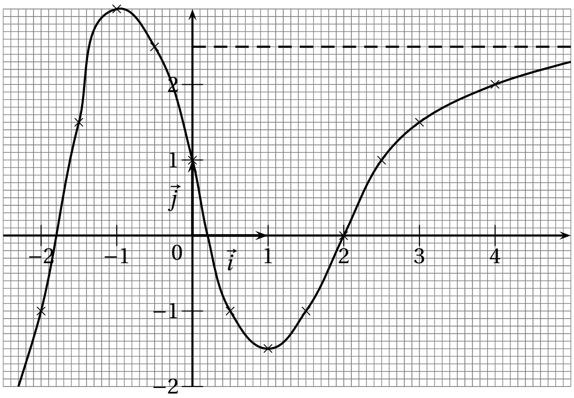
- $D_f = [-2;2]$;
- $f(1) = 3$;
- 0 admet deux antécédents ;
- $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

3.5.2 Résolutions graphiques

EXERCICE 3.11.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
$\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f a déjà été obtenue dans l'exercice 3.9.

1. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$, avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :
   (a) Quelle est l'image de 2 ?
   (b) Quelle est l'image de 3 ?
   (c) Quelle est l'image de 4 ?
   (d) Quels sont les antécédents de 1 ?
   (e) Quels sont les antécédents de 2 ?
   (f) Quels sont les antécédents de -2 ?
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -1,5$;
   (c) $f(x) \geqslant -1$;
   (d) $f(x) < 4$;
   (e) $f(x) > -3$;
   (f) $f(x) < -2$.

EXERCICE 3.12.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:

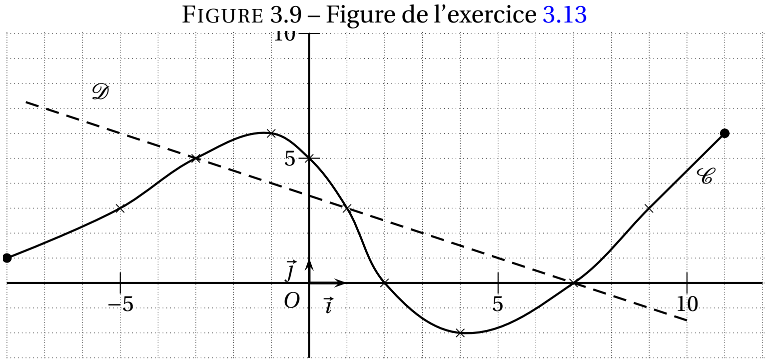


Avec la précision permise par le graphique, résoudre :

1. Les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$;
   (b) $f(x) = 0$;
   (c) $f(x) = -1$;
   (d) $f(x) = 2$.
2. Les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 1$;
   (b) $f(x) \geqslant 0$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) > 2$.

EXERCICE 3.13.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 3.9 de la présente page représente une fonction f et la droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.

FIGURE 3.9 – Figure de l'exercice 3.13



1. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -2$;
   (c) $f(x) = 0$;
   (d) $f(x) = 6$.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant 3$;
   (c) $f(x) > 5$.
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
4. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 3.14.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$.

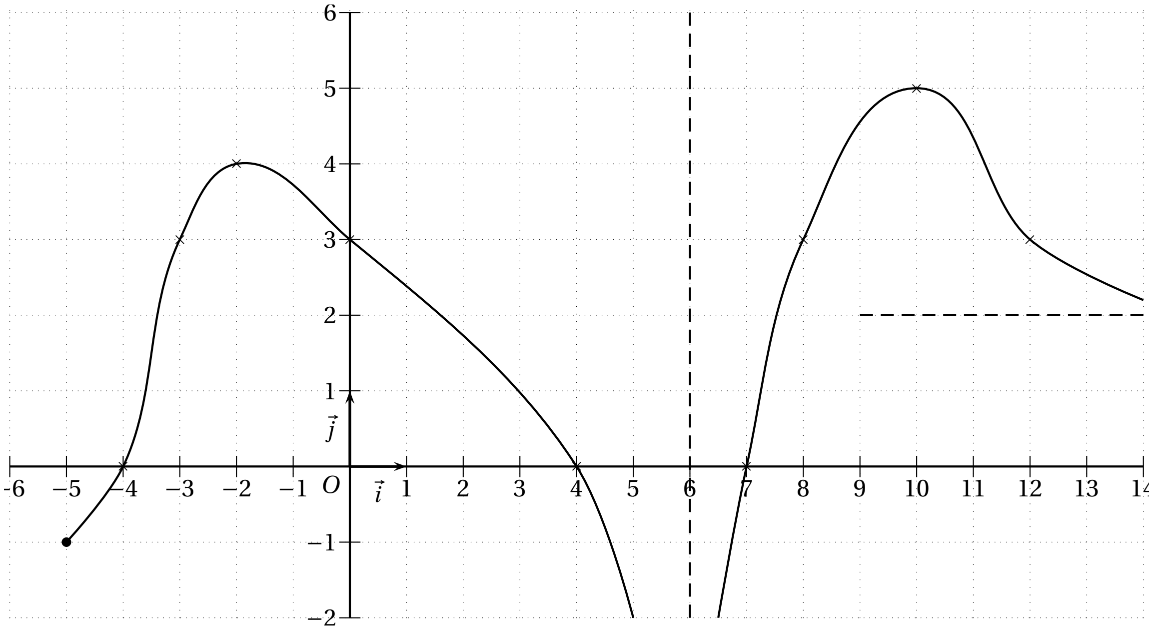
1. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 3.15 (Avec la calculatrice)**.**
Les fonctions f et g sont définies sur $[-2;2]$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 1 - x$.

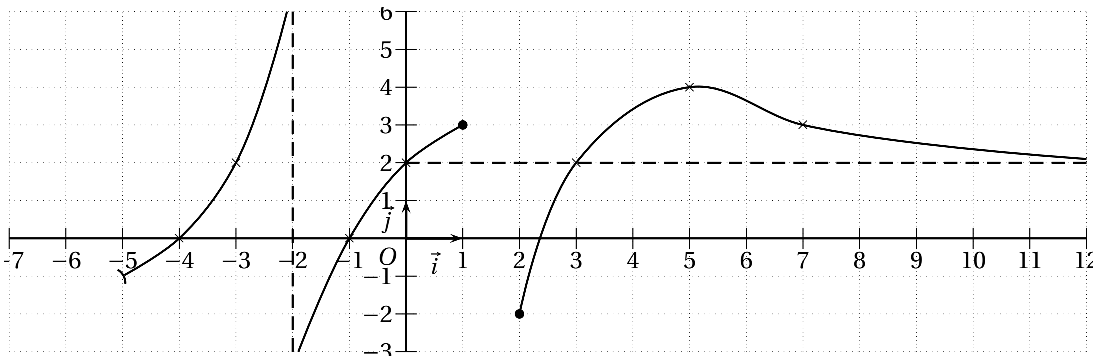
1. Tracer sur une calculatrice graphique les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

3.5.3 Variations, extremums

EXERCICE 3.16.
On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous (en deux parties).
Indiquer son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.



EXERCICE 3.17.
Soit la fonction f représentée ci-dessous ; sa courbe représentative est en trois parties.
Dresser le tableau de variations de f.



EXERCICE 3.18.
Tracer une courbe représentative d'une fonction f sachant que :

- 1 a pour antécédents, par la fonction f, -2 et $1{,}5$;
- $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 2$ ou $x = 4$;
- $f(-1) = 2$;
- -1 est l'image de 3 ;
- $D_f = [-2;4]$;
- le maximum de f est 3 ;
- le tableau des variations de f est le suivant :

x		0		3	
f	1	↗	↘	↗	

EXERCICE 3.19.
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-3		0		1		8
f	3	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-2

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.

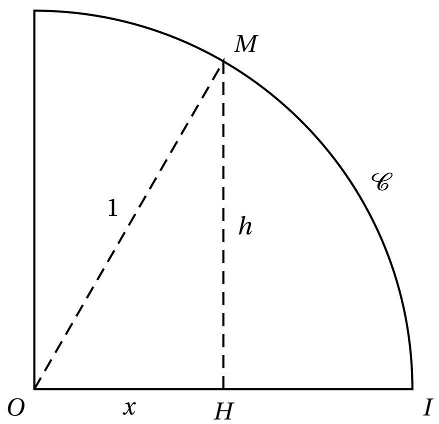
$f(-1)$	......	$f(-2)$
$f(-3)$	......	$f(1)$
$f(-1)$	......	1
$f(-2)$	......	$f(0,5)$
$f(-2)$	......	$f(1,5)$
$f(4)$	......	$f(2)$
4	......	$f(-4)$

2. Résoudre, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 0$;
   (b) $f(x) = 1$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) < 0$.
3. Dire, si c'est possible, quel est le maximum de la fonction et quel est son minimum.

EXERCICE 3.20 (Avec une calculatrice)**.**
On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$. À l'aide d'une calculatrice graphique :

1. conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. conjecturer quels sont les extremums de f sur son ensemble de définition ;
3. dresser le tableau des variations de f.

PROBLÈME 3.2.
On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de rayon $OI = 1$.
M est un point quelconque de ce quart de cercle. H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.
Le problème consiste à déterminer où placer M pour avoir l'aire du triangle OHM maximale.
On note x la longueur OH et h la longueur HM. On a donc $0 \leqslant x \leqslant 1$.



1. Exprimer la longueur h en fonction de x.
2. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.
   Démontrer que :
   $$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
3. Compléter le tableau ci-dessous.
4. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère (unités graphiques : en abscisse 10 cm pour une unité ; en ordonnée 20 cm pour une unité).
5. Déterminer graphiquement le maximum de f. Interpréter cette valeur.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
$f(x)$												

On arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près.

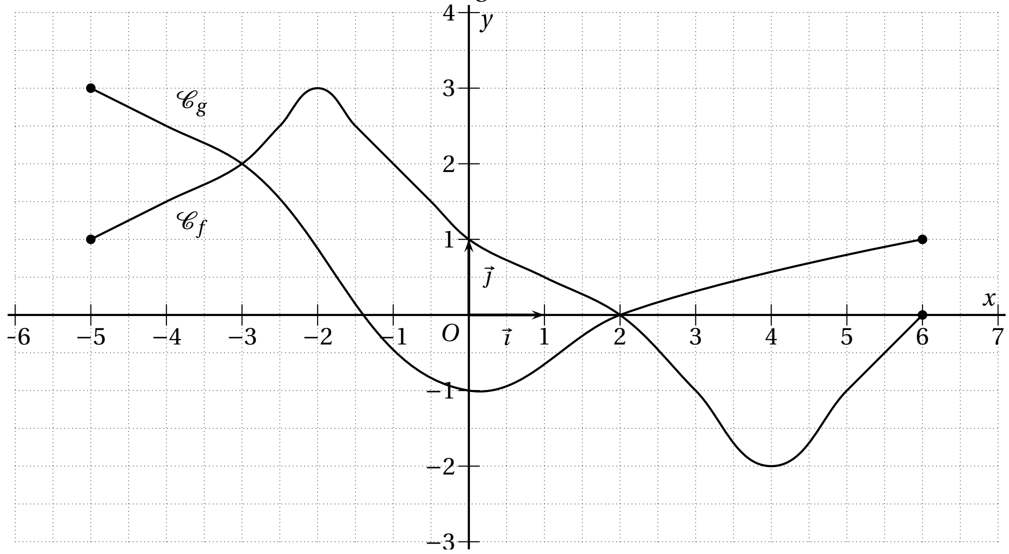
2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°3

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 3.1 (13 points)**.**

On donne sur la figure 3.1 de la présente page les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 4.1



1. Compléter :

   (a) $f(-2) =$ .... (b) $f(3) =$ ....

   (c) L'ensemble de définition de f est ....

2. Pour chacune des phrases suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et, **si elle est fausse** *la corriger* pour qu'elle soit vraie, **si elle est vraie** *la formuler* d'une autre manière.

   (a) L'image de 1 par la fonction f est -5 ❒Vrai ❒Faux

   ....

   (b) Les antécédents de 0 par la fonction f sont 2 et 6 ❒Vrai ❒Faux

   ....

   (c) 2 a pour image 0 par la fonction f ❒Vrai ❒Faux

   ....

   (d) 3 a pour antécédent -1 par la fonction f ❒Vrai ❒Faux

   ....

3. Résoudre graphiquement :

   (a) $f(x) = 2$ .... (d) $f(x) \geqslant -1$ ....

   (b) $f(x) < 1$ .... (e) $f(x) = g(x)$ ....

   (c) $f(x) < 2$ .... (f) $f(x) > g(x)$ ....

4. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. Donner les variations de f.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

EXERCICE 3.2 (2 points).

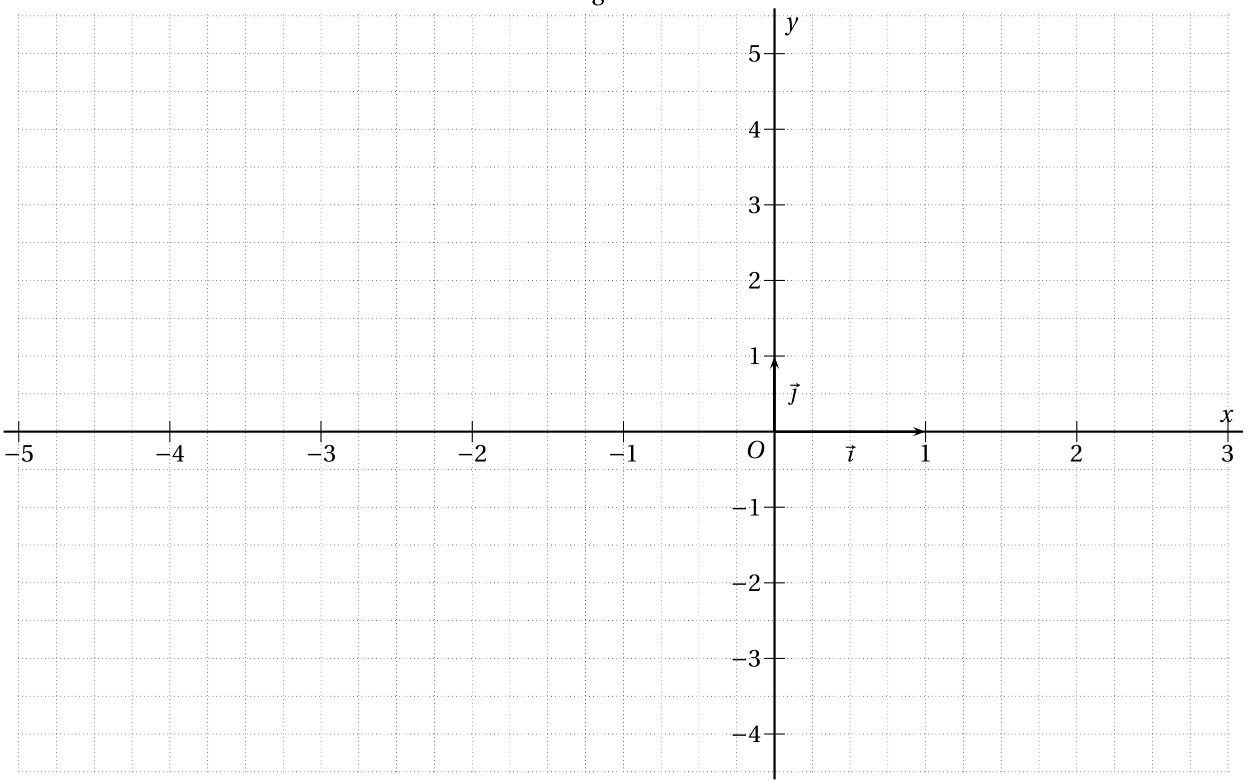
La fonction f est définie sur $[-4;2]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5						

2. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 4.2



EXERCICE 3.3 (5 points).

On donne le tableau de variations de fonction f définie sur $[-5;8]$:

x	-5	-3	1	4	8
f	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-3

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.

   (a) $f(0)$ .... $f(-1)$

   (b) $f(2)$ .... $f(3)$

   (c) $f(-4)$ 5

   (d) $f(-2)$ .... $f(3)$

   (e) $f(-1)$ .... $f(5)$

   (f) $f(7)$ .... -1

2. Donner les extremums de $f(x)$:

....

....

....

....

....

3. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.

....

....

....

....

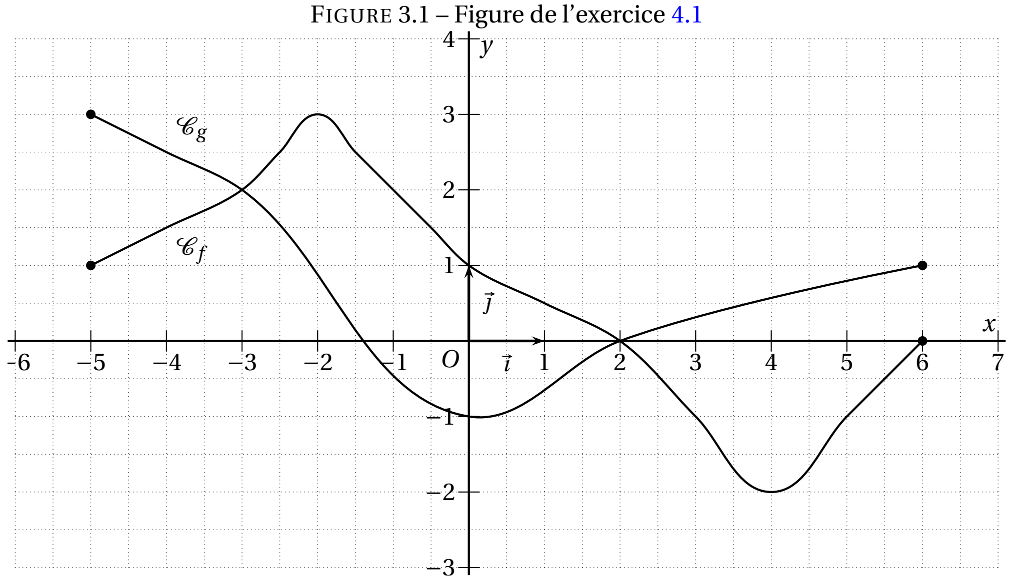
....

2^{nde} 11 – Devoir surveillé n°3

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 3.1 (11 points)**.**
On donne sur la figure 3.1 de la présente page les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 4.1



1. Compléter :
   (a) $f(-2) =$ .... (b) $f(3) =$ ....
   (c) L'ensemble de définition de f est ....
   (d) L'image de 1 par la fonction f est ....
   (e) Le (ou les) antécédent(s) de 0 par la fonction f est (sont) ....
   (f) 2 a pour image .... par la fonction f.
   (g) -1 a pour antécédent .... par la fonction f.
2. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = 2$ .... (d) $f(x) \geqslant -1$ ....
   (b) $f(x) < 1$ .... (e) $f(x) = g(x)$ ....
   (c) $f(x) < 2$ .... (f) $f(x) > g(x)$ ....
3. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
4. Donner les variations de f.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

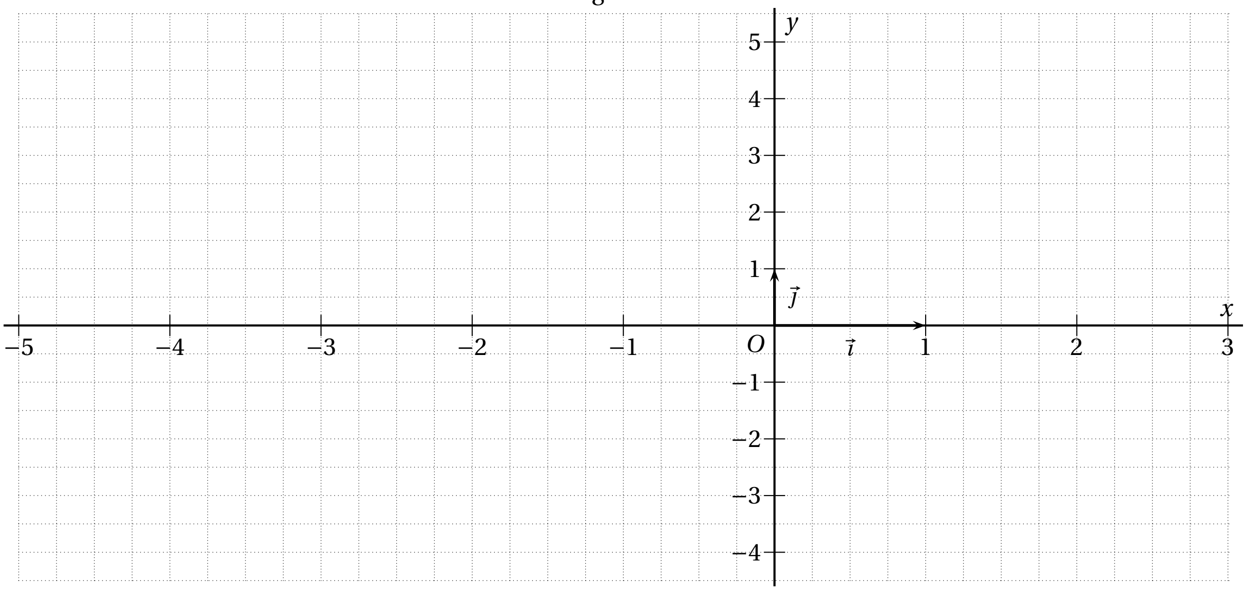
EXERCICE 3.2 (2 points)**.**
La fonction f est définie sur $[-4\,;2]$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5						

2. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous.

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 4.2



EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
On donne le tableau de variations de fonction f définie sur $[-5;8]$:

x	-5		-3		1		4		8
f	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-3

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.
   (a) $f(0)\dots\dots\dots f(-1)$ (c) $f(-4)\dots\dots\dots 5$ (e) $f(-1)\dots\dots\dots f(5)$
   (b) $f(2)\dots\dots\dots f(3)$ (d) $f(-2)\dots\dots\dots f(3)$ (f) $f(7)\dots\dots\dots -1$
2. Donner les extremums de $f(x)$:
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Donner le signe de $f(x)$ en fonction de x.
   ....
   ....
   ....
   ....

EXERCICE 3.4 (2 points)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage courant :

```
1   VARIABLES
2     x, y : NOMBRES
3   DEBUT
4     CHOISIR x
5     y PREND LA VALEUR x
6     y PREND LA VALEUR y+1
7     y PREND LA VALEUR y*y
8     AFFICHER y
9   FIN
```

1. Tester cet algorithme avec $x = 0$, $x = 1$ et $x = -2$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Que fait cet algorithme ?
   ....
   ....
   ....
3. Que fait cet algorithme si on inverse les lignes 6 et 7 ?
   ....
   ....
   ....

Chapitre 4

Statistiques discrètes

Sommaire

4.1 Vocabulaire 47
4.2 Mesures centrales 48
4.2.1 Mode 48
4.2.2 Moyenne arithmétique 48
4.2.3 Médiane 48
4.3 Mesures de dispersion 49
4.3.1 Valeurs extrêmes 49
4.3.2 Quartiles 49
4.4 Représentations graphiques 49
4.4.1 Diagramme à bâtons 49
4.4.2 Diagrammes basés sur la fréquence 50
4.4.3 Diagramme en boite 51
4.5 Exercices 51

4.1 Vocabulaire

Définition 4.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :
- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres et *qualitative* sinon ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.

Exemples.
- On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, ... (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.
- On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.
- On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 4.2. On a aussi :
- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

4.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

4.2.1 Mode

Définition 4.3 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques. • S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
• Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
• Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

4.2.2 Moyenne arithmétique

Définition 4.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est le nombre, noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Remarques. • La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.
• On note parfois

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

• Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) $n_1, n_2, \ldots, n_p$, alors $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p}{\underbrace{n_1+n_2+\ldots+n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

4.2.3 Médiane

Définition 4.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
• la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
• la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques. • Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
• On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
• Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
• La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
• Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété 4.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.*
• *Si n est impair, le $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série est la médiane : $m = x_{\frac{n+1}{2}}$*
• *Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ élément de la série et le suivant est **une** médiane ; dans la pratique on prend quasiment toujours la moyenne des deux données centrales de la série :*

$$m = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ième}} + \left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}}{2}$$

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

4.3 Mesures de dispersion

Elles visent à indiquer comment les données de la série statistique sont dispersées par rapport aux mesures centrales.

4.3.1 Valeurs extrêmes

Définition 4.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs *minimale* et *maximale* et l'*étendue* est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

4.3.2 Quartiles

Définition 4.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.
On convient de prendre systématiquement comme premier et troisième quartiles les nombres suivants :

Propriété 4.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. *Alors :*
- *La donnée de rang* $\frac{1}{4}n$*, arrondi éventuellement au supérieur, convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang* $\frac{3}{4}n$*, arrondi éventuellement au supérieur, convient toujours comme troisième quartile.*

On l'admettra.

Exemple 4.1. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $\frac{1}{4} \times 29 = 7{,}25 \approx 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $\frac{3}{4} \times 29 = 21{,}75 \approx 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile.

S'il y a $n = 64$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $\frac{1}{4} \times 64 = 16$ donc la seizième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $\frac{3}{4} \times 64 = 48$ donc la quarante huitième donnée de la série convient comme troisième quartile.

Propriété 4.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *avec* $n \geq 5$.
On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $]-\infty ; x_1]$ *et* x_n *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $[x_n ; +\infty[$.

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ♢

4.4 Représentations graphiques

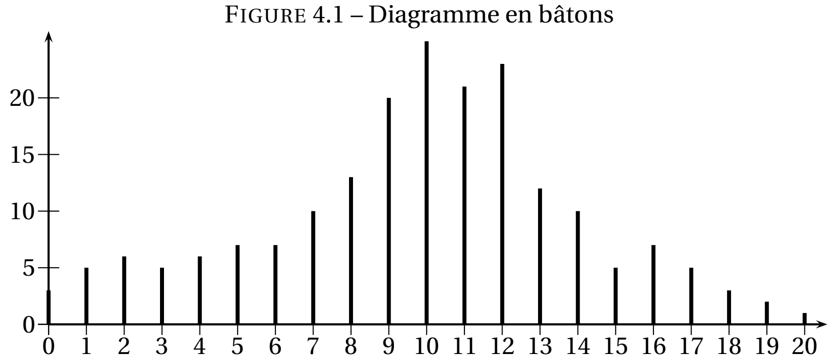
4.4.1 Diagramme à bâtons

On considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

On obtient le diagramme à bâtons (figure 4.1).

FIGURE 4.1 – Diagramme en bâtons



4.4.2 Diagrammes basés sur la fréquence

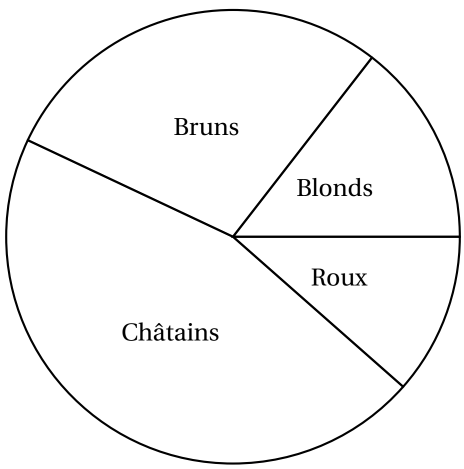
Les séries statistiques peuvent aussi être représentées en diagrammes circulaires, semi-circulaires, rectangulaires, etc. L'aire de chaque modalité devra être proportionnelle à l'effectif de cette modalité. Les fréquences permettent d'obtenir assez facilement la part du diagramme qui devra être consacrée à chaque modalité.
Ainsi si on considère la série suivante :

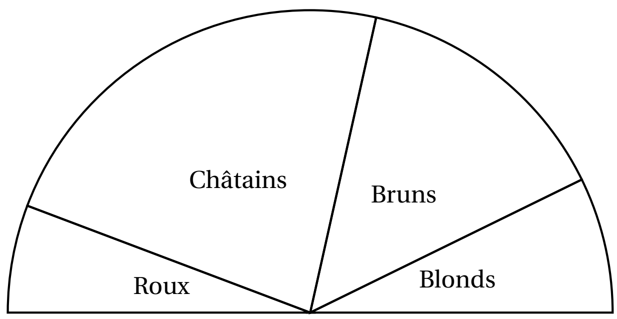
x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux
n_i	25	57	91	23

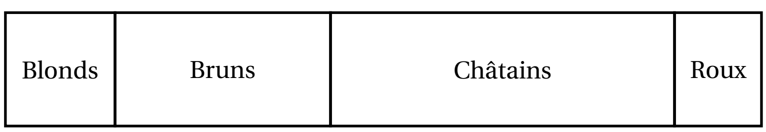
On a alors :

x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux	Total
n_i	29	57	91	23	200
Fréquence f_i	$\frac{29}{200} = 0,145$	0,285	0,455	0,115	1
Part d'un diagramme circulaire	$0,145 \times 360 = 52,2^\circ$	102,6 °	163,8 °	41,4 °	360 °
Part d'un diagramme semi-circulaire	$0,145 \times 180 = 26,1^\circ$	51,3 °	81,9 °	20,7 °	180 °
Part d'un rectangle de 10 cm	$0,145 \times 10 = 1,45$ cm	2,85 cm	4,55 cm	1,15 cm	10 cm
Fréquence en pourcentage	$0,145 \times 100 = 14,5$ %	28,5 %	45,5 %	11,5 %	100 %

On obtient les diagrammes des figures ci-dessous.



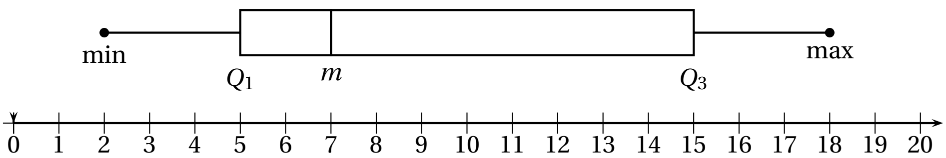




4.4.3 Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un *diagramme en boite*, appelé aussi *boite à moustaches*, conçu de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques. • La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).

- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point.

4.5 Exercices

EXERCICE 4.1.
Dans chaque cas, calculer la moyenne, le mode et la médiane de la série, et conseiller le narrateur sur la meilleure stratégie pour minimiser son résultat :

1. « Je n'ai eu que 8 sur 20 au contrôle de statistiques. Nous sommes 10 en classe. La meilleure note est 19. Ensuite il y a un 10, quatre 9, un 8 (moi) et trois 2. »
2. « Encore un 8 ! Cette fois les notes sont 2, 3, 4, 5, 7, 8 (moi), 9, 9, 18, 19. »
3. « Toujours un 8 ! Cette fois il y a eu trois 7 et un 19, 18, 12, 11, 10, 8(moi) et 2. »

EXERCICE 4.2.
On donne la série suivante : 11, 12, 13, 4, 17, 5, 13, 13, 5, 6, 6, 10, 10, 8, 9, 9, 11, 11, 14, 5, 14, 9, 9, 15, 7, 8, 15, .

1. Déterminer la moyenne de la série.
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série.
3. Représenter le diagramme en boîte correspondant.
4. Quel est l'écart interquartile de la série ?
5. Quel est l'intervalle interquartile de la série ?

EXERCICE 4.3.
Dans une classe, les notes sont les suivantes : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

1. Déterminer la moyenne de la série.
2. Déterminer la médiane et les quartiles de la série.
3. Représenter le diagramme en boîte correspondant.
4. Que remarque-t-on sur ce diagramme ? Pouvait-on s'y attendre ?

EXERCICE 4.4.
Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 10 ; 14 ; 16 ; 16 ; 18 ; 18
S_2	2 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 18
S_3	2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 18

1. Déterminer les mesures centrales et les mesures de dispersion les plus adaptées pour décrire les différences entre ces trois séries.
2. Construire les diagrammes qui vous semblent les plus adaptés.
3. Commenter.

EXERCICE 4.5.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. Interpréter les résultats obtenus.

EXERCICE 4.6.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et la médiane de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme semi-circulaire.

EXERCICE 4.7.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

EXERCICE 4.8.
Dans deux entreprises A et B, les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres.
Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel net, en euros. On suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, la répartition est régulière.

1. (a) Calculer la moyenne des salaires de tous les employés de l'entreprise A
   (b) Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de l'entreprise A
   (c) Calculer la moyenne des salaires des cadres de l'entreprise A
2. Faire les mêmes calculs pour l'entreprise B
3. Le P.D.G. de l'entreprise A dit à celui de l'entreprise B : « Mes employés sont mieux payés que les vôtres. » « Faux »répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »
   Expliquer ce paradoxe.

Entreprise A

Salaires	1 500	2 500	3 500
Ouvriers	114	66	0
Cadres	0	8	12

Entreprise B

Salaires	1 500	2 500	3 500
Ouvriers	84	42	0
Cadres	0	12	12

EXERCICE 4.9.
Le recensement de 1 999 a permis d'observer l'existence en France de dix communes de plus de 200 000 habitants. Le tableau ci-dessous donne la liste de ces communes et de leurs populations en milliers d'habitants.

1. Quelle est l'étendue de cette série statistique ? Que devient l'étendue quand on retire Paris de la liste ?
2. Comparer moyenne et médiane des populations de ces dix villes. Que constate-ton ? Comment expliquer ceci ?
3. Faire de même si on retire Paris de la liste. Que constatez-vous maintenant ?
4. Que choisiriez-vous entre « moyenne étendue »et « médiane étendue »pour résumer cette série statistique ? Expliquez votre choix.

Paris	2 116
Marseille	798
Lyon	445
Toulouse	391
Nice	341
Nantes	269
Strasbourg	264
Montpellier	225
Bordeaux	215
Rennes	206

EXERCICE 4.10.
Les tableaux dont il est question dans cette activité sont ceux de la page page suivante.

1. Le tableau 1 présente la répartition des salaires mensuels dans une entreprise (*source : DoC TICE-MEN*).
   Calculer la moyenne des salaires de cette entreprise et déterminer la médiane.
2. Une erreur a été commise dans les relevés : les effectifs correspondant aux salaires de 1 100 € et 1 400 € ont été permutés. Les données exactes sont celles du tableau 2.
   Comparer les moyenne et médiane de cette série à celles de la précédente. Les variations étaient-elles prévisibles ?
3. Rêvons ... 35 personnes ont un salaire de 3 400 € et l'effectif total est inchangé. Utiliser le tableau 3 pour imaginer une répartition des effectifs telle que la médiane ne soit pas modifiée : comment va varier la moyenne ?
   Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la plus élevée (calculer alors cette moyenne) ? Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la moins élevée (calculer alors cette moyenne) ?
   Mathias prétend qu'avec 35 personnes ayant un salaire de 3 400 €, la moyenne est obligatoirement plus élevée. A-t-il raison ?

TABLE 4.1 – Données de l'exercice 4.10

Tableau 1

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100	18	18
1 200	15	33
1 300	20	53
1 400	10	63
1 500	25	88
1 600	12	100
1 700	4	104
1 800	5	109
1 900	3	112
2 000	2	114
2 100	6	120
2 200	7	127
2 300	0	127
2 400	2	129
2 500	0	129
2 600	3	132
2 700	0	132
2 800	3	135
2 900	0	135
3 000	0	135
3 100	3	138
3 200	0	138
3 300	5	143
3 400	8	151

Tableau 2

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100	**10**	
1 200	15	
1 300	20	
1 400	**18**	
1 500	25	
1 600	12	
1 700	4	
1 800	5	
1 900	3	
2 000	2	
2 100	6	
2 200	7	
2 300	0	
2 400	2	
2 500	0	
2 600	3	
2 700	0	
2 800	3	
2 900	0	
3 000	0	
3 100	3	
3 200	0	
3 300	5	
3 400	8	

Tableau 3

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100		
1 200		
1 300		
1 400		
1 500		
1 600		
1 700		
1 800		
1 900		
2 000		
2 100		
2 200		
2 300		
2 400		
2 500		
2 600		
2 700		
2 800		
2 900		
3 000		
3 100		
3 200		
3 300		
3 400	**35**	**151**

EXERCICE 4.11.
Des salariés d'une entreprise se sont réunis dans un restaurant où ils sont les seuls clients pour fêter le changement de leur grille de salaire : désormais ils touchent tous 1 700 € par mois.

1. Quelle est la moyenne et la médiane de la série constituée par leurs salaires.
2. Bill Gates entre dans le restaurant : que devient la moyenne et la médiane de la série constituée par leurs salaires et celui de Bill Gates.

EXERCICE 4.12.
D'après Wikipédia, le salaire médian des salariés de 25 à 55 ans en France en 2008 était de 1 655 € nets et le salaire moyen de 2 069 € nets.
Conjecturer ce qui peut expliquer cette différence.

EXERCICE 4.13.
Trois séries statistiques, comportant 10 données chacune, ont les paramètres suivants :

- Série A : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 28 ; médiane 20.
- Série B : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 30 ; médiane 30.
- Série C : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 21,5 ; médiane 25.

Conjecturer pour chacune de ces séries comment peuvent être réparties les données.

EXERCICE 4.14.
Voici trois séries de notes obtenues en mathématiques dans des classes de seconde (à effectifs très réduits) lors d'un contrôle sur les statistiques :

1. Déterminer la note médiane de chaque classe.
2. **SANS LA CALCULER**, conjecturer pour chaque série si la moyenne sera supérieure, inférieure ou proche de la médiane.

Classe 1	Classe 2	Classe 3
2	2	8
5	3	8
6	4	9
7	4	9
9	4	10
10	9	10
10	10	10
12	12	12
13	12	13
14	12	15
15	12	15
15	12	16
16	13	17
19	13	18

EXERCICE 4.15.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Calculer $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ les moyennes respectives de Maths et d'Histoire-Géographie.
2. Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths.
3. Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Histoire-Géographie.
4. Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Histoire-Géographie.
5. Interpréter les résultats obtenus.

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°4

Statistiques discrètes – Expressions algébriques

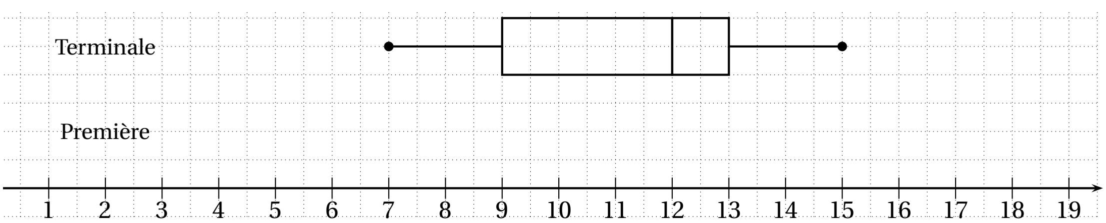
EXERCICE 4.1 (5 points)**.**
Sur le tableau ci-dessous, sans justification, entourer la proposition correcte, sachant qu'il y a à chaque fois exactement une proposition correcte et qu'une réponse juste rapporte 1 point.

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
L'INSEE indique que, pour 2 004, le revenu moyen annuel par ménage est de 28 935 € et le revenu médian annuel par ménage est 24 599 €. On peut supposer que ...	... les revenus inférieurs au revenu médian sont éloignés de ce salaire médian.	... les revenus supérieurs au revenu médian sont proches de ce salaire médian.	... les revenus supérieurs au revenu médian sont éloignés de ce salaire médian.
Les notes d'une classe sont les suivantes $\{1; 3; 9; 10; 10; 11; 11; 11; 12; 13\}$. Sans calcul ...	... on peut conjecturer que la moyenne sera inférieure à la médiane.	... on peut conjecturer que la moyenne sera supérieure à la médiane.	... on ne peut rien dire.
La moitié des notes d'une classe à un devoir est supérieure à 10.	La moyenne de la classe sera supérieure à 10	La moyenne de la classe sera inférieure à 10	On peut ne rien dire sur la moyenne
Suzanne a eu la meilleure note de la classe mais elle s'aperçoit que le professeur lui a oublié 2 points. Elle le signale et il modifie sa note. Pour la classe, ...	... on peut être sûr que la médiane va augmenter.	... on peut être sûr que la médiane ne va pas changer.	... on ne peut rien dire sur la médiane.
Thomas vient en bus au Lycée. Sur le trajet du bus il y a cinq feux de circulation. Thomas ne relève pas précisément le nombre de feux qui sont au rouge sur le trajet mais constate qu'il y en au maximum trois qui sont au rouge. On sait alors que ...	... le nombre moyen de feux au rouge sera inférieur à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est égal à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est supérieur à 3

EXERCICE 4.2 (5 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Première (arrondis au point supérieur) :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	2	2	2	0	1	1	2	1	5	4	0	2	1	0	2	0

1. (a) On note $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe. Calculer $\overline{x}$ (*on arrondira au centième au besoin*).
   (b) Déterminer la valeur de m, la note médiane de cette classe, en justifiant.
   (c) Le professeur considère que si l'écart entre la moyenne et la médiane est supérieur à 0,75, alors il est important.
   Est-ce le cas ? Comment l'expliquer ?
2. (a) Déterminer Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles de cette série, sans justifier.
   (b) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'une classe de Terminale.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de ces deux classes.



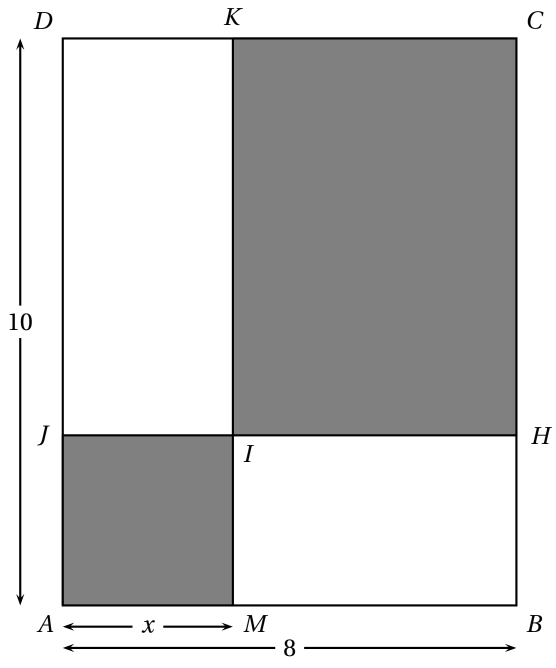
EXERCICE 4.3 (3 points)**.**
Factoriser au maximum les expressions suivantes :
- $A = (x-1)^2 - (2x+5)^2$
- $B = (x+2)^2 + (x+2)$

EXERCICE 4.4 (7 points)**.**
Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 8$ et $AD = 10$.
M est un point variable sur le segment $[AB]$.
On considère les points H, I, J et K tels que $AMIJ$ est un carré et $CKIH$ est un rectangle.
On note x la longueur AM.

1. Dans quel intervalle varie le nombre réel x ?
2. Montrer que la somme $S(x)$ des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$ a pour expression :

$$S(x) = x^2 + (8-x)(10-x)$$

3. Développer et réduire $S(x)$.
4. Le problème est de déterminer les positions éventuelles de M pour lesquelles la somme des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$ est égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.
   (a) Traduire le problème par une équation.
   (b) Montrer que cette équation s'écrit aussi : $x^2 - 9x + 20 = 0$.
   (c) Développer et réduire le produit $(x-4)(x-5)$.
   (d) Déduire des questions 4b et 4c les solutions du problème posé.



2^{nde} 11 – Devoir surveillé n°4

Statistiques discrètes – Expressions algébriques

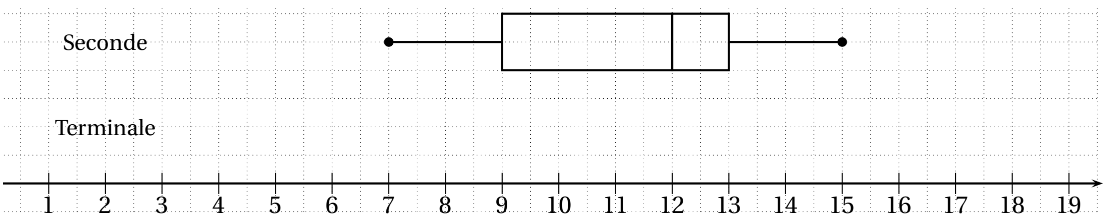
EXERCICE 4.1 (5 points).
Sur le tableau ci-dessous, sans justification, entourer la proposition correcte, sachant qu'il y a à chaque fois exactement une proposition correcte et qu'une réponse juste rapporte 1 point.

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
L'INSEE indique que, pour 2 004, le revenu moyen annuel par ménage est de 28 935 € et le revenu médian annuel par ménage est 24 599 €. On peut supposer que ...	... les revenus inférieurs au revenu médian sont proches de ce salaire médian.	... les revenus inférieurs au revenu médian sont éloignés de ce salaire médian.	... les revenus supérieurs au revenu médian sont proches de ce salaire médian.
Les notes d'une classe sont les suivantes $\{1;3;9;10;10;11;11;11;12;13\}$. Sans calcul ...	... on peut conjecturer que la moyenne sera supérieure à la médiane.	... on peut conjecturer que la moyenne sera inférieure à la médianeMint.	... on ne peut rien dire.
Plus de la moitié des notes d'une classe à un devoir sont supérieures à 10.	La moyenne de la classe sera inférieure à 10	La moyenne de la classe sera supérieure à 10	On peut ne rien dire de la moyenne
Suzanne a eu la meilleure note de la classe mais elle s'aperçoit que le professeur lui a oublié 2 points. Elle le signale et il modifie sa note. On peut être sûr que, pour la classe, ...	... la médiane va augmenter.	... le mode va augmenter.	... la moyenne va augmenter.
Thomas vient en bus au Lycée. Sur le trajet du bus il y a cinq feux de circulation. Thomas ne relève pas précisément le nombre de feux qui sont au rouge sur le trajet mais constate qu'il y en au minimum trois qui sont au rouge. On sait alors que ...	... le nombre moyen de feux au rouge sera inférieur à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est égal à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est supérieur à 3

EXERCICE 4.2 (5 points).
Voici les notes obtenues par les élèves de Terminale ES au dernier devoir de spécialité mathématiques (arrondies au point supérieur) :

15 17 18 10 17 14 11 17 16 12 11 15 7 12 15 11 2

1. (a) Calculer la moyenne de la classe.
   (b) Déterminer la rang de la médiane puis sa valeur.
   (c) Le professeur considère que, si la différence entre la moyenne et la médiane est supérieur à 0,75 point, l'écart entre ces deux valeurs est important. Est-ce le cas ? À quoi cela est-il dû ?
2. (a) On note Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles de cette série. Déterminer Q_1 et Q_3 sans justifier.
   (b) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'une classe de Seconde.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de ces deux classes.



EXERCICE 4.3 (3 points)**.**
Hachim est chargé par son professeur d'écrire un algorithme prenant comme argument un nombre x et renvoyant $2x^2 - 4x + 3$.
Son problème est que la version d'Algobox qu'il utilise est une vieille version très limitée :

- il ne peut utiliser qu'**une seule variable** ;
- il ne peut faire que des **opérations de base** $(+, -, \times, :)$;
- il ne peut faire qu'**une seule de ces opérations par ligne**.

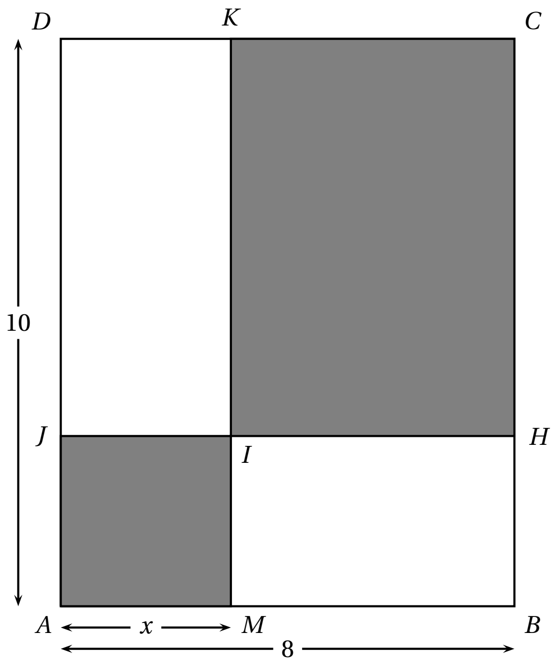
Il vous demande de l'aider.

1. Montrer que $2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1$.
2. Compléter alors l'algorithme suivant pour qu'il réalise ce que veut Hachim :

```
VARIABLES
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE x
  x PREND_LA_VALEUR ....................
  x PREND_LA_VALEUR ....................
  x PREND_LA_VALEUR ....................
  x PREND_LA_VALEUR ....................
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

EXERCICE 4.4 (7 points)**.**
Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 8$ et $AD = 10$.
M est un point variable sur le segment $[AB]$.
On considère les points H, I, J et K tels que $AMIJ$ est un carré et $CKIH$ est un rectangle.
On note x la longueur AM.

1. Dans quel intervalle varie le nombre réel x ?
2. Montrer que la somme $S(x)$ des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$ a pour expression :
$$S(x) = x^2 + (8-x)(10-x)$$
3. Développer et réduire $S(x)$.
4. Le problème est de déterminer les positions éventuelles de M pour lesquelles la somme des aires des quadrilatères $AMIJ$ et $CKIH$ est égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.
   (a) Traduire le problème par une équation.
   (b) Montrer que cette équation s'écrit aussi : $x^2 - 9x + 20 = 0$.
   (c) Développer et réduire le produit $(x-4)(x-5)$.
   (d) Déduire des questions 4b et 4c les solutions du problème posé.



Chapitre 5

Calculs dans l'espace

Sommaire

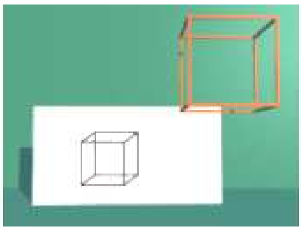
5.1 Perspective cavalière . . . **59**
5.1.1 Principe . . . 59
5.1.2 Construction et propriétés . . . 60
5.2 Solides usuels et volumes . . . **60**
5.2.1 Famille des prismes droits . . . 60
5.2.2 Famille des pyramides . . . 60
5.2.3 Sphère . . . 61
5.3 Exercices . . . **61**

5.1 Perspective cavalière

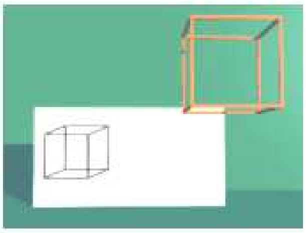
5.1.1 Principe

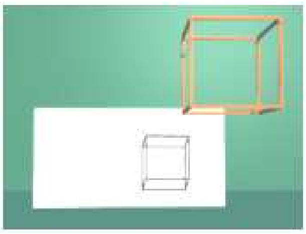
Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions.
La représentation que nous utiliserons s'appelle la *perspective cavalière*.
Ses principes sont les suivants :

- Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
  Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales. [1]
  Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube. [2]



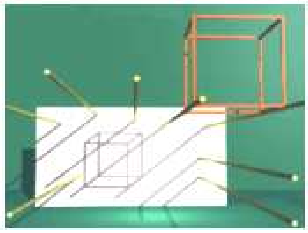
- On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.





1. Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
2. Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.

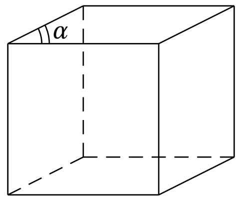
- On appelle *fuyante* une droite perpendiculaire à l'écran. Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



5.1.2 Construction et propriétés

Construction

- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.



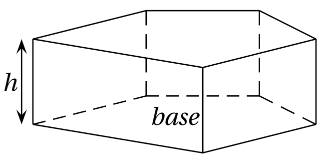
Propriétés

- Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.
  Attention : Deux droites parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- De la même manière, des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes, **mais** deux droites sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin. Par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

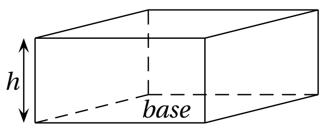
5.2 Solides usuels et volumes

5.2.1 Famille des prismes droits

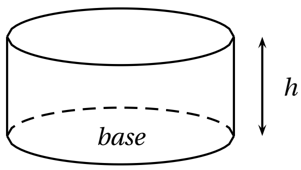
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.



Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.



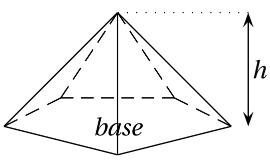
Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.



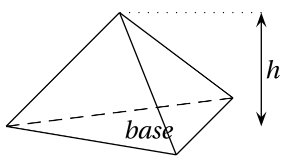
Propriété 5.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume = Aire de la base × hauteur*

5.2.2 Famille des pyramides

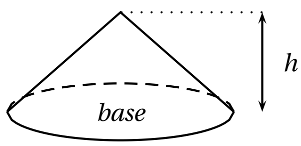
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.



Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.



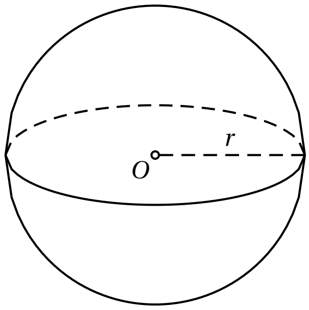
Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.



Propriété 5.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume* $= \frac{1}{3}$ *Aire de la base* $\times$ *hauteur*

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

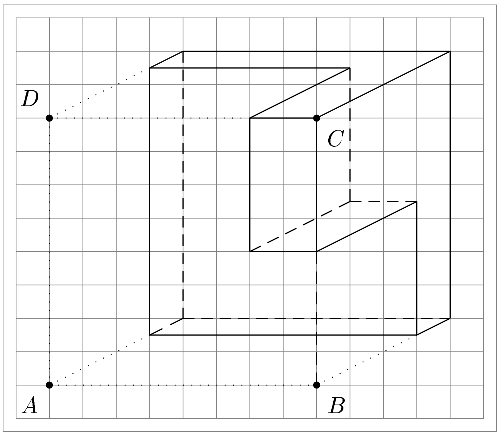
5.2.3 Sphère

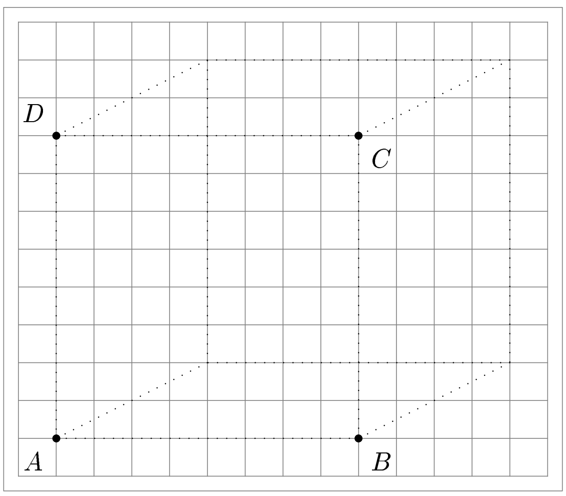


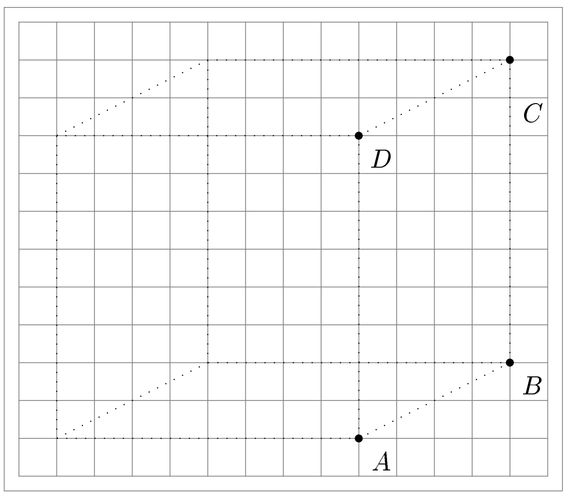
Propriété 5.3. *Le volume d'une sphère de rayon* r *est donné par la formule : Volume* $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
L'aire de la surface d'une sphère de rayon r *est donnée par la formule : Aire* $= 4\pi r^2$.

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube. Construire, en perspective cavalière : la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant ; la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.







EXERCICE 5.2.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.
On donne $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

EXERCICE 5.3.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

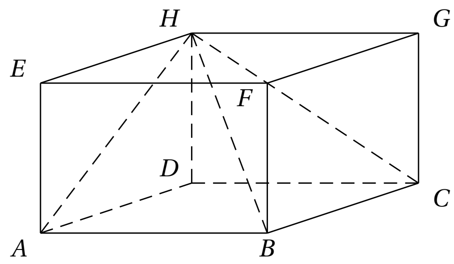
1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
   Le représenter en vraie grandeur à la règle et au compas en prenant $a = 6$ cm.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube.

EXERCICE 5.4.
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté a. On nomme P le centre de la face $EFGH$ et Q le centre de la face $BCGF$. M désigne le milieu de $[PQ]$. On admettra que (EG) est perpendiculaire à (EA) et que (BG) est perpendiculaire à (AB).

1. Montrer que $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ puis que $AP = AQ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
2. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PAQ}$.
3. Donner, en fonction de a, la valeur exacte de l'aire du triangle APQ.

EXERCICE 5.5.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 10$, $AE = 6$ et $BC = 8$.

1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.



EXERCICE 5.6.
$ABCDEFGH$ est un cube. $AB = 5$ cm. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1. Calculer AH, HB et AI.
2. Représenter en vraie grandeur le triangle AIC.
3. Démontrer que la mesure en degrés de $\widehat{AIC}$ est 120°.

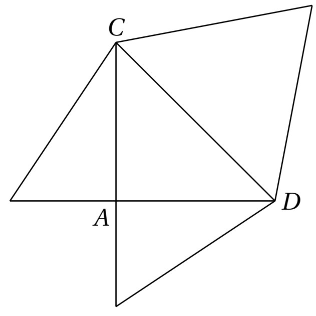
EXERCICE 5.7.
$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête a. Calculer en fonction de a :

1. la hauteur SH (on admettra que H est l'intersection des hauteurs de ABC ;
2. l'aire du triangle ABC et l'aire totale du tétraèdre ;
3. le volume du tétraèdre.

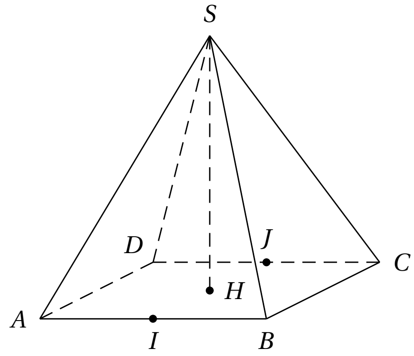
EXERCICE 5.8.
La figure ci-contre est un patron d'un solide $ABCD$. Le triangle ADC est rectangle en A et a pour dimensions :

- $AD = 3,5$ cm ;
- $AC = 4$ cm ;
- $AB = 3$ cm.

1. De quel type de solide s'agit-il ?
2. Le dessiner en perspective cavalière, en mettant la face ABC en vraie grandeur.



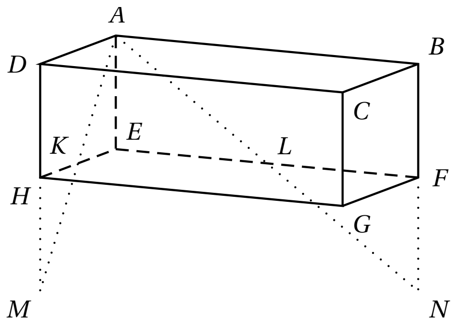
EXERCICE 5.9.
Soit $SABCD$ une pyramide régulière dont la base est le carré de côté $2a$ et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angles au sommet de mesure 30°. On désigne respectivement par I, J et H les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et le centre du carré $ABCD$.



1. Déterminer, en fonction de a, la hauteur SH de cette pyramide.
2. Réaliser un patron de cette pyramide en prenant $a = 5\,\text{cm}$.

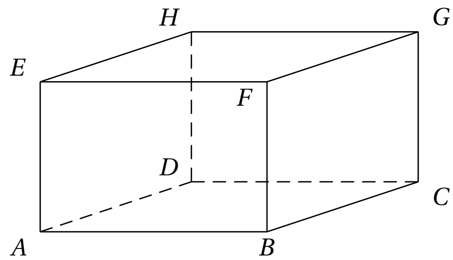
EXERCICE 5.10.
La grande pyramide de Kheops est à sa base un carré presque parfait de 5,3 hectares correctement orienté par rapport au Nord et dont les côtés Nord et Sud sont parallèles à 2,5 cm près. Sa hauteur, à l'origine, était de 146 mètres. En utilisant la hauteur et les renseignements fournis par le texte ci-dessus, desiner un patron de cette pyramide à l'échelle $1/2600^e$.
Calculer l'aire d'une des faces de la pyramide.
Comparer le résultat obtenu avec l'aire d'un carré de côté la hauteur de la pyramide.

EXERCICE 5.11.
K et L sont les milieux des arêtes $[EH]$ et $[EF]$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les droites (AK) et (DH) se coupent en M. Les droites (AL) et (BF) se coupent en N.



1. Démontrer que K est le milieu de $[AM]$.
2. Démontrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.

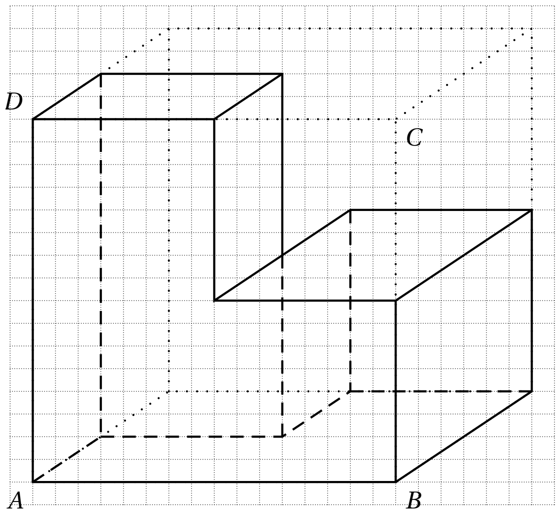
EXERCICE 5.12.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 5$, $AE = 2$ et $BC = 3$.
Une fourmi se situe en E et se rend en C en cheminant sur les faces.
Déterminer le trajet le plus court.
Indication : on pourra s'aider du patron.



2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°5

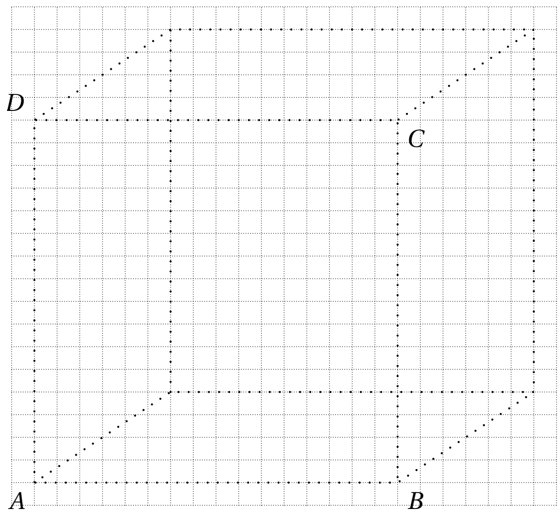
Géométrie dans l'espace – Algorithmique

EXERCICE 5.1 (4 points)**.**
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.

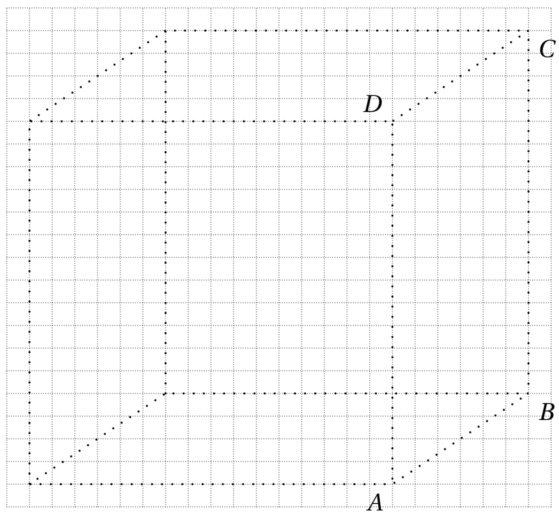


Construire, en perspective cavalière :

1. la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant :



2. la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite :

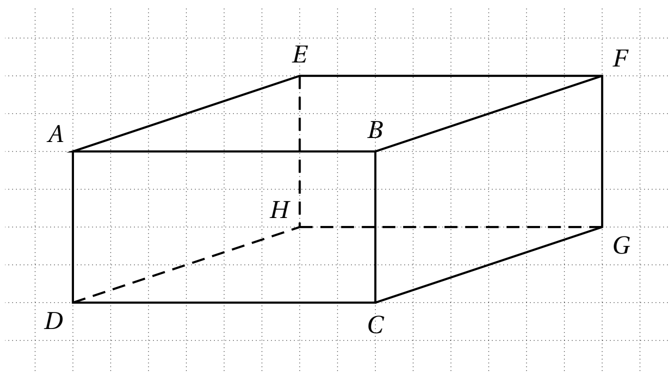


EXERCICE 5.2 (4 points)**.**
Une fourmi se déplace sur les faces d'un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 2\,\text{cm}$ et $AE = 5\,\text{cm}$.

Elle se situe en A et désire se rendre en G en suivant le trajet le plus court possible.

On admettra que ce trajet passe par l'arète $[BF]$.

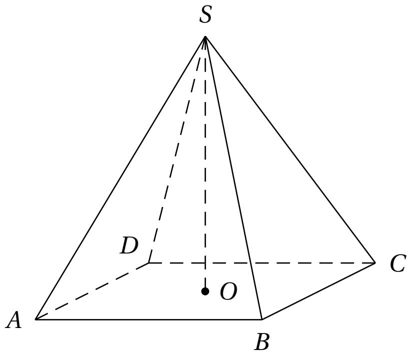
1. Déterminer la valeur exacte de la longueur du trajet.
2. Déterminer la position exacte du point I sur le segment $[BF]$ par lequel la fourmi doit passer.



EXERCICE 5.3 (6 points).
On cherche à écrire un algorithme qui prend comme arguments les coordonnées x_A, y_A, x_B, y_B, x_C et y_C de trois points A, B et C et qui détermine les coordonnées x_D et y_D du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. À l'aide des vecteurs, montrer que $x_D = x_A - x_B + x_C$ et que $y_D = y_A - y_B + y_C$.
2. Écrire un tel algorithme.

EXERCICE 5.4 (6 points).
Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S et dont la base est un carré $ABCD$ de 5 cm de côté et de centre O. Les arêtes issues de S mesurent 8 cm.
On admettra que SO est la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire que la droite (SO) est perpendiculaire aux droites (AC) et (BD).

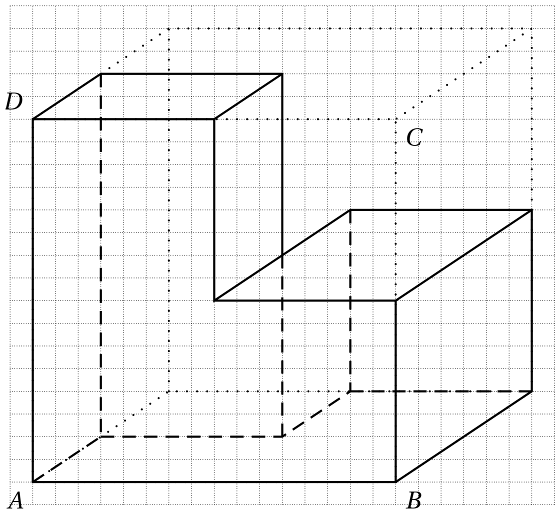


1. Déterminer la valeur exacte de AC puis la hauteur SO de la pyramide. *On donnera la valeur exacte de SO puis la valeur approchée arrondie au millimètre.*
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BSA}$, arrondie au degré.
3. Déterminer le volume de la pyramide.
4. Déterminer l'aire latérale de la pyramide, c'est-à-dire la somme des aires de toutes ses faces.

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°5

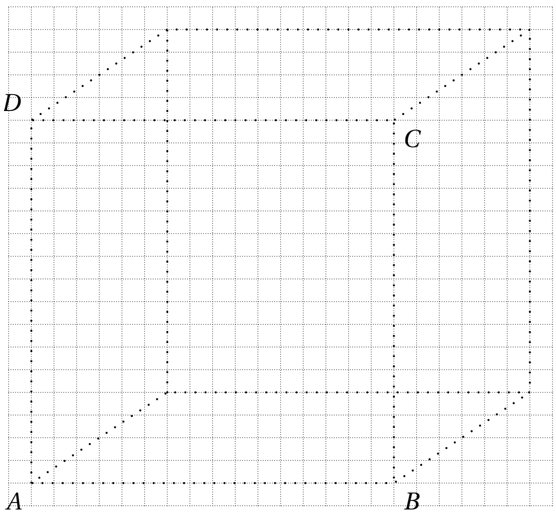
Géométrie dans l'espace – Algorithmique

EXERCICE 5.1 (4 points)**.**
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.

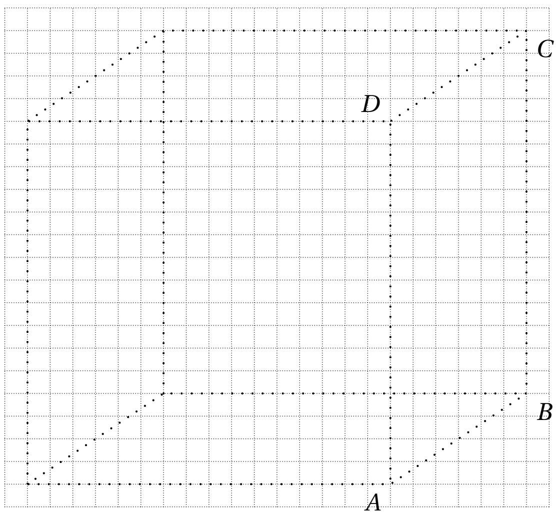


Construire, en perspective cavalière :

1. la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant :



2. la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite :

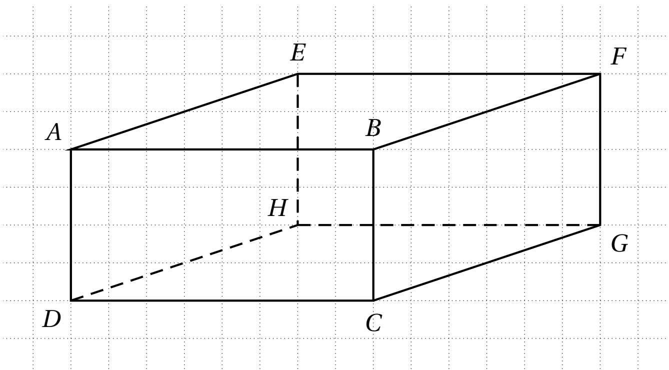


EXERCICE 5.2 (4 points)**.**
Une fourmi se déplace sur les faces d'un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4\,\text{cm}$, $AD = 2\,\text{cm}$ et $AE = 5\,\text{cm}$.

Elle se situe en A et désire se rendre en G en suivant le trajet le plus court possible.

On admettra que ce trajet passe par l'arète $[BF]$.

1. Déterminer la valeur exacte de la longueur du trajet.
2. Déterminer la position exacte du point I sur le segment $[BF]$ par lequel la fourmi doit passer.



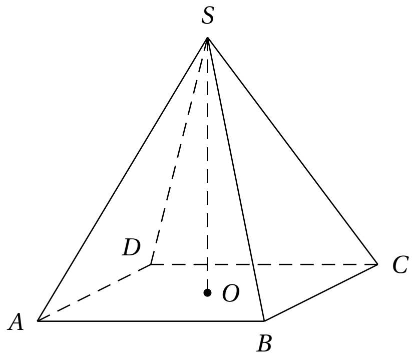
EXERCICE 5.3 (6 points)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage d'Algobox, où xA, yA, xB, yB, xC, yC, a, b et c sont des variables de type nombre :

```
1   DEBUT_ALGORITHME
2     LIRE xA
3     LIRE yA
4     LIRE xB
5     LIRE yB
6     LIRE xC
7     LIRE yC
8     a PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xB-xC,2)+pow(yB-yC,2))
9     b PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xA-xC,2)+pow(yA-yC,2))
10    c PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xB-xA,2)+pow(yB-yA,2))
11    SI (a==b et a==c) ALORS
12      DEBUT_SI
13      AFFICHER "Le triangle ABC est ..."
14      FIN_SI
15      SINON
16        DEBUT_SINON
17        AFFICHER "Le triangle ABC n'est pas ..."
18        FIN_SINON
19  FIN_ALGORITHME
```

On rappelle qu'en langage algobox sqrt(x) signifie $\sqrt{x}$ et que pow(x,2) signifie x^2.

1. Compléter les lignes 13 et 17.
2. Modifier cet algorithme afin qu'il indique uniquement si le triangle est isocèle *(on n'indiquera sur sa copie que les lignes modifiées).*
3. Modifier cet algorithme afin qu'il indique uniquement si le triangle est rectangle *(on n'indiquera sur sa copie que les lignes modifiées).*

EXERCICE 5.4 (6 points)**.**
Soit $SABCD$ une pyramide régulière de sommet S et dont la base est un carré $ABCD$ de 5 cm de côté et de centre O. Les arêtes issues de S mesurent 8 cm.
On admettra que SO est la hauteur de la pyramide, c'est-à-dire que la droite (SO) est perpendiculaire aux droites (AC) et (BD).



1. Déterminer la valeur exacte de AC puis la hauteur SO de la pyramide. *On donnera la valeur exacte de SO puis la valeur approchée arrondie au millimètre.*
2. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BSA}$, arrondie au degré.
3. Déterminer le volume de la pyramide.
4. Déterminer l'aire latérale de la pyramide, c'est-à-dire la somme des aires de toutes ses faces.

Chapitre 6

Équations de droites – Fonctions affines

Sommaire

6.1 Activités **69**

6.2 Bilan et compléments **70**

6.2.1 Équations de droites 70

6.2.2 Fonctions affines 71

6.3 Exercices **72**

6.3.1 Équations de droites 72

6.3.2 Fonctions affines 74

6.4 Problèmes **75**

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
Le plan est muni d'un repère. On cherche à représenter tous les points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $y = 2x - 3$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1				3	4	5
y			-3	-1	1			

2. Placer les points correspondants dans un repère.
3. Que constate-t-on ?
4. Prendre un autre point ayant la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?
5. Prendre un point n'ayant pas la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?

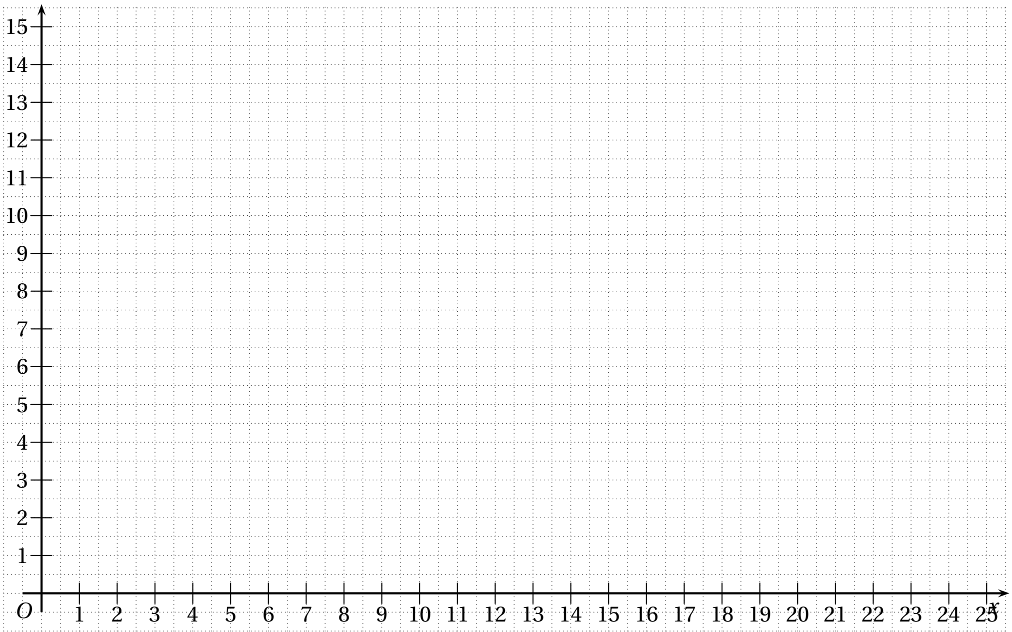
ACTIVITÉ 6.2.
Soient $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$ les droites d'équations :

- $\mathscr{D}_1 : y = 3x + 1$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 1x + 1$;
- $\mathscr{D}_3 : y = 0,25x + 1$;
- $\mathscr{D}_4 : y = 0x + 1$;
- $\mathscr{D}_5 : y = -x + 1$;
- $\mathscr{D}_6 : y = -2x + 1$;

1. Montrer que le point $(0\,;\,1)$ appartient à toutes ces droites.
2. Déterminer, pour chacune de ces droites, un autre point lui appartenant.
3. Placer ces points dans un repère orthogonal puis tracer les droites.
4. Quelle semble être l'influence du coefficient du x sur « l'allure » de ces droites ?

Activité 6.3.
Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :
- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilomètre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilomètre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilomètre ;

1. Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de
   - 5 km ?
   - 10 km ?
   - 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter dans le repère ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3.



4. En vous basant sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus économique de prendre le taxi T_1, la taxi T_2 ou le taxi T_3. *On donnera les réponses sous forme d'intervalle.*
5. Un client désire faire plus de 20 km, et choisira le taxi T_3. Il vous charge étudier le coût de son trajet en fonction de la distance x.
   (a) Compléter le tableau ci-dessous :

Distance x	20	21	22	23	24	25	30	40	50
Coût $f_3(x)$									

   (b) La distance et le coût sont-ils des grandeurs proportionnelles ?
   (c) À l'aide du tableau précédent conjecturer de combien augmente le coût lorsque la distance augmente de
   - 1 km
   - 2 km
   - 5 km

   (d) Que peut-on dire alors des grandeurs « augmentation de la distance » et « augmentation du coût » ?

6.2 Bilan et compléments

6.2.1 Équations de droites

Le plan est muni d'un repère.

Théorème 6.1. *Toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels constants.*
Cela signifie que :
- *tout point M appartenant à la droite $\mathscr{D}$ a ses coordonnées $(x\,;\,y)$ qui vérifient l'équation $y = mx + p$;*
- *tout point M dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient l'équation $y = mx + p$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

On dit que $y = mx + p$ est l'équation réduite *de $\mathscr{D}$.*

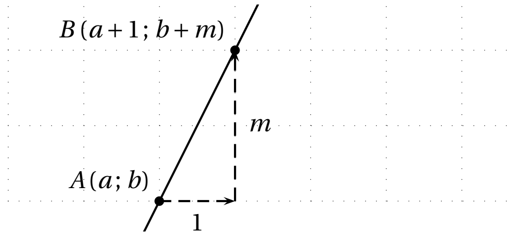
Toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $x = k$, où k est un nombre réel constant.

On l'admettra.

Propriété 6.2. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points distincts quelconques de $\mathscr{D}$.*
Alors on a :
- $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *et ce nombre est appelé* coefficient directeur *de la droite $\mathscr{D}$;*
- *le point de coordonnées $(0;\,p)$ appartient à $\mathscr{D}$ et le nombre p est appelé* ordonnée à l'origine *de la droite $\mathscr{D}$.*

Preuve. On admettra le premier point.
Par ailleurs, le point d'abscisse 0 appartenant à $\mathscr{D}$ a pour ordonnée $y = m \times 0 + p = p$. ♢

Propriété 6.3. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(a;\,b)$ un point quelconque de $\mathscr{D}$.*
Alors le point $B(a+1;\,b+m)$ appartient à $\mathscr{D}$.



Preuve. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et $A(a;\,b)$ un point de $\mathscr{D}$ et $B(a+1;\,b+m)$.
Montrons que B appartient à $\mathscr{D}$.
On sait que $A(a;\,b) \in \mathscr{D}$ donc $b = m \times a + p$.
Cherchons l'ordonnée du point de la droite donc l'abscisse est $a+1$.
On sait que $y = m(a+1) + p = m \times a + m + p = b + m$.
Donc B appartient à $\mathscr{D}$. ♢

Propriété 6.4. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, donc non parallèles à l'axe des ordonnées.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (éventuellement confondues) si et seulement si $m = m'$.

On l'admettra.

6.2.2 Fonctions affines

Définition 6.1. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines.*
Cas particuliers :
- si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite *constante* ;
- si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite *linéaire.*

Propriété 6.5. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.*
Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

Propriété 6.6. *Soit f une fonction déinie sur $\mathbb{R}$.*
- *Si les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnels, alors f est une fonction affine.*
- *Réciproquement, si f est une fonction affine, alors les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnels.*

Dit autrement, on a :
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *=constante ⇔ f est une fonction affine.*
Ou encore :
Pour tout x et x', $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ =constante ⇔ f est une fonction affine

On l'admettra.

Propriété 6.7. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.*
- *Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si $m > 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma < mb \\ &\Leftrightarrow ma + p < mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante.

Si $m < 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma > mb \\ &\Leftrightarrow ma + p > mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante.

Enfin, si $m = 0$, $f(a) = f(b) = p$. ♢

Propriété 6.8. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$. Alors :*

1. *$f(x) = 0$ pour $x_0 = -\frac{p}{m}$ et*
2. *Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :*
   - *Si $m > 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

   - *Si $m < 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Preuve. 1.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow mx + p = 0 \\ &\Leftrightarrow mx = -p \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0 \end{aligned}$$

2. - Si $m > 0$ alors f croissante donc
     $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif et
     $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif.
   - Si $m < 0$ alors f décroissante donc
     $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif et
     $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif.

♢

6.3 Exercices

6.3.1 Équations de droites

Exercice 6.1.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite $y = -3x + 0,5$. Déterminer si $A(150,5\,;\,-451)$ ou $B(-73,25\,;\,219,5)$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

Exercice 6.2.
Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$:

1. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{13}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = 6x + \frac{1}{6}$;
2. $A(1\,;\,-7)$ et $\mathscr{D}$: $y = -\frac{3}{4}(x+2) - 5$;
3. $A(2\,;\,5)$ et $\mathscr{D}$: $x = 5$;
4. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = \frac{1}{6}$;

Exercice 6.3.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
2. B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

Exercice 6.4.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
- $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
- $\mathscr{D}_5 : x = 6$;

Exercice 6.5.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -5x + 10$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 6x - 14$;
- $\mathscr{D}_3 : y = \frac{3x-1}{6}$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{-2x+1}{4}$;
- $\mathscr{D}_5 : 2x - 5y = 3$;

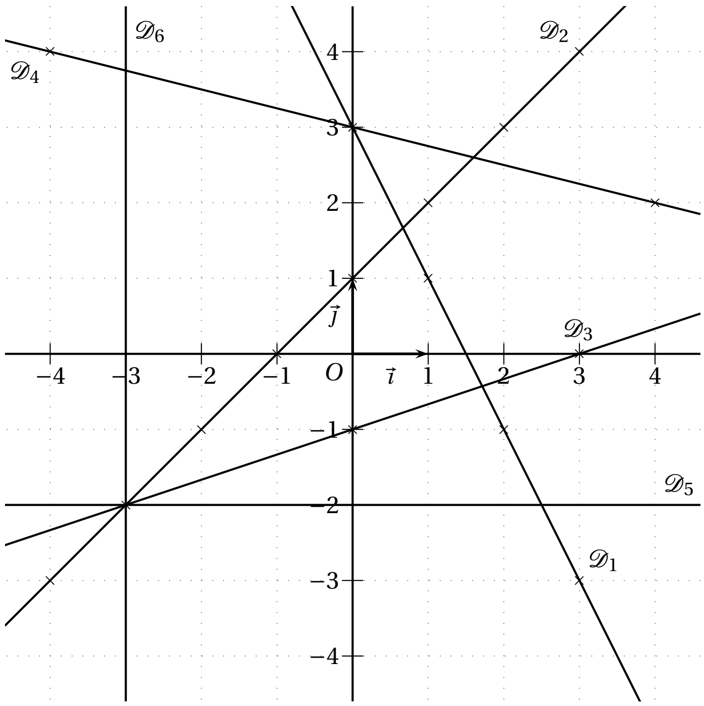
EXERCICE 6.6.
Dans un même repère, tracer les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
- $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
- $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;

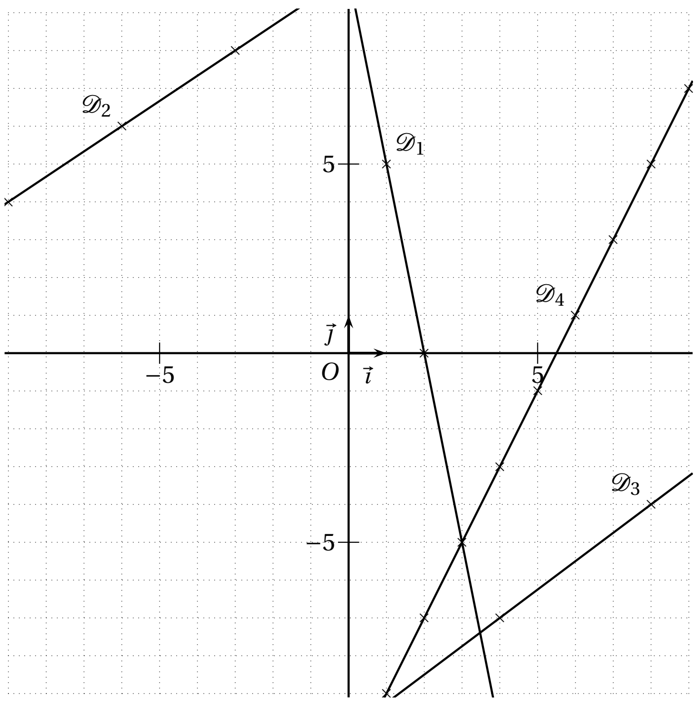
EXERCICE 6.7.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :

1. $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
2. $A(4;4)$ et $B(-1;2)$;
3. $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
4. $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
5. $A(1;3)$ et $B(1;4)$.

EXERCICE 6.8.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 6.9.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 6.10. 1. Déterminer l'équaion réduite de la droite $\mathscr{D}$ sachant que $A(2;1) \in \mathscr{D}$ et que $\mathscr{D}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}' : y = 3x - 1$.

2. (a) On donne $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$ et $D(-2;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
   (b) Même question avec $A(1;2)$, $B(2;-4)$, $C(0;3)$ et $D(1;-3)$.
3. Déterminer l'ordonnée du point A sachant que :
   - $A \in \mathscr{D}$;
   - $\mathscr{D}$ parallèle à la droite (BC) où $B(2;1)$ et $C(-1;3)$;
   - l'abscisse de A vaut 8

6.3.2 Fonctions affines

EXERCICE 6.11.
Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :

- agence A : Forfait de 50 € plus 0,42 € par km ;
- agence B : Forfait de 40 € plus 0,50 € par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique selon que l'on désire faire un parcours de
   - 50 km ?
   - 150 km ?
   - 300 km ?
2. On appelle x la distance que l'on désire parcourir. Déterminer selon les valeurs de x l'agence la plus économique.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la distance à parcourir et indiquant quelle agence est la plus intéressante pour cette distance ainsi que le tarif à payer.

EXERCICE 6.12.
Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants : Forfait d'une heure 15 € plus 0,30 € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau suivant, où la durée est la durée totale des communications du mois en minute et le coût est le montant final de la facture en euros :

Durée	45	80	120
Coût			

2. Existe-t-il une fonction affine f qui à une durée de communication x associe le coût $f(x)$?

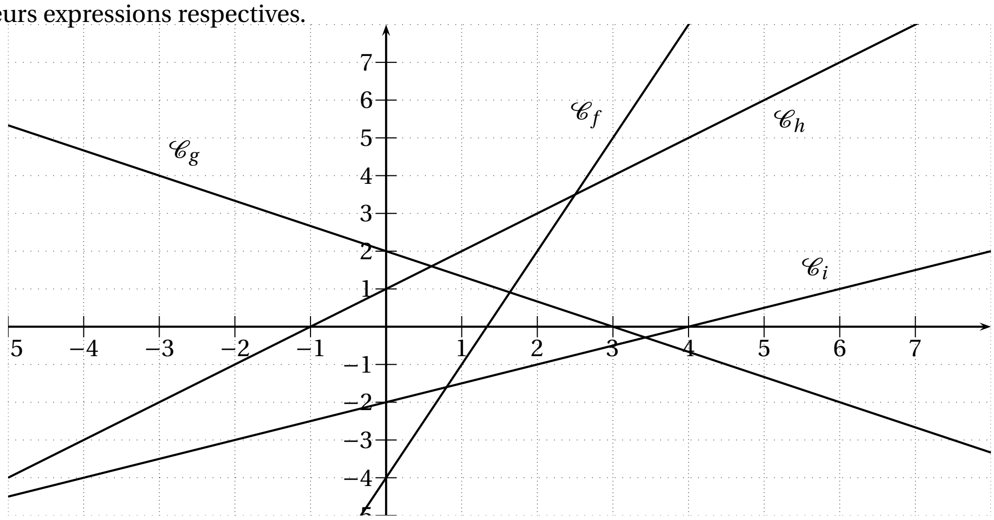
EXERCICE 6.13.
Soit f une fonction affine. Déterminer l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$
3. $f(5) = -1$ et $f(3) = 3$
4. $f(-4) = 5$ et $f(1) = 7$

EXERCICE 6.14.
Représenter dans un même repère les courbes des fonctions affines suivantes :

- $f(x) = 2x - 3$;
- $g(x) = 2x + 1$;
- $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$;
- $i(x) = -x + 4$;
- $j(x) = -\frac{3}{4}x + 5$;
- $k(x) = -3x + 5$.

EXERCICE 6.15.
Dans le repère ci-dessous on a représenté les courbes de quatre fonctions affines f, g, h et i.
Déterminer leurs expressions respectives.



EXERCICE 6.16.
On donne $P(x) = (2x+1)(-x+2)$.

1. (a) Étudier le signe de $2x+1$ selon les valeurs de x.
   (b) Étudier le signe de $-x+2$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x. *On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.*
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.
2. Étudier le signe, selon les valeurs de x, de chacune des fonctions suivantes :
   - $Q(x) = (-2x+1)(-3x+4)$;
   - $R(x) = (-x+4)(5-2x)$;
   - $T(x) = (x-1)(-2x+4)(2x-1)$.
3. Résoudre les inéquations suivantes :
   - $S(x) \geqslant 0$ sachant que $S(x) = (2x+3)(x-1)$;
   - $U(x) \leqslant 0$ sachant que $U(x) = (4-x)(x+1)(2x+2)$.

EXERCICE 6.17.
On donne $f(x) = (3x+4)(x-4) - (2x-3)(3x+4)$.
Résoudre $f(x) > 0$. *On pourra commencer par factoriser.*

EXERCICE 6.18.
On donne $g(x) = (2x+1) - (3x-1)$. Résoudre $g(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 6.19.
Résoudre les inéquations suivantes :

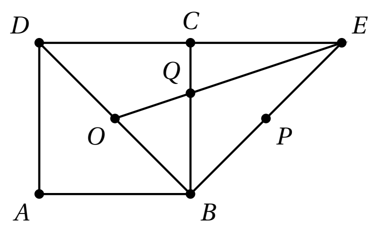
1. $x \leqslant x^2$
2. $\frac{1}{x} \leqslant x$
3. $x^3 \leqslant x^2$

EXERCICE 6.20.
On donne $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

1. Montrer que $P(x) = (x^2-1)(2x+3)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

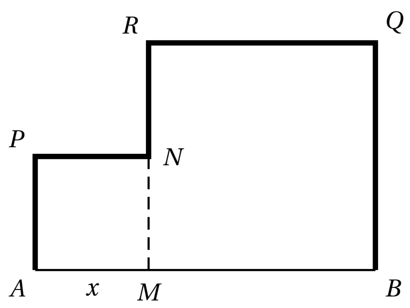
6.4 Problèmes

PROBLÈME 6.1.
$ABCD$ est un carré de centre O.
E est le symétrique de D par rapport à C.
Q est l'intersection des droites (OE) et (BC).
P est le milieu du segment $[BE]$.
On se place dans le repère (A, B, D) et on admettra que les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ et $(0;1)$.



1. Montrer que O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
2. Montrer que E a pour coordonnées $(2;1)$.
3. Montrer que P a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.
4. Déterminer une équation de la droite (OE) puis en déduire les coordonnées de Q.
5. Montrer que les points D, Q et P sont alignés.

Problème 6.2.
On donne $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.
Dans le même demi-plan, on construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction définie sur $[0;6]$ qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en gras sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.



1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle $[3;6]$.
2. Vérifiez que $f(x) = 18-2x$, si $x \in [0;3]$ et que $f(x) = 6+2x$, si $x \in [3;6]$.
3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur les abscisses, 0,5 cm sur les ordonnées), construisez la courbe représentatice de f.
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

Problème 6.3 (Comparaison de tarifs)**.**
Le tableau ci-dessous présente un extrait des tarifs des forfaits non bloqués pour téléphones portables, proposés par une société de téléphonie fictive.

Forfait	Min comprises dans le forfait	Coût du forfait (en €)	Par min de dépassement (en €)
1	90	33	0,30
2	180	43	0,25
3	300	57	0,18

Pour les forfaits 1, 2 et 3 on désigne, respectivement, par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ le prix à payer en euros pour une durée totale de communications de x minutes.

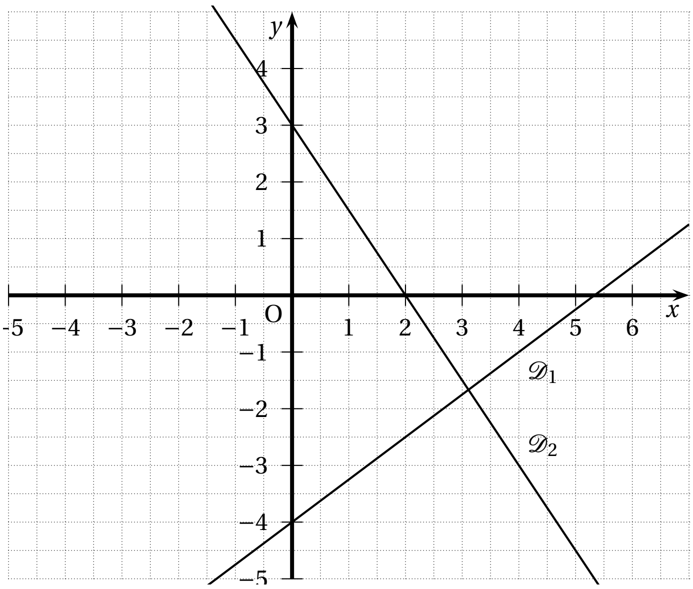
1. (a) Exprimer $f_1(x)$ en fonction de x lorsque $0 \leqslant x \leqslant 90$ puis lorsque $x > 90$.
   (b) Dans un repère orthogonal, représenter graphquement la fonction f_1 pour x compris entre 0 et 400.
2. Exprimer $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x et représenter sur le graphique précédent ces deux fonctions.
3. Lire sur le graphique quel est le tarif le plus avantageurx en fonction de la durée mensuelle des communications.
4. Écrire un algorithme prenant comme argument une durée de communication et indiquant quel forfait est le plus avantageux pour cette durée ainsi que le prix total à payer.

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°6 – Première partie

Équations de droite

EXERCICE 6.1 (3 points)**.**
On donne dans le repère ci-contre deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Donner, sans justifier, leurs équations réduites :

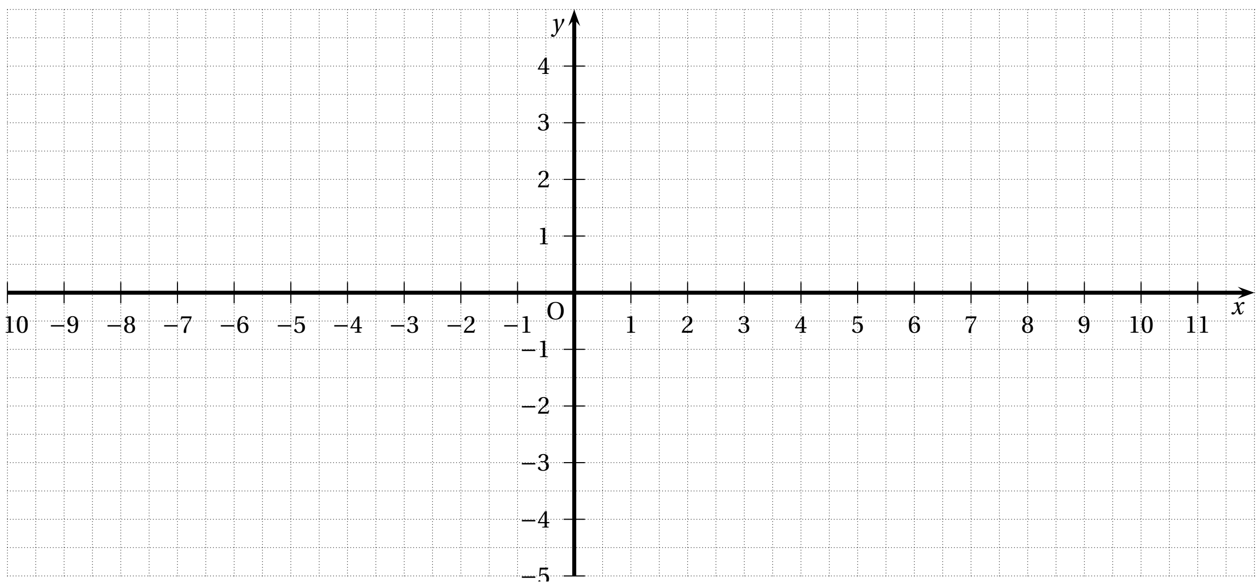
- $\mathscr{D}_1$ ....
- $\mathscr{D}_2$ ....



EXERCICE 6.2 (2 points)**.**
Soient $A\,(1\,;\,2)$ et $B\,(4\,;\,-2)$ deux points du plan. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

EXERCICE 6.3 (3 points)**.**
Représenter dans le repère ci-contre les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ d'équations respectives : $\mathscr{D}_1 : y = 2x - 1$, $\mathscr{D}_2 : y = \frac{2}{3}x + 1$ et $\mathscr{D}_3 : y = -x + 3$.



EXERCICE 6.4 (7 points)**.**
Soient $A(1;4)$, $B(-1;1)$, $C(4;2)$, $D(2;-2)$, $E(1;-1)$, $F(4;6)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=2x-3$

1. (a) Le point E appartient-il à $\mathscr{D}$?
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Le point F appartient-il à $\mathscr{D}$?
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) Déterminer l'abscisse du point G de $\mathscr{D}$ sachant que son ordonnée est 4.
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A et parallèle à $\mathscr{D}$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

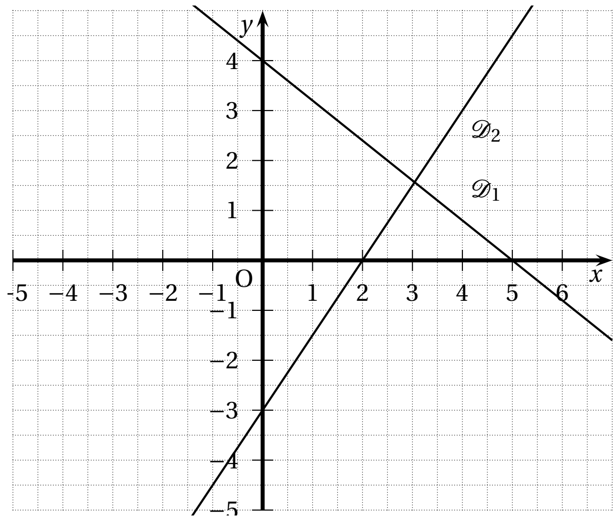
3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. Les droites $\mathscr{D}$ et (CD) sont-elles parallèles ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°6

Équations de droite – Fonctions affines

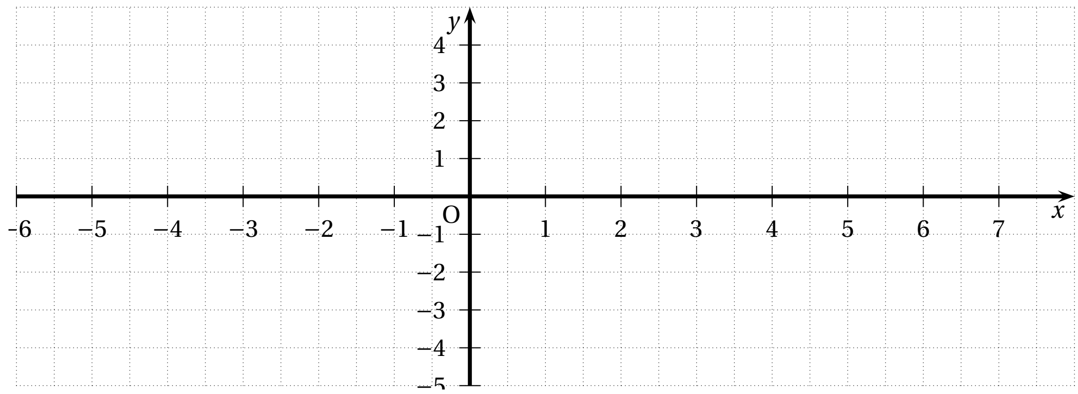
EXERCICE 6.1 (3 points)**.**
On donne dans le repère ci-contre deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
Donner, sans justifier, leurs équations réduites :



- $\mathscr{D}_1$ ....
- $\mathscr{D}_2$ ....

EXERCICE 6.2 (2 points)**.**
Soient $A(-1\,;4)$ et $B(3\,;1)$ deux points du plan. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

EXERCICE 6.3 (2 points)**.**
Représenter dans le repère ci-contre les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives : $\mathscr{D}_1 : y = x - 2$ et $\mathscr{D}_2 : y = -\frac{3}{2}x + 1$.



EXERCICE 6.4 (6 points)**.**
Soient $A(0\,;4)$, $B(-3\,;-5)$, $C(3\,;2)$, $D(2\,;-2)$, $E(-1\,;-6)$, $F(2\,;4)$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 3x - 2$

1. (a) Le point E appartient-il à $\mathscr{D}$?

   (b) Le point F appartient-il à $\mathscr{D}$?

2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}'$ passant par A et parallèle à $\mathscr{D}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. Les droites $\mathscr{D}$ et (CD) sont-elles parallèles ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

EXERCICE 6.5 (3 points)**.**

Déterminer, selon les valeurs de x, le signe de :

- $\mathscr{A}(x) = 2x - 1$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

- $\mathscr{B}(x) = 3 - 6x$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

EXERCICE 6.6 (4 points)**.**

On donne $\mathscr{P}(x) = -2x^3 + x^2 + 18x - 9$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathscr{P}(x) = \left(x^2 - 9\right)(-2x + 1)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Factoriser au maximum $\mathscr{P}(x)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $\mathscr{P}(x) > 0$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Chapitre 7

Statistiques continues

Sommaire

7.1 Un exemple . . . **81**
7.1.1 Valeurs extrêmes . . . 81
7.1.2 Moyenne . . . 81
7.1.3 Médiane . . . 81
7.1.4 Mode . . . 82
7.2 Exercices . . . **82**

7.1 Un exemple

Lors d'une enquête portant sur 1 300 personnes, on a demandé le temps passé par jour devant le téléviseur. Les données relevées ont été regroupées par classe car les 1 300 données sont en trop grand nombre pour être manipulées toutes ensembles. On a obtenu le tableau suivant :

Temps (h)	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6[	[6; 7]
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

Les 1 300 données ne sont alors plus accessibles dans le détail. Peut-on malgré tout obtenir de ce tableau les paramètres statistiques de la série (valeurs extrêmes, moyenne, médiane, etc.) ou, au moins, des valeurs approchées ?

7.1.1 Valeurs extrêmes

1. Peut-on obtenir les valeurs minimale et maximale de la série ? Si oui les donner. Sinon donner une valeur (la plus grande possible) dont on est sûr qu'elle est plus petite que toutes les données de la série et une valeur (la plus petite possible) dont on est sûr qu'elle est plus grande que toutes les données de la série.
2. Peut-on obtenir l'étendue de la série ? Si oui la donner. Sinon donner l'étendue maximale que peut avoir la série.

7.1.2 Moyenne

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas calculer la moyenne exacte du temps passé par jour devant la télévision.
2. Pour obtenir une valeur approchée de la moyenne, on considère que toutes les données d'une classe sont égales au centre de la classe.
   Ainsi, par exemple, nous considèrerons que les 170 données de la classe $[0;1[$ sont égales à $\frac{0+1}{2}=0,5$.
   Compléter alors le tableau suivant et en déduire une valeur approchée de la moyenne :

Temps (h)	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6[	[6; 7]
Centre de la classe							
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

7.1.3 Médiane

1. Quel est le rang de la médiane de cette série ?
2. Expliquer pourquoi on ne peut pas savoir le temps médian exact (la médiane exacte de cette série) passé par jour devant la télévision.

3. Compléter le tableau suivant :

Temps passé devant la télévision inférieur à	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h
Effectif	170	309	432	221	103	41	24
Effectifs cumulés croissants							

4. À l'aide de ces effectifs cumulés croissants et du 1., déterminer à quelle classe appartient la médiane exacte de cette série.
5. Cette donnée est souvent trop approximative pour être utile en statistique et l'on a souvent besoin d'une estimation plus précise. On l'obtient avec un graphique.
   (a) Représenter le tableau sur un graphique en indiquant en abscisse les temps passés devant la télévision (1 h = 2 cm) et en ordonnée les effectifs cumulés croissants (100 = 1 cm).
   (b) À l'aide de ce graphique et du 1., déterminer une valeur approchée de la médiane de cette série.

7.1.4 Mode

Lorsque les données sont regroupées par classes de même taille le mode n'est pas accessible mais la classe dont l'effectif et le plus grand est appelée classe modale. Lorsque les classes ne sont pas de la même taille, il existe des moyens d'estimer celle qui est modale, mais cette compétence n'est pas au programme de la Seconde.

7.2 Exercices

Exercice 7.1.
Le tableau ci-contre donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Estimer le salaire moyen et le salaire médian des employés de l'entreprise.

Salaire	Effectif
$[1\,000\,;\,1\,200[$	326
$[1\,200\,;\,1\,500[$	112
$[1\,500\,;\,2\,000[$	35
$[2\,000\,;\,3\,000[$	8
$[3\,000\,;\,10\,000[$	3

Exercice 7.2.
Dans une petite ville fictive où la taxe d'habitation est proportionnelle à la superficie de l'habitation, la répartition des habitations selon leur superficie est la suivante :

Superficie en m^2	Effectif
$[10\,;\,40[$	14
$[40\,;\,70[$	24
$[70\,;\,100[$	54
$[100\,;\,120[$	64
$[120\,;\,140[$	32
$[140\,;\,170[$	12

1. Déterminer une valeur approchée de la superficie moyenne des habitations de cette ville.
2. Un membre du conseil municipal propose d'exonérer la moitié des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ? Une personne dont l'appartement mesure 110 m^2 serait-elle exonérée ?
3. Un autre membre du conseil municipal propose d'exonérer le quart des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ?

EXERCICE 7.3.
Dans deux entreprises A et B, les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres.
Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel net, en euros. On suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, la répartition est régulière.

Entreprise A

Salaires	$[1000; 2000[$	$[2000; 3000[$	$[3000; 4000[$
Ouvriers	114	66	0
Cadres	0	8	12

Entreprise B

Salaires	$[1000; 2000[$	$[2000; 3000[$	$[3000; 4000[$
Ouvriers	84	42	0
Cadres	0	12	12

1. (a) Calculer la moyenne des salaires de tous les employés de l'entreprise A
   (b) Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de l'entreprise A
   (c) Calculer la moyenne des salaires des cadres de l'entreprise A
2. Faire les mêmes calculs pour l'entreprise B
3. Le P.D.G. de l'entreprise A dit à celui de l'entreprise B : « Mes employés sont mieux payés que les vôtres. »
   « Faux »répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »
   Expliquer ce paradoxe.

EXERCICE 7.4.
Lors d'une étude d'une population de rats, K. Miescher a observé l'évolution d'une population de 144 rats.
Le tableau ci-contre indique la durée de vie (en mois) des rats.
Ainsi, un seul rat a vécu entre 10 et 15 mois, trois ont vécu entre 15 et 20 mois, neuf entre 20 et 25 mois etc. On suppose que, dans chaque classe, la répartition est régulière.

1. Évaluez l'étendue de cette série
2. Évaluez la moyenne de la durée de vie d'un rat dans cette population
3. Quelle est le rang de la durée de vie médiane d'un rat dans cette population ?
   À l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants,évaluez le valeur de la médiane ?
4. En observant la moyenne et la médiane, quel commentaire peut-on faire ?

Durée de vie (en mois)	Effectif
$[10; 15[$	1
$[15; 20[$	3
$[20; 25[$	9
$[25; 28[$	12
$[28; 30[$	13
$[30; 32[$	20
$[32; 34[$	23
$[34; 36[$	26
$[36; 38[$	22
$[38; 40[$	11
$[40; 42[$	3
$[42; 43[$	1

Chapitre 8

Incidence et parallélisme dans l'espace

Sommaire

8.1 Positions relatives de droites et de plans **85**
8.1.1 Règles d'incidence 85
8.1.2 Positions relatives de deux droites 85
8.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan 86
8.1.4 Positions relatives de deux plans 86
8.2 Parallélisme dans l'espace **87**
8.2.1 Parallélisme entre droites 87
8.2.2 Parallélisme entre plans 87
8.2.3 Parallélisme entre droite et plan 87
8.3 Exercices **89**
8.3.1 Incidence 89
8.3.2 Parallélisme 90
8.3.3 Sections 91

8.1 Positions relatives de droites et de plans

8.1.1 Règles d'incidence

Règle 8.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée (AB).*

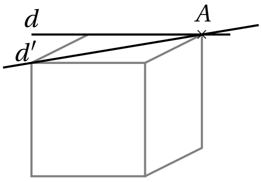
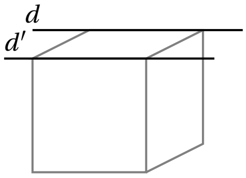
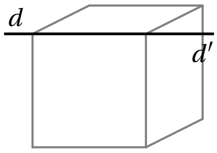
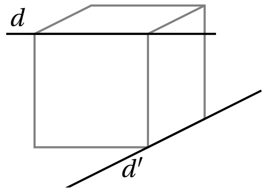
Règle 8.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté (ABC).*

Règle 8.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathscr{P}$.*

Règle 8.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (*PYTHAGORE*, *THALÈS*, etc.).*

8.1.2 Positions relatives de deux droites

Règle 8.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

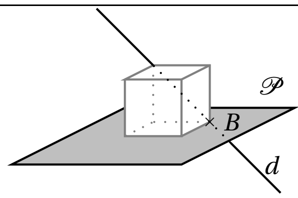
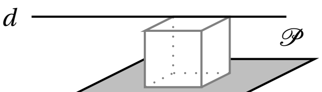
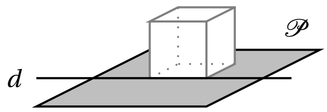
Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersection A. $d \cap d' = \{A\}$	d et d' sont strictement parallèles. $d \cap d' = \varnothing$	d et d' sont confondues $d \cap d' = d = d'$	Aucun plan ne contient à la fois d et d'. $d \cap d' = \varnothing$

Remarques. • Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.

- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  · par la donnée de trois points ;
  · par la donné de deux droites sécantes ;
  · par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
  · par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

8.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

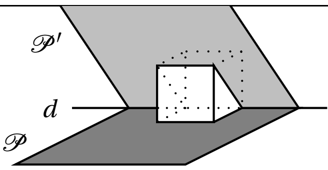
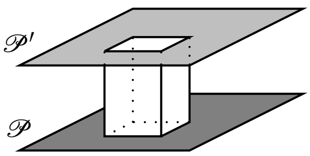
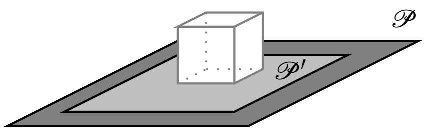
Règle 8.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B. $d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	d est contenue dans $\mathscr{P}$ $d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

8.1.4 Positions relatives de deux plans

Règle 8.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques. • Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.

- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenue dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

8.2 Parallélisme dans l'espace

8.2.1 Parallélisme entre droites

Propriété 8.1. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

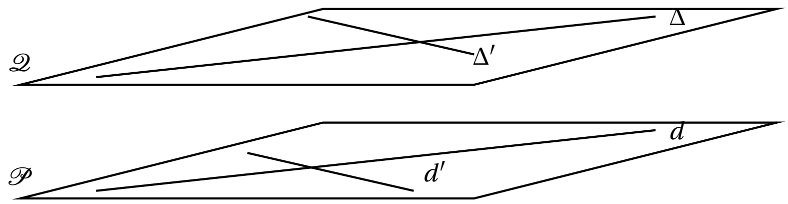
Propriété 8.2. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

8.2.2 Parallélisme entre plans

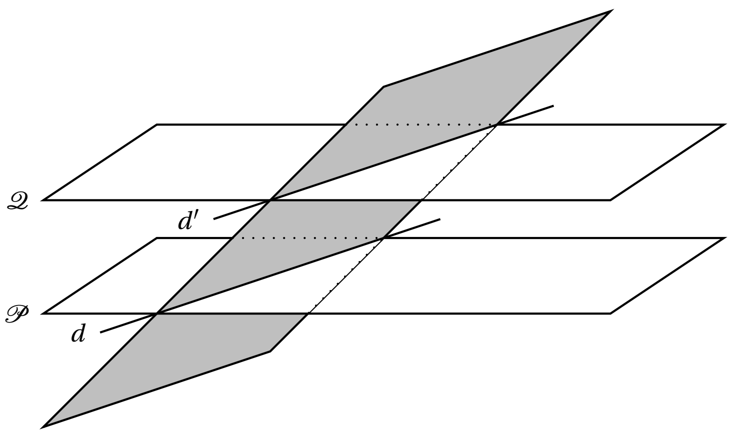
Propriété 8.3. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 8.4. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



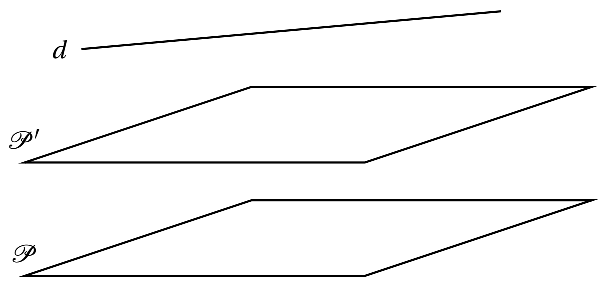
Propriété 8.5. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersection d et d' sont parallèles.*



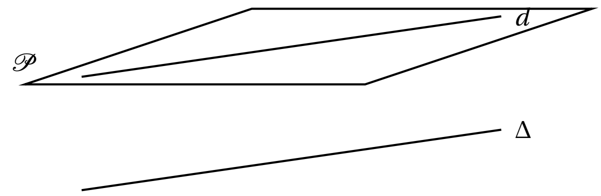
8.2.3 Parallélisme entre droite et plan

Propriété 8.6. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

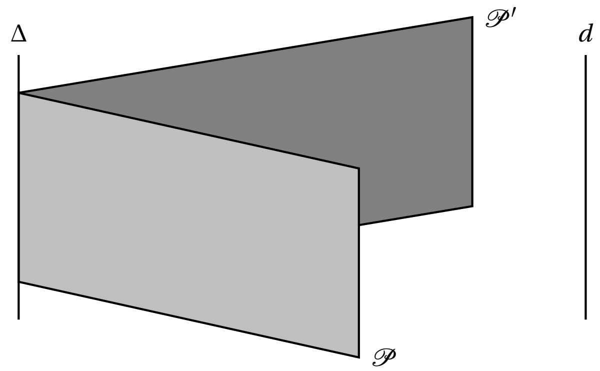
$$\text{Si } d \parallel \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ alors } d \parallel \mathscr{P}'$$



Propriété 8.7. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*

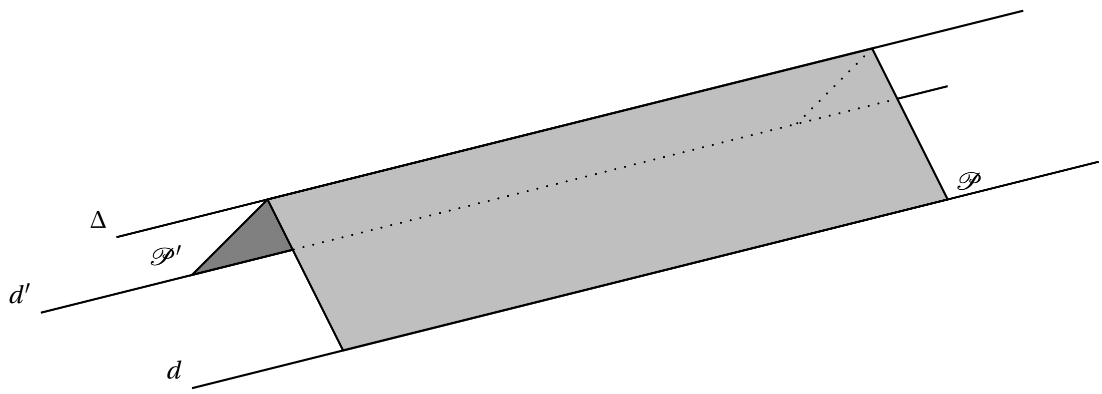


Propriété 8.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 8.9 (Théorème du toit)**.** *Si :*
- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

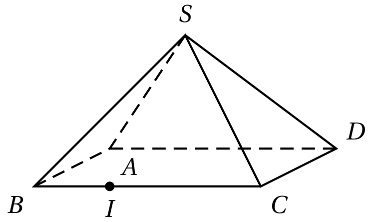
alors Δ est parallèle à d et à d'.



8.3 Exercices

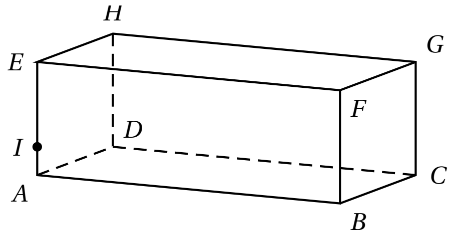
8.3.1 Incidence

EXERCICE 8.1.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est un point du segment $[BS]$, distinct de B et C.



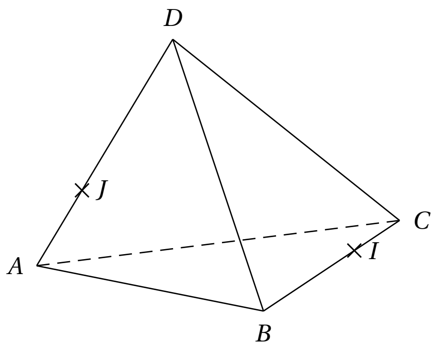
1. Montrer que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construire leur intersection.

EXERCICE 8.2.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I est un point de $[AE]$ distinct de A et de E.



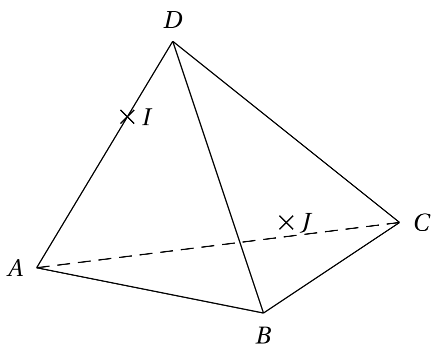
1. Démontrer que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontrer que la droite (GI) n'est pas contenue dans le plan $(ABCD)$.
3. Construire J, intersection de la droite (GI) et du plan $(ABCD)$.

EXERCICE 8.3.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ distinct de B et de C. J est un point de $[AD]$ distinct de A et de D.
Dans les cas suivants, démontrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersection.

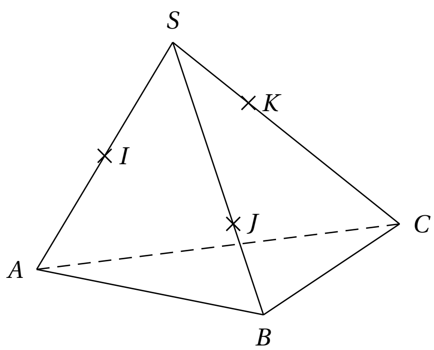


1. (DIJ) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

EXERCICE 8.4.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[DA]$ distinct de D et de A. J est un point de la face BCD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
Indication : on pourra commencer par construire l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).



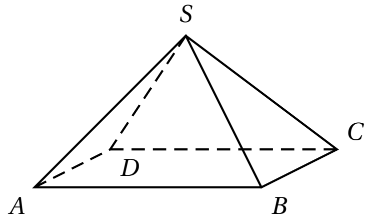
EXERCICE 8.5.
$SABC$ est un tétraèdre. I, J et K sont des points de, respectivement, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.



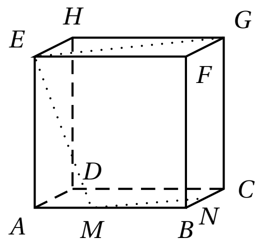
1. Construire E, intersection de (BC) et (JK), F, intersection de (AC) et (IK), G, intersection de (AB) et (IJ).
2. Démontrer que F est un point commun aux plans (ABC) et (IJK).
3. Prouver que les points E, F et G sont alignés.

8.3.2 Parallélisme

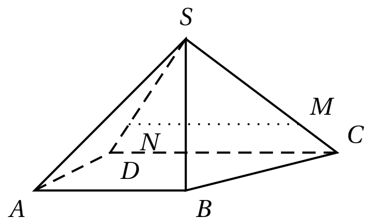
Exercice 8.6.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est le milieu de $[AS]$ et L est le milieu de $[BS]$.
Démontrer que les droites (IL) et (CD) sont parallèles.



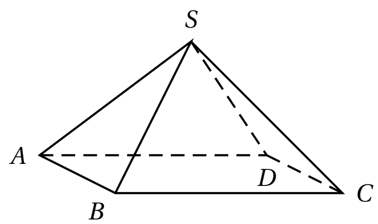
Exercice 8.7.
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$.
Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (EG) sont parallèles.



Exercice 8.8.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec $(AB) \parallel (CD)$. M est un point de l'arête $[SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

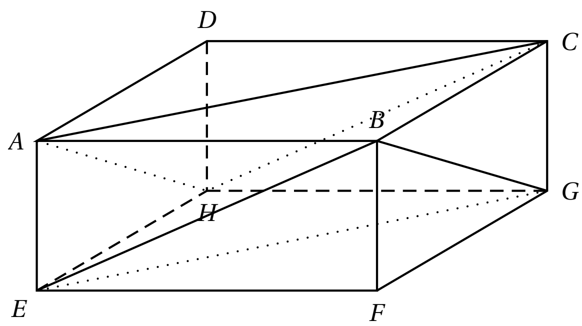


Exercice 8.9.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
Démontrer que les plans (SAB) et (SDC) se coupent selon la parallèle à (AB) passant par S.

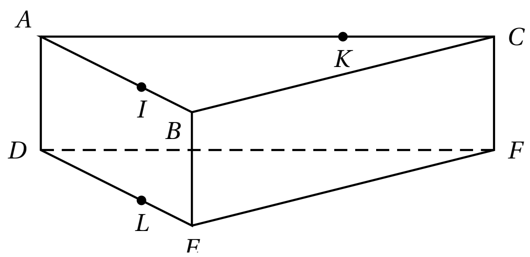


Exercice 8.10.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

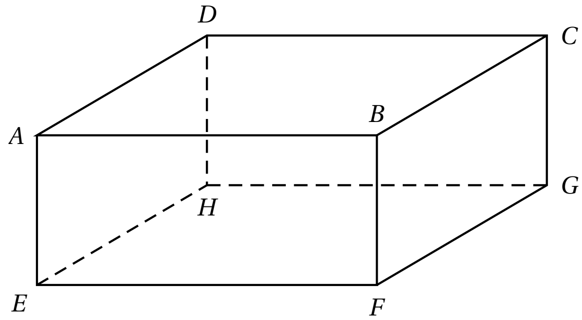
1. Le quadrilatère $BEHC$ est un rectangle. Que peut-on en déduire pour les droites (EB) et (HC) ?
2. De façon analogue, que peut-on dire des droites (AH) et (BG) ?
3. En déduire alors la position relative des plans (ACH) et (EBG) ?



Exercice 8.11.
$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I, L et K sont les points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ tels que : $AI = \frac{2}{3}AB$; $AK = \frac{2}{3}AC$ et $EL = \frac{1}{3}ED$.
Démontrer que le plan (IKL) est parallèle au plan (BCF).



EXERCICE 8.12.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Démontrer que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH).

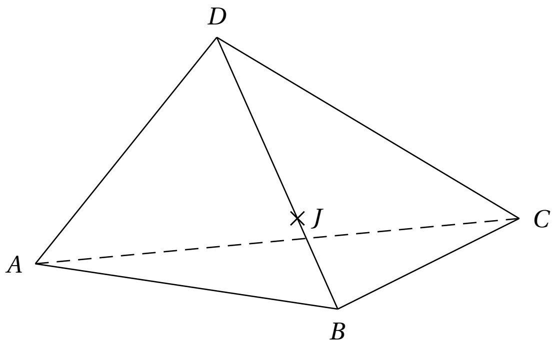


8.3.3 Sections

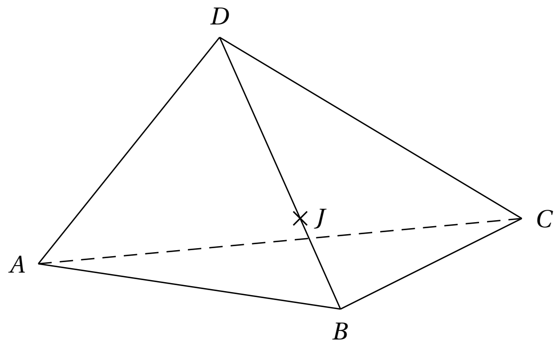
EXERCICE 8.13 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 8.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 8.1 – Sections de l'exercice 8.13

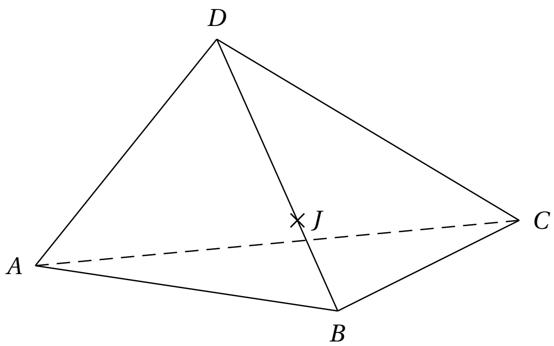
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



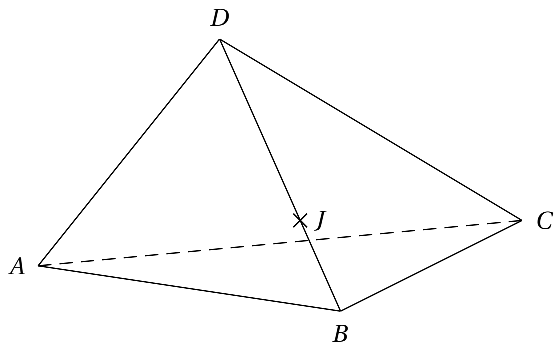
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC

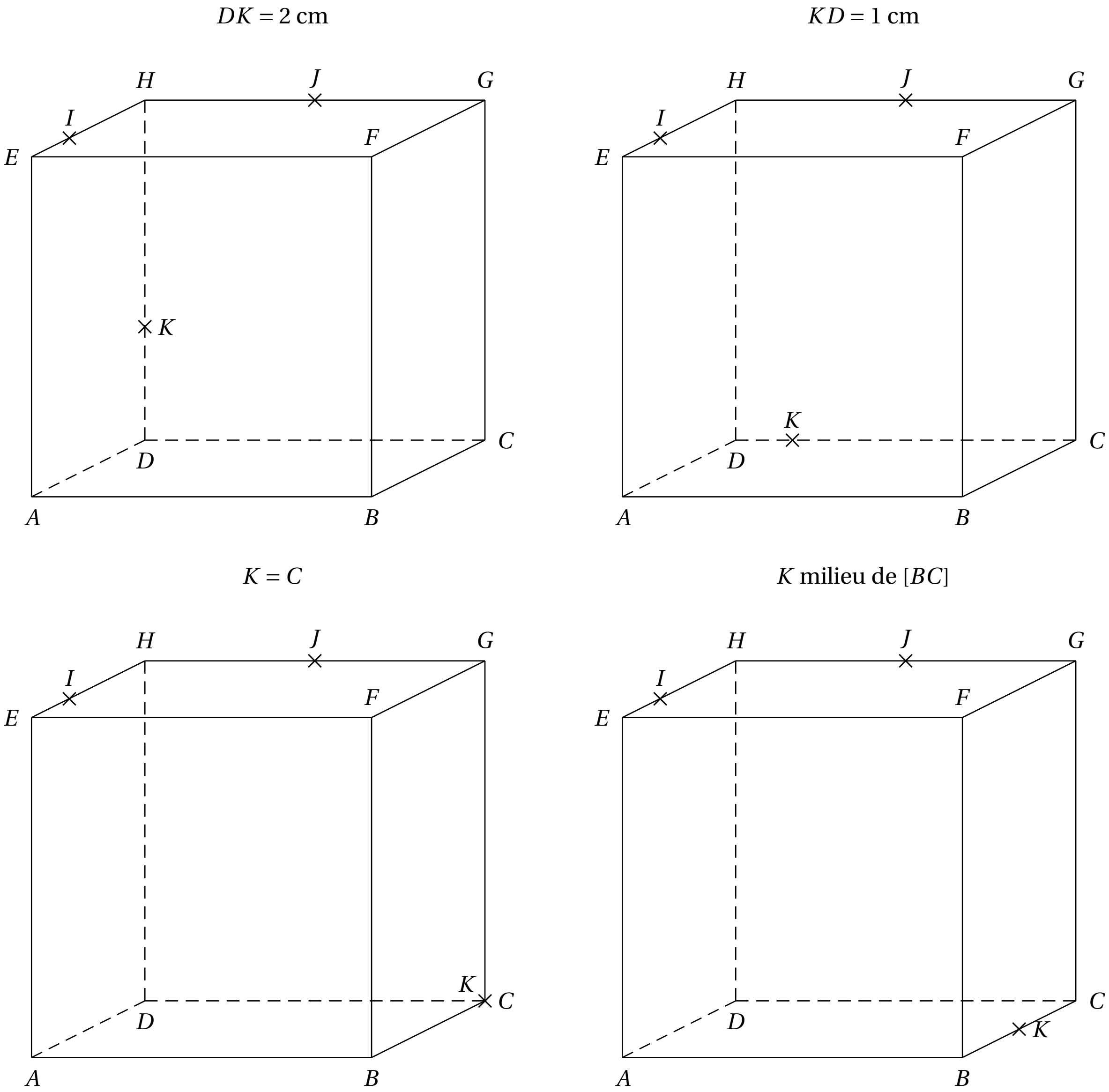


$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



EXERCICE 8.14 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 8.2 de la présente page, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

FIGURE 8.2 – Sections de l'exercice 8.14



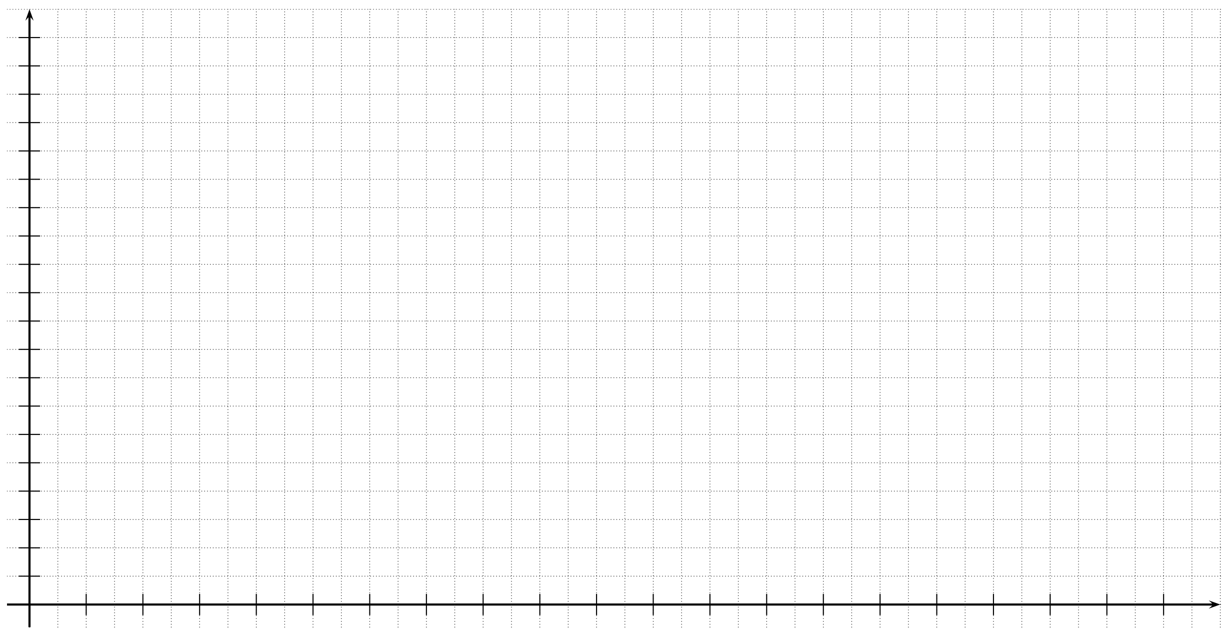
2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°7

Statistiques continues – Géométrie dans l'espace – Algorithmique

EXERCICE 7.1 (5 points)**.**
La répartition des notes en mathématiques dans une classe de Seconde est la suivante :

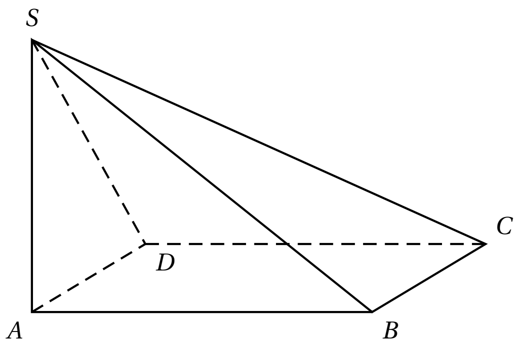
Notes	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectif	3	6	7	9	6	5

1. Estimer l'étendue de cette série.
2. Estimer la moyenne de cette série.
3. (a) Construire dans le repère ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants.
   (b) En déduire une estimation de la médiane de cette série.

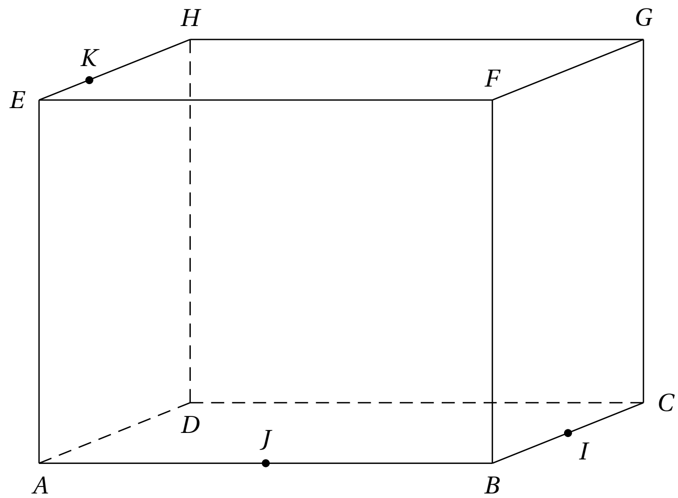


EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
$SABCD$ est une pyramide à base carrée.
I est le milieu du segment $[SA]$ et J est le milieu du segment $[SB]$.
Le plan (ADJ) coupe la droite (SC) en K.

1. Construire les points I et J.
2. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AB).
3. (a) Démontrer que la droite (JK) est parallèle à la droite (BC).
   (b) Construire alors K.
4. Que peut-on en déduire pour les plans (IJK) et (ABC) ?



Exercice 7.3 (5 points)**.**
Construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le pavé $ABCDEFGH$.
On ne demande aucune justification mais on laissera les traits de construction et on indiquera les éventuels parallélismes utilisés.



Exercice 7.4 (5 points)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage d'Algobox, où xA, yA, xB, yB, xC, yC, a, b et c sont des variables de type nombre :

```
1   DEBUT_ALGORITHME
2     LIRE xA
3     LIRE yA
4     LIRE xB
5     LIRE yB
6     LIRE xC
7     LIRE yC
8     a PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xB-xC,2)+pow(yB-yC,2))
9     b PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xA-xC,2)+pow(yA-yC,2))
10    c PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(xB-xA,2)+pow(yB-yA,2))
11    SI (a==b et a==c) ALORS
12      DEBUT_SI
13      AFFICHER "Le triangle ABC est ..."
14      FIN_SI
15      SINON
16        DEBUT_SINON
17        AFFICHER "Le triangle ABC n'est pas ..."
18        FIN_SINON
19  FIN_ALGORITHME
```

On rappelle qu'en langage algobox sqrt(x) signifie $\sqrt{x}$ *et que pow(x,2) signifie* x^2.

1. Compléter les lignes 13 et 17.
2. Modifier cet algorithme afin qu'il indique uniquement si le triangle est isocèle *(on n'indiquera sur sa copie que les lignes modifiées).*
3. Modifier cet algorithme afin qu'il indique uniquement si le triangle est rectangle *(on n'indiquera sur sa copie que les lignes modifiées).*

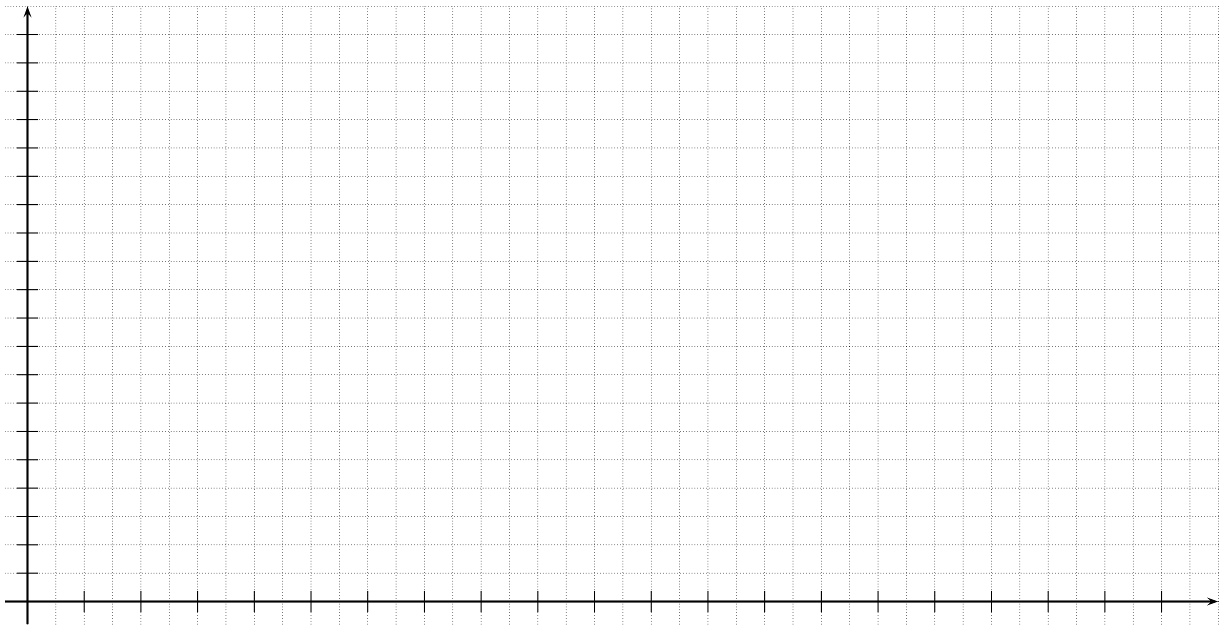
2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°7

Statistiques continues – Géométrie dans l'espace – Algorithmique

EXERCICE 7.1 (5 points)**.**
La répartition des notes en mathématiques dans une classe de Seconde est la suivante :

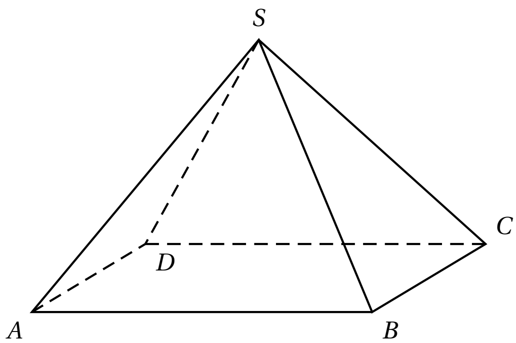
Notes	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectif	1	3	7	9	12	6

1. Estimer l'étendue de cette série.
2. Estimer la moyenne de cette série.
3. (a) Construire dans le repère ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants.
   (b) En déduire une estimation de la médiane de cette série.

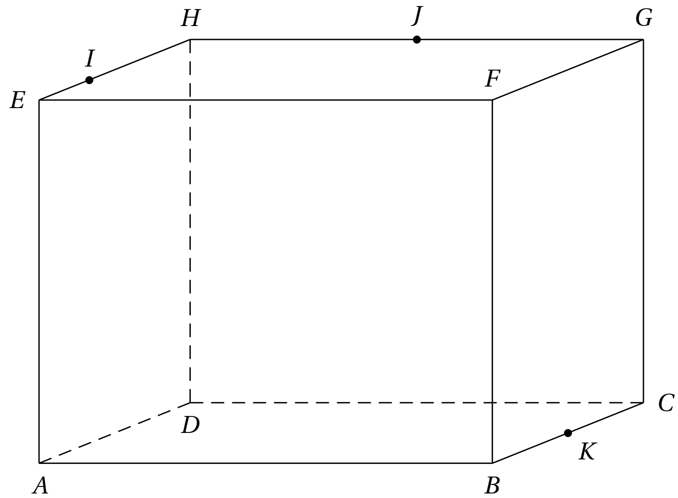


EXERCICE 7.2 (5 points)**.**
$SABCD$ est une pyramide à base carrée.
I est le point du segment $[SB]$ tel que $SI = \frac{2}{3}SB$.
J est le point du segment $[SC]$ tel que $SJ = \frac{2}{3}SC$.
Le plan (CDI) coupe la droite (SA) en K.

1. Construire les points I et J.
2. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).
3. (a) Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (AB).
   (b) Construire alors K.
4. Que peut-on en déduire pour les plans (IJK) et (ABC) ?



EXERCICE 7.3 (5 points)**.**
Construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le pavé $ABCDEFGH$.
On ne demande aucune justification mais on laissera les traits de construction et on indiquera les éventuels parallélismes utilisés.

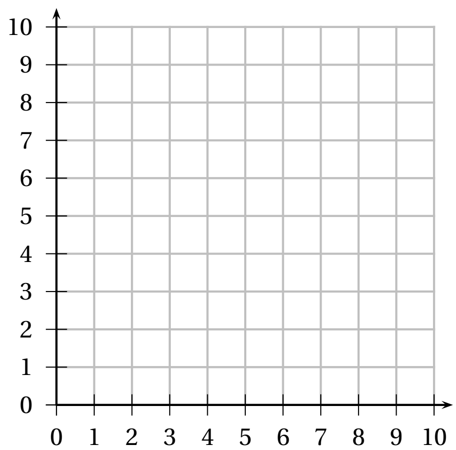


EXERCICE 7.4 (5 points)**.**
Les deux questions sont indépendantes.

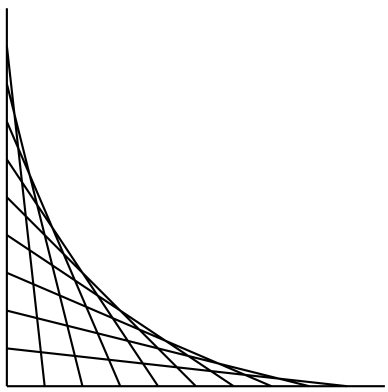
1. On donne l'algorithme suivant (réalisé avec algobox) :

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR k ALLANT_DE 0 A 10
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT (0,k)->(10-k,10)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

   L'appliquer, à la main, dans le repère ci-contre.



2. On donne le schéma ci-dessous.
   Écrire un algorithme utilisant une boucle et permettant de le réaliser.



Chapitre 9

Fluctuations d'échantillonage

Sommaire

9.1 Activité 98
9.2 Bilan et compléments 102
9.3 Exercices 102

9.1 Activité

Rappels :
- *l'effectif d'un résultat est le nombre de fois que ce résultat apparaît ;*
- *la fréquence d'un résultat est l'effectif de ce résultat divisé par l'effectif total.*

ACTIVITÉ 9.1 (Simulations de séries de lancers de dés)**.**
L'objectif de cette activité est de produire des séries de 50 lancers de dé à 6 faces et d'observer la distribution des fréquences de chacune des faces.
Pour éviter des lancers de dés qui peuvent être bruyants, on va simuler ces lancers à l'aide de la fonction *random* de la calcultrice.

1. La fonction *random* de la calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire comportant 10 décimales et compris dans l'intervalle $[0;1[$.
   (a) Faire quelques essais.
   (b) Parfois la calculatrice n'affiche que 9 décimales. Pourquoi ?
   (c) Comment peut-on simuler le lancer d'un dé à 6 faces avec cette fonction ?

   Pour la suite de l'activité, on appelera *lancer de dé* la simulation d'un dé obtenu à la calculatrice.
2. **Par groupe de deux élèves**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 9.1 page ci-contre.
   - l'un lance un dé 50 fois, l'autre note le résultat obtenu ;
   - on recommence en permuttant les rôles ;
   - chaque groupe de deux obtient alors deux tableaux de cinquante résultats et complète les trois tableaux de fréquence.

   (b) Graphiques.
   Les graphiques sont à faire dans les repères de la page 100.
   On note en abscisses les numéros des faces du dé et en ordonnées les fréquences de chacun de chacun des numéros.
   - Faire les diagrammes des fréquences de vos résultats et de ceux de votre voisin sur un même graphique en utilisant deux couleurs différentes.
   - Faire les diagrammes des fréquences de votre groupe sur le graphique suivant.
3. **Par colonne puis pour la classe**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 9.2 page ci-contre.
   - relever les résultats de tous les groupes de deux élèves de votre colonne et compléter le quatrième tableau de fréquence ;
   - relever enfin les résultats de tous les élèves de la classe et compléter le dernier tableau.

   (b) Graphiques.
   Les graphiques sont à faire dans les repères de la page 100.
   - Faire les diagrammes des fréquences de votre colonne.
   - Faire les diagrammes des fréquences de votre classe sur le graphique suivant.
4. **Comparaison des graphiques**
   (a) Comparer le diagramme de vos fréquences à celui de votre voisin.
   (b) Comparer le diagramme des fréquences de votre groupe à celui d'autres groupes.
   (c) Comparer le diagramme des fréquences de votre colonne à celui d'autres colonnes puis à celui de la classe.
   (d) Que constate-t-on ?
   Ce phénomène s'appelle *fluctuation d'échantillonage sur des séries de taille 50.*

TABLE 9.1 – Groupe de deux élèves

Mes 50 lancers

Tableau de fréquence de mes résultats

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Ceux de mon voisin

Tableau de fréquence des résultats de mon voisin

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Tableau de fréquence de mon groupe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	100	

TABLE 9.2 – Pour la colonne puis pour la classe

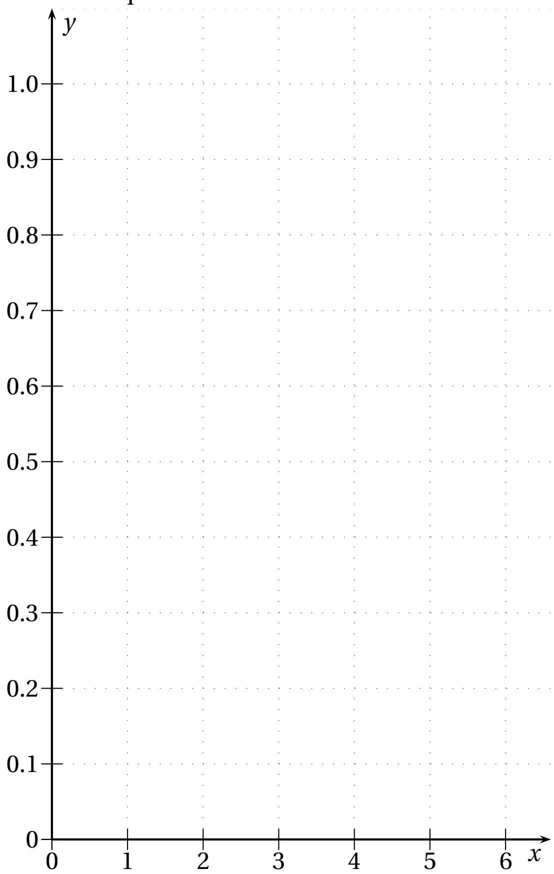
Tableau de fréquence de ma colonne

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

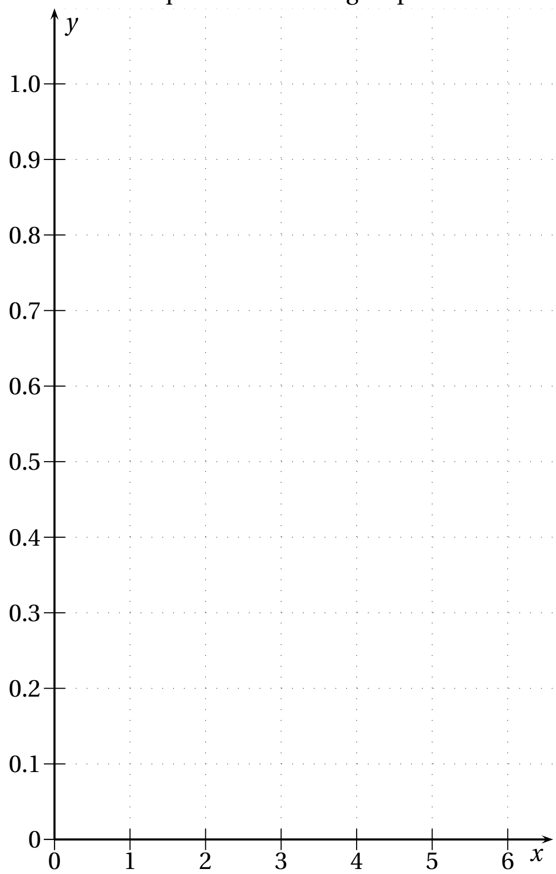
Tableau de fréquence de la classe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

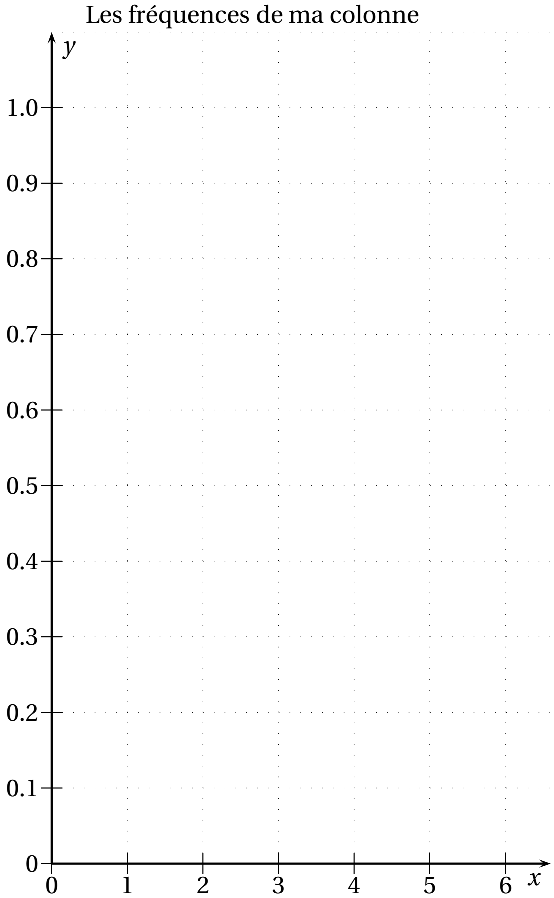
Mes fréquences et celles de mon voisin



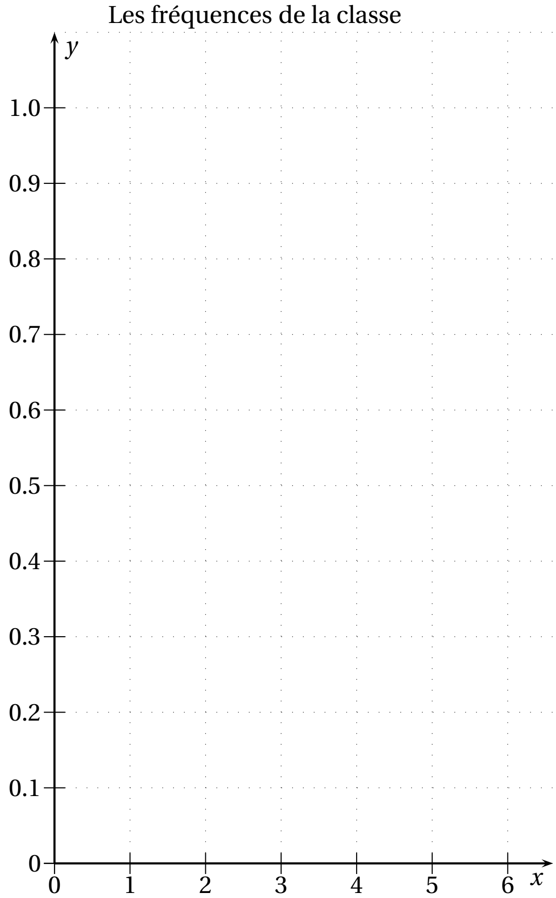
Les fréquences de mon groupe



Les fréquences de ma colonne



Les fréquences de la classe



ACTIVITÉ 9.2 (Intervalle de fluctuation)**.**
Dans la classe de Seconde 14 pour l'année scolaire 2010–2011, il y avait 9 garçons et 28 filles, ce qui paraît disproportionné.
On peut se demander toutefois si, lorsqu'on choisit 37 élèves au hasard dans une population constituée d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons, cette distribution est rare.

1. Quelle était la fréquence des filles dans la classe de Seconde 14 ?
2. Expliquer comment simuler le choix de 37 élèves au hasard dans une population d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons à l'aide de la fonction *random* de la calculatrice.
3. Procéder à cette simulation en notant le nombre de filles et de garçons obtenus et calculer la fréquence des filles dans votre simulation (arrondie au centième).
4. Écrire cette fréquence au tableau et noter les résultats des simulations de la classe dans le tableau ci-dessous :

5. Déterminer, pour cette série statistique :
   (a) les valeurs extrêmes, les premier et troisième quartiles, les premier et neuvième déciles, la médiane et la moyenne ;
   (b) représenter le diagramme en boite correspondant ;
   (c) déterminer l'intervalle interquartile et interpréter le résultat ;
   (d) déterminer l'intervalle interdécile et interpréter le résultat.
6. D'après ces résultats, peut-il arriver que le hasard produise une distribution comparable à celle de la Seconde 14 ? Si oui, est-ce fréquent ?
7. Les résultats obtenus par la classe peuvent très bien être eux aussi exceptionnels, aussi a-t-on besoin d'une règle plus objective. Nous utiliserons la propriété suivante, qu'on admettra :

   PROPRIÉTÉ. *Dans une population, la proportion d'un caractère est p. On produit un échantillon de taille n de cette population et on détermine la fréquence f du caractère dans cet échantillon.*
   Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, que l'on appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

   Dans notre exemple :
   - Si c'est le cas, on peut avancer, au risque de 5 % de se tromper, que l'échantillon (la classe) est représentatif d'une population (le lycée) comportant une moitié de filles et d'une moitié de garçons.
   - Si ce n'est pas le cas, on peut avancer, au risque de 5 % de se tromper, que l'échantillon (la classe) n'est représentatif pas d'une population (le lycée) comportant une moitié de filles et d'une moitié de garçons.
     Les raisons peuvent être nombreuses :
     · la classe a été volontairement constituée d'une majorité de filles ;
     · la classe a été constituée en fonction des options et les filles choisissent plus souvent telle option ;
     · on est dans les 5 % exceptionnels et donc on se trompe en s'avançant ainsi ;
     · le modèle choisit n'est pas le bon (la population de référence, le lycée, ne comporte pas une moitié de filles et une moitié de garçons) ;
     · etc.

   (a) Dans notre population de référence, quelle est la valeur de p qu'on a supposée ?
   (b) Quelle est la valeur de n ?
   (c) Déterminer alors l'intervalle de fluctuation correspondant à cette éxpérience.
   (d) Quel pourcentage des fréquences obtenues par la classe appartient à cet intervalle ?
   (e) La fréquence des filles de la Seconde 14 appartient-elle à cet intervalle ?
8. Et si notre supposition était fausse ?
   À l'administration du lycée, on peut obtenir l'information suivante : « Au Lycée Dupuy de Lôme, pour l'année scolaire 2010–2011, il y a en Seconde 524 élèves, dont 329 filles et 195 garçons ».
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation (toujours pour un échantillon de taille 37).
   (b) La fréquence des filles de la Seconde 14 appartient-elle à cet intervalle ? Qu'en conclure ?

9.2 Bilan et compléments

Lorsqu'on étudie un caractère d'une population, la connaissance de la population entière n'est en général pas envisageable (pour des raisons de temps, d'organisation ou de coût). On doit se contenter de la connaissance d'un échantillon de la population. Pour prendre des décisions fondées sur des théories mathématiques, il est indispensable que l'échantillon soit prélevé au hasard.

Définition 9.1. On appelle *échantillon de taille n* une liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même *expérience aléatoire*.

Définition 9.2. Pour une population donnée, des échantillons aléatoires produits selon le même protocole peuvent avoir des compositions différentes. On dit qu'il y a *fluctuation d'échantillonage*.

Propriété 9.1. *Dans une population, la proportion d'un caractère est p. On produit un échantillon de taille n de cette population et on détermine la fréquence f du caractère dans cet échantillon.*
Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, que l'on appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.
On lance deux dés et on note **le plus grand des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 50 lancers en expliquant votre façon de procéder.

5	4	4	6	2	4	3	4	1	6	1	1	1	5	4	2	5	5	2	3
3	4	4	4	6	2	6	4	4	6	2	2	3	1	6	4	6	6	5	1
4	5	5	6	4	1	2	5	4	2	2	6	4	2	2	6	1	3	1	4
4	4	6	6	4	1	3	1	2	1	4	5	6	4	2	4	5	2	1	5
4	3	3	3	1	3	5	5	6	6	1	5	5	4	4	3	1	6	1	3

3. Donner la suite des 50 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	25	79	141	203	234	318

Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

EXERCICE 9.2.
Une urne contient 10 boules : **cinq** rouges, **trois** noires et **deux** blanches. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 tirages en expliquant votre méthode.

3	0	4	1	4	1	2	9	8	6	7	3	6	8	3	1	8	4	8	6
6	3	9	4	3	1	1	5	9	1	1	7	0	2	3	0	7	3	1	2
2	3	5	5	1	1	1	3	3	4	8	6	9	8	6	9	1	7	7	8
8	4	4	1	9	2	8	2	2	8	6	4	7	5	7	4	2	1	1	2
9	0	3	0	5	7	3	7	8	5	3	4	2	5	7	0	4	9	5	9

2. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 25.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 9.3.
On lance deux dés et on note **la somme des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 25 lancers en expliquant votre façon de procéder.

6	2	2	2	1	2	1	3	6	2	3	2	3	3	5	5	3	3	1	2
5	3	2	5	5	4	2	4	5	3	6	2	4	2	3	3	4	1	6	2
2	6	5	6	6	2	6	6	1	2	5	1	6	2	1	4	1	2	5	3
1	1	2	5	2	3	6	4	5	5	1	3	3	4	1	6	1	1	2	5
1	5	6	4	1	2	2	6	3	4	1	4	5	3	6	1	3	3	2	2

3. Donner la suite des 25 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Norbert a procédé lui aussi à une simulation de 25 lancers, avec une autre table de nombres aléatoires, et il a obtenu les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	1	1	2	2	1	4	4	4	3	2	1

Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

6. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	24	49	86	103	145	178	139	114	77	55	30

Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

EXERCICE 9.4.
D'après le site de l'IREM de Paris 13.
L'ensemble des faits évoqués ci-dessous est réel.
En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, RODRIGO PARTIDA était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1 % de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant à la proportion d'origine mexicaine pour un échantillon de taille 870.
2. La fréquence des personnes d'origine mexicaine dans les personnes convoquées est-elle dans cet intervalle ?
3. Qu'en conclure ?

EXERCICE 9.5.
À Dupuy de Lôme, pour la session 2009 du baccaulauréat général, il y a eu 290 reçus pour 320 candidats se présentant à l'épreuve. Les fréquences des reçus en Série L, ES et S étaient, respectivement, 0,766, 0,896 et 0,963.
Déterminer si les différences de réussite entre les filières peuvent être dues aux fluctuations d'échantillonage.

EXERCICE 9.6.
Dans le village chinois de Xicun en 2000, il est né 20 enfants dont 16 garçons. On suppose que la proportion de garçons et de filles est la même à la naissance dans toute l'espèce humaine.
Déterminer si la fréquence des naissances de garçons dans le village de Xicun en 2009 peut être due aux fluctuations d'échantillonage.

EXERCICE 9.7.
Avez-vous vérifié que toutes les conditions étaient remplies pour appliquer les intervalles de fluctuation dans les deux exercices précédents ?

EXERCICE 9.8.
Au premier tour de l'élection présidentielle française de mai 2007, parmi les suffrages exprimés, les proportions, en pourcentage, pour les candidats ayant obtenu pour de 2 % des suffrages, étaient les suivantes :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
18,57	4,08	2,23	10,44	25,87	31,18

Cinq mois plus tôt, le 13 décembre 2006, l'institut de sondage BVA faisait paraître un sondage effectué sur un échantillon de 797 personnes dont voici les résultats, en pourcentage, concernant les candidats précédemment cités :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
7	4	2	10	34	32

1. Pour quels candidats peut-on appliquer les intervalles de fluctuation parmi ceux présents au premier tour ?
2. Pour ces candidats déterminer les intervalles de fluctuation pour un échantillon de taille 797.
3. Les résultats du sondage donnent-ils des fréquences appartenant à ces intervalles ?
4. Qu'en conclure ?

EXERCICE 9.9.
On considère que la proportion de femmes dans la population française est $\frac{1}{2}$. À l'assemblée nationale, il y a 577 députés, dont 108 femmes.
Peut-on considérer que cette répartition est un effet de la fluctuation d'échantillonage ou bien dire que la parité des sexes n'est pas respectée à l'assemblée nationale ?

EXERCICE 9.10.
En 1990, les employés et ouvriers constituaient 58,7 % de la population française (d'après le recensement de l'INSEE).
Suite à l'élection législative de 1993 on recensait 1,6 % de députés dont l'ancien métier était employé ou ouvrier.
Peut-on considérer que cette répartition est un effet de la fluctuation d'échantillonage ?

EXERCICE 9.11.
Dans une région où il y a autant de femmes que d'hommes, les entreprises sont tenues de respecter la parité.
L'entreprise A a un effectif de 100 personnes dont 43 femmes. L'entreprise B a un effectif de 2 500 personnes dont 1 150 femmes.

1. Calculer le pourcentage de femmes dans ces deux entreprises. Qu'en conclure ?
2. Si respecter la parité revient à ne pas tenir compte du caractère homme-femme, on peut alors considérer l'ensemble des salariés d'une entreprise comme un échantillon prélevé au hasard dans la population de la région.
   (a) Déterminer les intervalles de fluctuation relatifs aux deux échantillons.
   (b) Les résultats confirment-ils la conclusion de la première question ?

EXERCICE 9.12.
Les résultats seront donnés au centième.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

1. On s'intéresse d'abord à la proportion de garçons et de filles dans l'établissement.
   (a) Déterminer les proportions de garçons et de filles dans le lycée cette année là.
   Peut-on utiliser les intervalles de fluctuations dans le cas des filles et des garçons ?
   (b) Déterminer les intervalles de fluctuations pour des échantillons de tailles respectives 119, 168 et 63.
   (c) Calculer les fréquences de garçons et de filles dans chacune des trois filières.
   (d) Dans quelles filières peut-on dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des filles et des garçons peut être due aux fluctuations d'échantillonage ?
2. En vous inspirant de la question précédente, déterminer pour chaque sexe si l'on peut dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des ES, S et L peut être due aux fluctuations d'échantillonage.

2^{nde} 06 – Devoir surveillé n°8

Fluctuations

EXERCICE 8.1 (4 points)**.**
On arrondira tous les résultats au centième.
Une urne contient 6 boules : **deux** rouges, **quatre** noires. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, décrire précisément comment simuler 50 tirages puis donner la liste des résultats de vos 50 simulations.

7	6	9	2	0	6	0	3	7	5	1	7	1	2	6	0	9	9	0	1
0	8	4	0	2	9	0	9	5	6	4	2	5	5	9	6	2	8	9	6
8	9	6	7	0	0	8	9	5	8	6	1	7	3	6	8	4	8	3	6
1	7	5	0	2	8	8	0	4	7	9	7	7	1	0	0	2	5	4	0
6	3	2	0	9	0	8	8	2	1	2	4	3	0	6	1	4	8	0	0

2. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 50.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 8.2 (6 points)**.**
On arrondira tous les résultats au centième.
Au Lycée Dupuy de Lôme, la distribution des élèves entre externes, demi-pensionnaires et internes est la suivante :

Externes	Demi-pensionnaires	Internes
404	1376	230

1. (a) Quelles sont les proportions d'externes, de demi-pensionnaires et d'internes ?
   Sur quelle catégorie ne peut-on pas appliquer les intervalles de fluctuations ? *Expliquer pourquoi.*
   (b) Déterminer les intervalles de fluctuation pour les externes et les demi-pensionnaires, qu'on appellera I_E et I_D, pour un échantillon de taille 562.
   (c) Déterminer les intervalles de fluctuation pour les externes et les demi-pensionnaires, qu'on appellera I'_E et I'_D pour un échantillon de taille 36.
2. Dans ce Lycée, il y a 562 élèves en Seconde et leur distribution est la suivante :

Externes	Demi-pensionnaires	Internes
81	436	45

   (a) Déterminer les fréquences des externes et des demi-pensionnaires.
   (b) Les élèves de Seconde sont-ils représentatifs des élèves du Lycée ?
   On justifiera à l'aide des résultats des questions 1 et 2a.
3. Dans ce Lycée, il y a 36 élèves en Seconde 06 et leur distribution est la suivante :

Externes	Demi-pensionnaires	Internes
4	26	6

   (a) Déterminer les fréquences des externes et des demi-pensionnaires.
   (b) La distribution des élèves de la Seconde 06 peut-elle être due au hasard ?
   On justifiera à l'aide des résultats des questions 1 et 3a.

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°8

Fluctuations

EXERCICE 8.1 (5 points).
Une urne contient 8 boules : **cinq** rouges, **trois** noires. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, décrire précisément comment simuler 50 tirages puis donner la liste des résultats de vos 50 simulations.

1	3	3	8	6	8	8	4	7	0	2	3	5	0	7	7	1	9	5	2
6	7	4	5	4	0	5	9	9	5	5	8	8	3	0	7	5	5	3	1
0	4	8	7	9	1	1	2	5	7	4	2	9	6	9	1	1	0	0	5
5	0	2	0	2	0	0	0	3	2	5	4	3	2	6	2	7	7	8	3
5	6	2	5	7	3	3	3	4	8	5	9	1	1	5	2	5	6	9	5

2. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 50.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 8.2 (5 points).
Dans une célèbre école du nom de POUDLARD, les élèves sont répartis dans quatre « maisons » nommées : *Gryffondor*, *Poufsouffle*, *Serdaigle* et *Serpentard*.

Partie I
La répartition des 2 500 élèves est actuellement la suivante :

Gryffondor	Poufsouffle	Serdaigle	Serpentard
675	624	626	575

Drago, l'un des représentants de la maison Serpentard, veut se plaindre au directeur de cette école car, selon lui, le choix du nombre d'élèves par maison n'a pu se faire de façon aléatoire et il se sent lésé.

1. Quelle est la proportion (théorique) d'élèves dans chaque maison si le choix est aléatoire ?
2. Quel est l'intervalle de fluctuation correspondant à un échantillon de taille 2 500 pour cette proportion ?
3. (a) Déterminer les fréquences des élèves dans chacune des maisons.
   (b) Appartiennent-elles toutes à l'intervalle de fluctuation ?
4. Drago a-t-il raison de se plaindre ?

Partie II
Les diplômés d'élite de cette école sont appelés des *Aurors*. Les 25 derniers Aurors provenaient des maisons selon la distribution suivante :

Gryffondor	Poufsouffle	Serdaigle	Serpentard
12	4	6	3

Cette distribution peut-elle être due aux fluctuations d'échantillonage (on justifiera rigoureusement) ?

Chapitre 10

Fonction carrée
Fonctions trinômes

Sommaire

10.1 Activité **107**
10.2 Fonction carrée **108**
10.3 Fonctions trinômes **109**
10.4 Exercices **109**
10.4.1 Fonction carrée 109
10.4.2 Fonctions trinômes 110
10.4.3 Problèmes 111

10.1 Activité

ACTIVITÉ 10.1 (Fonction trinôme)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés a, b et c pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,1 pour a et de 1 pour b et c puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

1. Donner à a la valeur 0. Qu'observe-t-on ?
   Pour toute la suite on prendra $a \neq 0$.
2. Donner à a la valeur 1 et à b et c la valeur 0.
   (a) De quelle nature est la courbe obtenue ?
   (b) Indiquer l'abscisse de son sommet et ses éléments de symétrie.
   (c) Donner l'expression de $f(x)$.
   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau des variations de f.
3. Donner à b et c la valeur 0 et faire varier a.
   (a) Quel semble être le « rôle » de a ?
   (b) Dans quel cas le tableau de variations de f est-il identique au précédent et dans quel cas est-il différent ?
4. Donner à a la valeur 1, à b la valeur 0 et faire varier c.
   (a) Quel semble être le « rôle » de c ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?
   (c) Démontrer par le calcul que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont les coordonnées ne dépendent que de c.
5. On notera x_0 l'abscisse du sommet de la courbe.
   (a) Donner à a la valeur 1, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (b) Donner à a la valeur 2, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(c) Donner à a la valeur $-0,5$, à c la valeur 0 et faire varier b.
Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(d) Faire varier c. Cela influence-t-il x_0 ?

(e) Conjecturer l'expression de x_0 en fonction de a et b.
Que peut-on dire des éléments de symétrie de la courbe dans tous les cas ?

6. Régler le curseur b pour que son incrément soit maintenant de 0,1.
On admettra qu'un projectile lancé en l'air suit une trajectoire parfaitement parabolique.
Un projectile est lancé depuis une colline depuis une altitude de 400 m symbolisée par le point $A(0;4)$. Il doit atteindre une cible située à 1 000 m à l'altitude 0, symbolisée par le point $B(10;0)$. Pour des raisons de sécurité, son altitude maximum ne doit pas dépasser 800 m.
Déterminer des valeurs de a, b et c permettant d'obtenir une courbe symbolisant la trajectoire de ce projectile et satisfaisant toutes ces conditions.

ACTIVITÉ 10.2 (Forme canonique)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés α, β et γ pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,5 puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = \alpha * (x-\beta)^2 + \gamma$.

1. (a) Dans la zone de saisie, créer la fonction $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
   (b) Déterminer les valeurs de α, β et γ telles que la courbe de f et celle de g soient confondues.
   (c) Vérifier par le calcul que les deux fonctions sont bien égales.
   (d) Noter l'abscisse du sommet de la courbe.
   (e) Par le calcul, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   Comment cela se traduit-il graphiquement ?
2. Mêmes questions avec $g(x) = -1,5x^2 - 6x - 4,5$.
3. Mêmes questions avec $g(x) = -0,5x^2 - 2x - 1,5$.
4. (a) Conjecturer quelles doivent être les valeurs de α et de β.
   (b) **Par le calcul**, en utilisant la conjecture précédente, déterminer les valeurs de α, β et γ pour que la fonction f soit égale à la fonction $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
   (c) Déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
   Vérifier si vos résultats coïncident avec la courbe de la fonction sur Geogebra.

10.2 Fonction carrée

Définition 10.1. On appelle *fonction carrée* la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est une *parabole* qui possède l'origine du repère comme *sommet* et l'axe des ordonnées comme *axe de symétrie*.

Propriété 10.1. *La fonction carrée est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty; 0]$ *et strictement croissante pour* $x \in [0; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Preuve. La preuve sera faite en classe. ◇

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 10.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $a^2 > b^2$.

10.3 Fonctions trinômes

Définition 10.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction trinôme.*

Sa courbe est une parabole admettant le point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ comme sommet et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce sommet comme axe de symétrie.

Propriété 10.3. *Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\beta)^2+\gamma$ où $\beta = -\frac{b}{2a}$. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On l'admettra.

Propriété 10.4. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Preuve. La preuve sera faite en classe. $\diamondsuit$

10.4 Exercices

10.4.1 Fonction carrée

EXERCICE 10.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors x^2 ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors x^2 ....
3. Si $x > 2$ alors x^2 ....
4. Si $x < -3$ alors x^2 ....
5. Si $x < 4$ alors x^2 ....
6. Si $x > -10$ alors x^2 ....
7. Si $x < 1$ alors x^2 ....
8. Si $x > -5$ alors x^2 ....

EXERCICE 10.2.

1. On pose : $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$.
   Compléter :
   (a) Si $-7 \leqslant x \leqslant 0$ alors ....x^2 ....
   (b) Si $0 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors ....x^2 ....
   (c) Donc si $-7 \leqslant x \leqslant 5\sqrt{2}$ alors ......$\leqslant x^2 \leqslant$ ......
2. Compléter de la même manière :
   (a) Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (b) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....
   (c) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2 \leqslant$ ....

EXERCICE 10.3.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

EXERCICE 10.4.
L'énoncé « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est appelé **une implication**. On dit aussi « $x \geqslant 2$ implique $x^2 \geqslant 4$ » ou bien « $x \geqslant 2$ donc $x^2 \geqslant 4$ ». On note « $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$ ».

1. L'implication proposée est-elle vraie ? Justifier.
2. Parmi les implications suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
   (a) $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$
   (b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
   (c) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$
   (d) $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$
   (e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

3. Traduisez par une implication les propositions suivantes :
   (a) Un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à son carré.
   (b) Si le nombre x est tel que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $1 - x^2$ est positif.
   (c) Un nombre supérieur à 1 a un carré supérieur à 1.

EXERCICE 10.5.
Les nombres a et b sont positifs.
L'énoncé « $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$ » signifie que $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ et que $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$. On dit aussi « $a < b$ si et seulement si $a^2 < b^2$.
On note $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
Parmi les équivalences suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
2. Pour tous réels négatifs a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
3. Pour tous réels a et b, $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
4. $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

10.4.2 Fonctions trinômes

EXERCICE 10.6.
On donne :
- $f(x) = 5 - (x+1)^2$;
- $g(x) = (x-1)(2+3x)$;
- $h(x) = (x-1)(2x+1) - (x+1)$.

1. Montrer que les 3 fonctions sont des fonctions trinômes.
2. Dresser leurs tableaux de variation.
3. Indiquer les éléments de symétrie de leurs courbes représentatives.

EXERCICE 10.7.
On donne $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Dresser son tableau de variation en y faisant apparaître les solutions précédentes.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 10.8.
On donne $f(x) = x^2 + 2x - 15$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)(x+5)$.
2. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 - 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 9$.

EXERCICE 10.9.
On donne $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x - 6$ pour tout x.

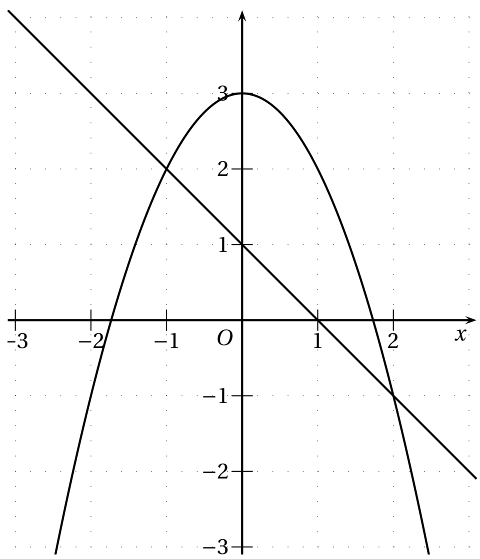
1. Montrer que $f(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
2. Montrer que $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 4$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 10.10.
On donne $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant \frac{11}{8}$.

EXERCICE 10.11.
Sur le graphique ci-dessous sont tracées une droite $\mathscr{D}$ et une parabole $\mathscr{P}$. Cette dernière représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$.

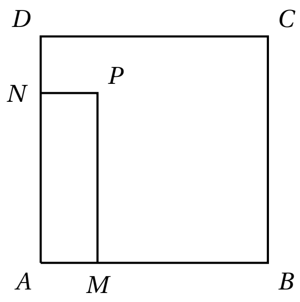
1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire, graphiquement, le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. (a) Déterminer la fonction affine g représentée par $\mathscr{D}$.
   (b) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. On désire retrouver par le calcul le résultat précédent.
   (a) Prouver que $f(x) > g(x)$ équivaut à $-x^2 + x + 2 > 0$.
   (b) Vérifier que $(x+1)(2-x) = -x^2 + x + 2$.
   (c) Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.



10.4.3 Problèmes

PROBLÈME 10.1.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$. P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.
On cherche à trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.
On note $AM = x$ et on appelle $f(x)$ la fonction qui donne l'aire du rectangle $AMPN$ en fonction de x.

1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. En déduire la réponse au problème.



PROBLÈME 10.2 (La méthode d'AL-KHAWARIZMI)**.**
Pour déterminer une solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 96$, voici comment procédait AL-KHAWARIZMI (mathématicien arabe du IXè[1]) :

Diviser 10 par 2. Élever ce quotient au carré. Additionner ce carré à 96. Prendre la racine carrée de cette somme. Retrancher à ce résultat le quotient du début.

1. (a) Prouver que l'équation $x^2 + 10x = 96$ équivaut à $(x+5)^2 = 121$.
   (b) En déduire que cet algorithme donne bien une solution positive de cette équation.
2. Trouver en utilisant la même méthode une solution positive de l'équation $x^2 + 8x = 2009$.
3. En admettant que ce procédé donne la seule solution positive pour des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont deux nombres positifs, écrire un algorithme qui mette en œuvre cette méthode.

PROBLÈME 10.3.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm.
I est le milieu du segment $[BC]$ et M un point variable du segment $[AB]$.
On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N de $[BC]$ et P de $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.
Le but du problème est de comparer les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle ABI.

1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Faire afficher la longueur AM, puis les aires du rectangle et du triangle.
2. Déplacer M.
   Quelle semble être l'aire la plus grande ? Pour quelle position de M les deux aires semblent-elles égales ?
3. Prouver la conjecture précédente.

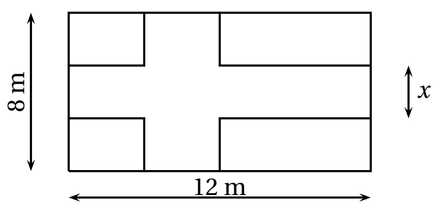
[1] Il est à l'origine du mot « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé : "algoritmi")

PROBLÈME 10.4.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Dans un repère orthonormal, on donne le point $A(0;1)$ et un point $M(m;0)$, libre sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe l'axe (Oy) en N.
P est le point tel que $OMPN$ est un rectangle.
Le but de l'exercice est de chercher sur quelle ligne se trouve P lorsque M décrit l'axe des abscisses.

1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Activer le mode trace pour le point P (propriétés) et déplacer le point M.
   (c) Conjecturer la nature de la coubre décrite par P.
2. (a) Prouver que $\widehat{OMA} = \widehat{ONM}$.
   (b) Calculer $\tan \widehat{OMA}$ et $\tan \widehat{ONM}$ et en déduire que $ON = m^2$.
   (c) Donner les expressions, en fonction de m, des coordonnées de P et en déduire que P est un point de la parabole qu'équation $y = x^2$.

PROBLÈME 10.5.
Un jardinier dispose d'un terrain rectangulaire de 12 m sur 8 m. Il désire le partager en quatre parcelles bordées par deux allées perpendiculaires de même largeur x. Il estime que l'aire des deux allées doit représenter $\frac{1}{6}$ de la superficie de son terrain.
Le but de ce problème est de déterminer la largeur x des allées.

1. Exprimer en fonction de x l'aire des deux allées.
2. (a) Prouver que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 20x + 16 = 0$.
   (b) Vérifier que $x^2 - 20x + 16 = (x-10)^2 - 84$.
   (c) En déduire x.



PROBLÈME 10.6.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) Déterminer l'expression de $B(q)$.
   (b) Montrer que $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
3. Déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable.
4. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

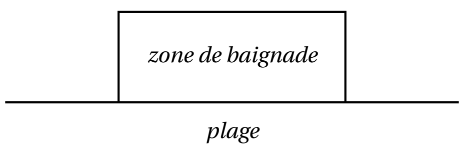
PROBLÈME 10.7.
Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.
Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Commenter.
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimer en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifier que $r(x) = -x^2 + 40x + 2100$.
   (c) En déduire la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

PROBLÈME 10.8.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10 000 abonnés qui paient, chacun, 50 € par an. Une étude a montré que chaque fois qu'on augmente d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une diminution de 100 abonnés et chaque fois qu'on baisse d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une augmentation de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonnement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

PROBLÈME 10.9.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Chapitre 11

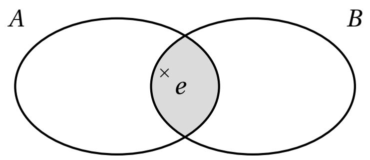
Probabilités

Sommaire

11.1 Vocabulaire des ensembles **113**
11.2 Expériences aléatoires **114**
11.2.1 Issues, univers 114
11.2.2 Événements 114
11.3 Loi de probabilité sur un univers Ω **114**
11.3.1 Cas général 114
11.3.2 Cas particulier : l'équiprobabilité 116
11.4 Exercices **116**

11.1 Vocabulaire des ensembles

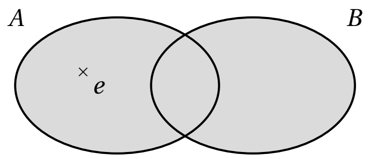
Définition 11.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

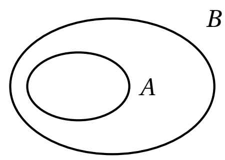
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 11.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 11.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

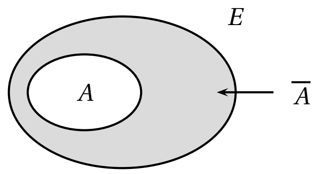
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

Définition 11.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 11.5 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de* E. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple. Si $E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

11.2 Expériences aléatoires

11.2.1 Issues, univers

Définition 11.6. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples. • On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P\,;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P\,;F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i\,;j)$ où $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :
- $\Omega_P = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;9\,;10\,;12\,;15\,;16\,;18\,;20\,;24\,;25\,;30\,;36\}$;
- $\Omega_S = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$.

11.2.2 Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots\,;11\,;12\}$.
Le tableau 11.1 page ci-contre définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

11.3 Loi de probabilité sur un univers Ω

11.3.1 Cas général

Définition 11.7. Soit $\Omega = \{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots\,;\omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0\,;1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Décrire la loi de probabilité revient à indiquer, pour chaque événement élémentaire, sa probabilité. On la présente généralement sous forme de tableau.

TABLE 11.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (partie de Ω ne contenant qu'un seul élément)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues (partie de Ω)	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire (partie vide de Ω)	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement (partie de Ω égale à Ω)	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements (intersection de deux parties de Ω)	$A \cap B = \{6; 12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements (réunion de deux parties de Ω)	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun (parties disjointes de Ω, c'est-à-dire dont l'intersection est vide)	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (parties de Ω disjointes dont la réunion est égale à Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

Exemple. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 11.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'événement certain est 1 alors la probabilité de l'événement impossible, qui est son contraire, est 0.

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

11.3.2 Cas particulier : l'équiprobabilité

Définition 11.8. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 11.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*

- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

11.4 Exercices

EXERCICE 11.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cup C$;
   - $C \cup B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cap C$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A} \cup C$;

EXERCICE 11.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?

   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?

   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.

   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

EXERCICE 11.3.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

EXERCICE 11.4.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?

EXERCICE 11.5.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 11.6.
On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)
On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure [2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités suivantes :
   - $p(V)$;
   - $p(F)$;
   - $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement $\overline{F}$ et calculer (simplement !) sa probabilité $p(\overline{F})$.

EXERCICE 11.7.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

EXERCICE 11.8.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

2. Les figures sont les valets, les dames et les rois

EXERCICE 11.9.
Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.

1. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.
   Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.
2. Même question si on tire les jetons sans remise.

EXERCICE 11.10.
Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

- Un billet ?
- Deux billets ?

EXERCICE 11.11.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous les élèves, indiquant leur filière et leur sexe, sont rangées dans un armoire et on prend au hasard dans cette armoire une fiche.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : La fiche est celle d'une fille ;
   - B : La fiche est celle d'un élève en 1S ;
   - C : La fiche est celle d'un garçon et d'un élève en 1L ;
   - D : La fiche est celle d'une fille ou d'un élève en 1ES.
2. Décrire avec une phrase les évènements suivant puis donner leur probabilité :
   - $\overline{A}$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$.

2$^{\text{nde}}$ 06 – Devoir surveillé n°9

Trinômes

EXERCICE 9.1 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Si $x > 5$ alors

   ❒ $x^2 > 25$ ❒ $x^2 < 25$ ❒ on ne peut pas comparer x^2 et 25

2. Si $x < 4$ alors

   ❒ $x^2 > 16$ ❒ $x^2 < 16$ ❒ on ne peut pas comparer x^2 et 16

3. Si $x > -3$ alors

   ❒ $x^2 > 9$ ❒ $x^2 < 9$ ❒ on ne peut pas comparer x^2 et 9

4. Si $x < -2$ alors

   ❒ $x^2 > 4$ ❒ $x^2 < 4$ ❒ on ne peut pas comparer x^2 et 4

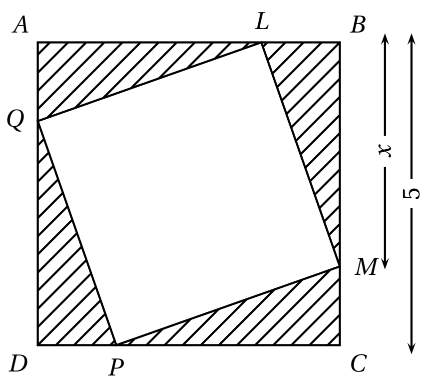
EXERCICE 9.2 (6 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 48$.

1. Montrer que $f(x) = (x-1)^2 - 49$ pour tout x.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation : $f(x) > 0$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}'$ des solutions de l'équation : $f(x) = 32$.

EXERCICE 9.3 (10 points)**.**
Soit $ABCD$ un carré de côté de mesure 5 cm et M un point de $[BC]$. On note :

- $x = BM$
- P, Q, L les points des segments respectifs $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$ tels que $CP = DQ = AL = BM = x$.

On admettra que les triangles hachurés ont la même aire.



1. Quel est l'ensemble I des valeurs possibles de x ?
   Par la suite, x désigne un réel appartenant à I.
2. Exprimer AQ en fonction de x.
3. Exprimer l'aire du triangle ALQ en fonction de x.
4. En déduire que l'aire $f(x)$ du quadrilatère $LMPQ$ peut s'écrire $f(x) = 2x^2 - 10x + 25$.
5. Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire
$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$
6. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant \frac{25}{2}$
   (b) Déterminer $f\left(\frac{5}{2}\right)$.
   (c) Que peut-on en déduire pour f ?

2$^{\text{nde}}$ 11 – Devoir surveillé n°9

Trinômes – Probabilités – Algorithmique

EXERCICE 9.1 (4 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Dans un groupe de personnes, 40 % pratiquent un sport, 30 % jouent d'un instrument de musique et 20 % font les deux. On choisit une personne de ce groupe au hasard. La probabilité qu'elle pratique un sport ou joue d'un instrument de musique est :

   ❒ $0,5$ ❒ $0,7$ ❒ $0,9$

2. On dispose d'un jeu de 52 cartes. On choisit une carte au hasard. On appelle A l'évènement : « La carte est un as » et P l'évènement : « La carte est un pique ». La probabilité de l'évènement $A \cup P$ est :

   ❒ $\frac{18}{52}$ ❒ $\frac{17}{52}$ ❒ $\frac{16}{52}$

3. On suppose qu'à chaque naissance il y a la même probabilité d'avoir un gars que d'avoir une fille. Un couple projete d'avoir deux enfants.
   (a) La probabilité que ce couple ait 2 filles est :

   ❒ $\frac{1}{2}$ ❒ $\frac{1}{3}$ ❒ $\frac{1}{4}$

   (b) La probabilité que ce couple ait au moins une fille est :

   ❒ $\frac{1}{2}$ ❒ $\frac{2}{3}$ ❒ $\frac{3}{4}$

EXERCICE 9.2 (4 points).
Compléter (sur l'énoncé) l'algorithme suivant, écrit en langage algobox, sachant qu'il prend comme argument un entier n et renvoit le nombre de diviseurs de n :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  nombre_de_diviseurs EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Entrer un entier"
  LIRE n
  nombre_de_diviseurs PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE ... A ...
   DEBUT_POUR
   ................................................
   ................................................
   ................................................
   ................................................
   ................................................
   FIN_POUR
  AFFICHER n
  AFFICHER " admet "
  AFFICHER nombre_de_diviseurs
  AFFICHER " diviseur(s)"
FIN_ALGORITHME
```

On rappelle qu'en langage algobox le reste de la division de x par y s'écrit $x \% y$.

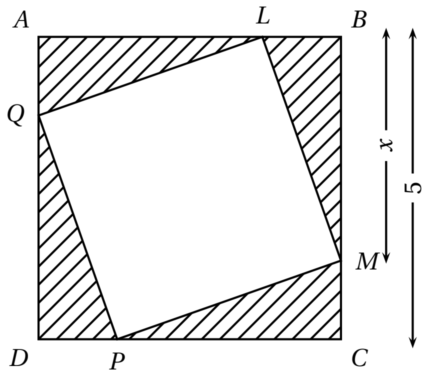
EXERCICE 9.3 (5 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

1. Montrer que $f(x) = 9 - (x-2)^2$ pour tout x.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation : $f(x) > 0$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}'$ des solutions de l'équation : $f(x) = -7$.

EXERCICE 9.4 (7 points)**.**
Soit $ABCD$ un carré de côté de mesure 5 cm et M un point de $[BC]$. On note :

- $x = BM$
- P, Q, L les points des segments respectifs $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$ tels que $CP = DQ = AL = BM = x$.

On admettra que les triangles hachurés ont la même aire.



1. Quel est l'ensemble I des valeurs possibles de x ?
   Par la suite, x désigne un réel appartenant à I.
2. Exprimer AQ en fonction de x.
3. Exprimer l'aire du triangle ALQ en fonction de x.
4. En déduire que l'aire $f(x)$ du quadrilatère $LMPQ$ peut s'écrire $f(x) = 2x^2 - 10x + 25$.
5. Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire
$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2}$$
6. (a) Compléter (sur l'énoncé) :
$$\begin{array}{cccccc}
 & x_1 & < & x_2 & < & \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow & x_1 - \frac{5}{2} & \dots & x_2 - \frac{5}{2} & \dots & 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 & \dots & \left(x_2 - \frac{5}{2}\right)^2 & \dots & \dots \\
\Leftrightarrow & 2\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 & \dots & 2\left(x_2 - \frac{5}{2}\right)^2 & \dots & \dots \\
\Leftrightarrow & 2\left(x_1 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} & \dots & 2\left(x_2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} & \dots & \dots \\
\Leftrightarrow & f(x_1) & \dots & f(x_2) & &
\end{array}$$
   Donc la fonction f est .... sur l'intervalle ....

   (b) On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2}\,;5\right]$.
   En déduire le tableau des variations de f.
   En déduire que l'aire de $LMPQ$ admet un minimum et préciser la position de M pour laquelle ce minimum est atteint.

Chapitre 12

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Sommaire

12.1 Enroulement de la droite des réels 123
12.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian 123
12.3 Cosinus et sinus d'un réel x 124

12.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 12.1 (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique)**.** On se place dans le plan.

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

ACTIVITÉ **12.1.**

Soit un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x=1$ qui coupe l'axe (Ox) en I, représentés sur la figure 12.1 page suivante.
À tout nombre a, on associe le point M de la droite D, d'abscisse 1 et d'ordonnée a.
« L'enroulement » de la droite D autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$.
Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN}=IM=a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN}=IM=|a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a.

1. Placer les points M_a de la droite D dont les ordonnées a respectives sont : $0;\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};\pi;-\pi$.
2. Placer les points N_a du cercle associés à ces nombres a.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $B(-1;0)$ et $B'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J.

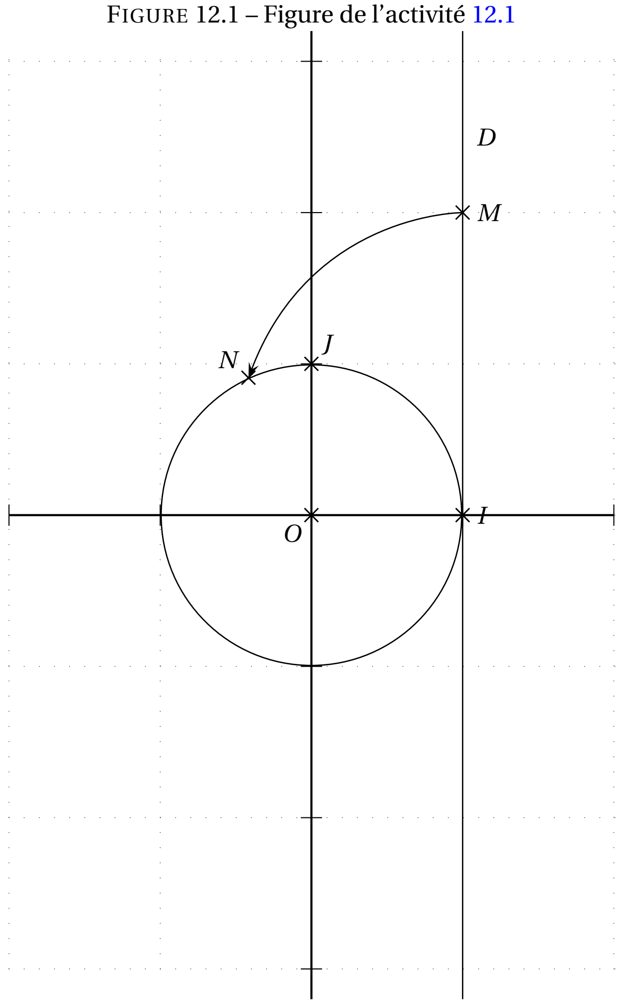
12.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 12.2. La mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Avec les notations de l'activité précédente, la mesure de l'angle $\widehat{ION}$ en radian est égale à la longueur $\overset{\frown}{IN}$, c'est-à-dire à a.

FIGURE 12.1 – Figure de l'activité 12.1



EXERCICE 12.1.
Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$ = mesure en radian de l'angle $\widehat{ION}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degré de l'angle $\widehat{ION}$							

EXERCICE 12.2.
La figure 12.3 page 127 propose plusieurs cercles trigonométriques.

- Sur un de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant : 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, 2π, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{7\pi}{4}$, -2π
- Sur un autre de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant : $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$

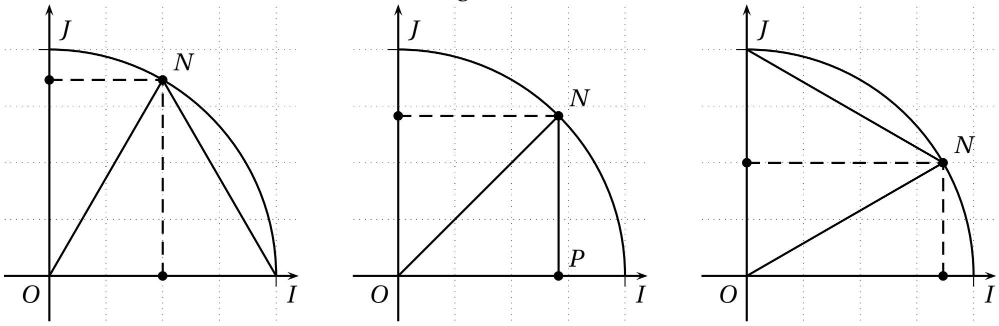
12.3 Cosinus et sinus d'un réel x

ACTIVITÉ 12.2.
En s'aidant des schémas de la figure 12.2 page suivante, compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Abscisse de N							
Ordonnée de N							

On pourra observer que les triangles OIN, ONP et ONJ ne sont pas quelconques lorsque N correspond, respectivement, aux nombres $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

FIGURE 12.2 – Figures de l'activité 12.2



Définition 12.3. Soit x un réel et $N(x_n\,;\,y_n)$ le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos x = x_n \quad \sin x = y_n \quad \text{et, quand } \cos x \neq 0, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

EXERCICE 12.3.
Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$						
$\cos x$						
$\tan x$						

Propriété 12.1. *Pour tout réel x on a :*

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x+2\pi) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x+2\pi) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXERCICE 12.4.
Par lecture graphique et sans justifier, en s'aidant des schémas obtenus dans l'exercice 12.2, compléter le tableau suivant :

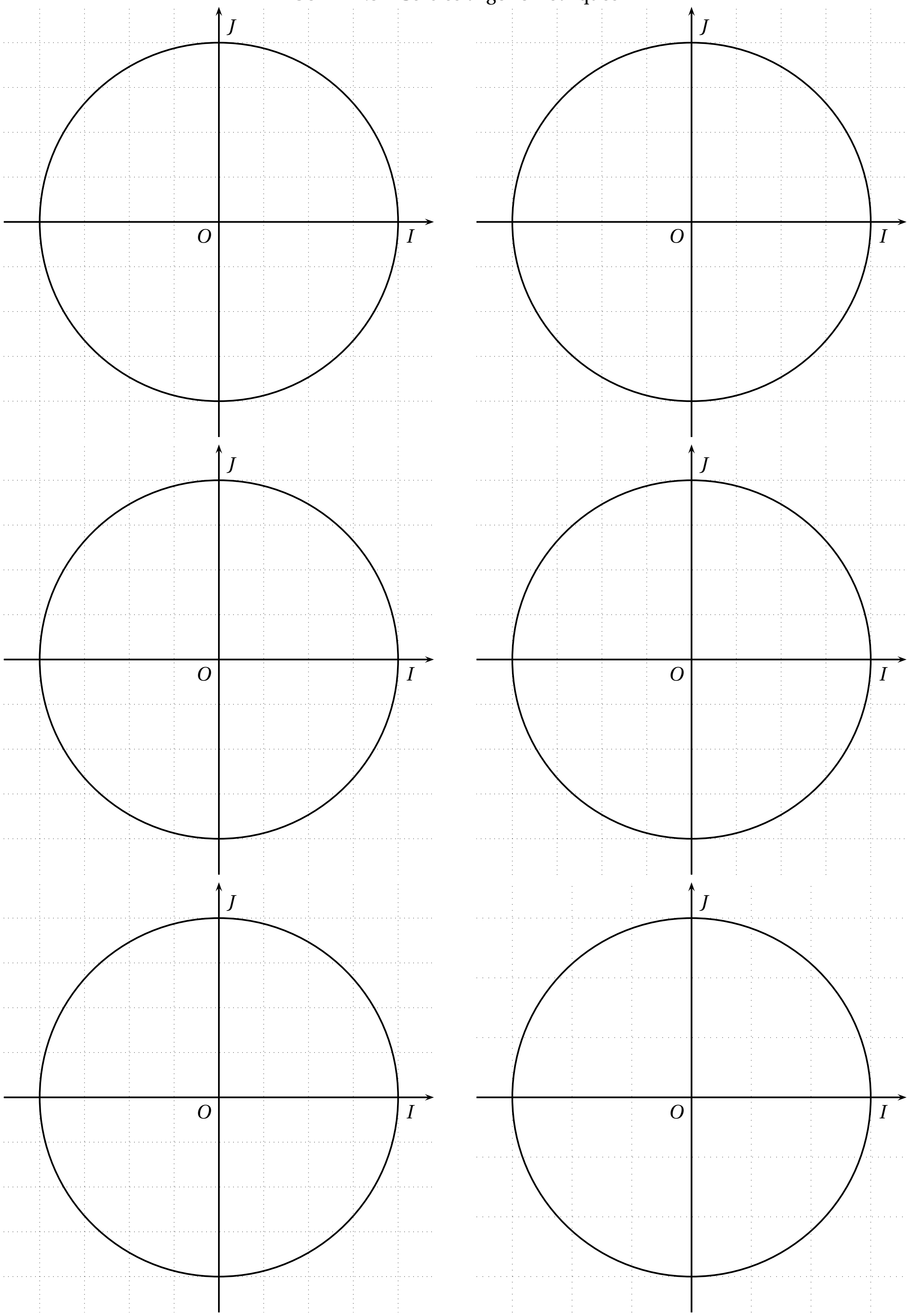
x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin x$												
$\cos x$												
$\tan x$												

EXERCICE 12.5. 1. Compléter le tableau suivant :

x	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$													
$\sin x$													
$\tan x$													

2. Tracer dans trois repères orthogonaux (ordonnées : 5 cm = une unité ; abscisses : 6 cm = π unités) les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.
3. Dresser le tableau des variations de ces fonctions pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$

FIGURE 12.3 – Cercles trigonométriques



Devoir surveillé n°10

Probabilités – Enroulement du cercle

EXERCICE 10.1 (6 points)**.**
On lance une pièce parfaitement équilibrée trois fois de suite et on note le nombre de *pile* obtenu.

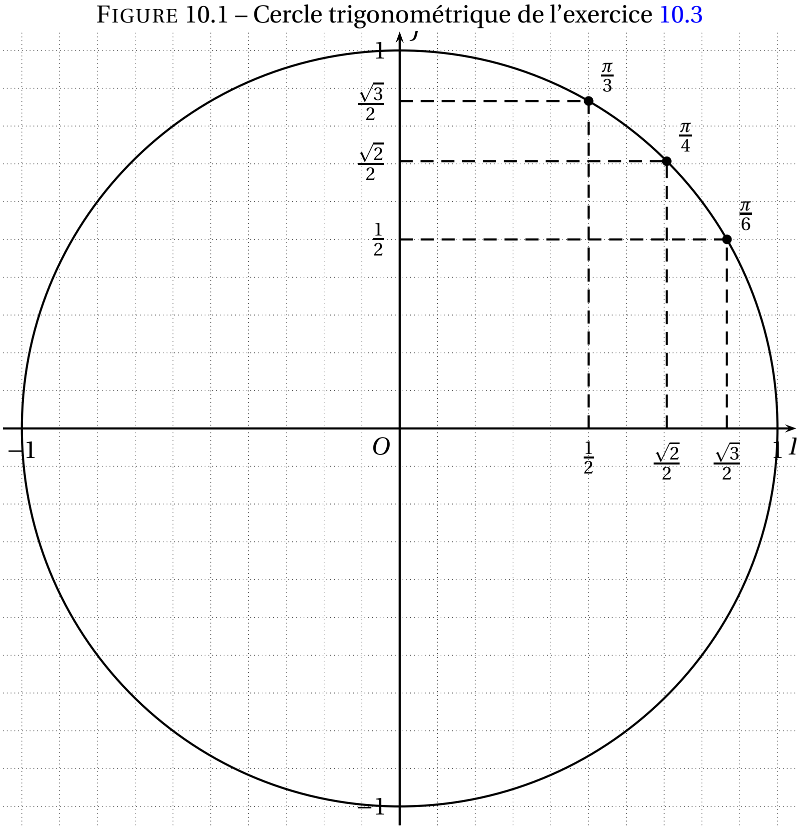
1. Décrire sous forme d'ensemble l'univers Ω de cette éxpérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : « Obtenir trois fois *pile* » ;
   - B : « Obtenir au plus un *pile* » ;
   - C : « Obtenir au moins un *pile* ».
3. Décrire sous forme de phrase l'évènement $\overline{C}$ puis calculer sa probabilité.

EXERCICE 10.2 (3 points)**.**
Dans cet exercice toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Une étude montre qu'un adolescent sur trois possède une télévision dans sa chambre et un sur cinq un ordinateur. 60 % des adolescents n'ont ni l'un ni l'autre dans leur chambre. On choisit un adolescent au hasard. Déterminer la probabilité qu'il ait à la fois un téléviseur et un ordinateur dans sa chambre.

EXERCICE 10.3 (6 points)**.**
Pour chacun des nombres x de la première ligne du tableau suivant, placer le point correspondant sur le cercle trigonométrique de la figure 10.1 de la présente page par enroulement de la droite réelle sur ce cercle et compléter le tableau avec les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	5π
$\cos x$						
$\sin x$						

FIGURE 10.1 – Cercle trigonométrique de l'exercice 10.3



Chapitre 13

Fonction inverse
Fonctions homographiques

Sommaire

13.1 Activités **129**
13.2 Fonction inverse **130**
13.3 Fonctions homographiques **131**
13.4 Exercices **131**
13.4.1 Technique 131
13.4.2 Études de variation de fonctions homographiques 132
13.4.3 Problèmes 133

13.1 Activités

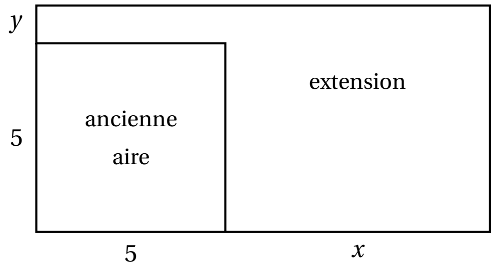
Activité 13.1 (Fonction inverse)**.**
Chaque année, un célèbre magazine automobile organise le concours du véhicule écologique le plus performant. Il s'agit de parcourir un kilomètre sur une piste aménagée, avec comme seul carburant de l'eau, du vent ou du soleil. On désigne par v la vitesse moyenne d'un véhicule (en kilomètres par heure) et par $f(v)$ le temps (en heures) nécessaire pour parcourir la piste.
On rappelle que la vitesse moyenne v est donnée par $\frac{d}{t}$ où d désigne la distance parcourue et t le temps mis pour parcourir cette distance.

1. (a) Donner l'expression de la fonction f en fonction de la vitesse v.
   (b) Compléter le tableau suivant :

v	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(v)$														

   (c) Le tableau précédent est-il un tableau de proportionnalité ?
2. (a) On se place dans un repère orthornormé où une unité représente 1 kilomètre par heure en abscisse et 1 heure en ordonnée. Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.
   (b) Reconnaît-on la représentation graphique d'une fonction affine ? D'une fonction trinôme ?
3. Cette année, deux véhicules se sont particulièrement distingués : le véhicule « Solaria 2200 » et le véhicule « WindBolide ».
   (a) Solaria 2200 a parcouru la piste à la vitesse de 9,5 kilomètre par heure. Donner un encadrement de son temps de parcours.
   (b) WindBolide, quant à lui, a eu besoin de 3 heures pour faire le parcours. Donner un encadrement de sa vitesse moyenne.

ACTIVITÉ 13.2 (Fonction homographique)**.**
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5; 15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5; 15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5\,\text{m}$ ou $x_2 = 10\,\text{m}$?

13.2 Fonction inverse

Définition 13.1. On appelle *fonction inverse* la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une *hyperbole*.

Propriété 13.1. *La fonction inverse est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty; 0[$ *et strictement décroissante pour* $x \in]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Preuve. Rappelons qu'une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) > f(b)$ (on dit qu'elle inverse l'ordre). Soient x et y deux réels non nuls.
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{y-x}{xy}$
- Si $x < y < 0$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- Si $0 < x < y$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

◊

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 13.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

13.3 Fonctions homographiques

Définition 13.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée *fonction homographique*.
Elle est définie pour tout x tel que $cx+d\neq 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty\,;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c}\,;+\infty\right[$

Sa courbe est une hyperbole.

Propriété 13.3. *Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme* $f(x)=\frac{\lambda}{x-\alpha}+\beta$.

On l'admettra.

Propriété 13.4. *Soit* $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ *une fonction homographique. Alors* f *a les variations résumées dans l'un des tableaux ci-dessous :*

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	↘	‖	↘

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	↗	‖	↗

On l'admettra.

13.4 Exercices

13.4.1 Technique

EXERCICE 13.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x>3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
2. Si $x<-\sqrt{2}$ alors ...... $\frac{1}{x}$ ......
3. Si $x>2$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
4. Si $x<-3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
5. Si $x<4$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
6. Si $x>-10$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
7. Si $x<1$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
8. Si $x>-5$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....

EXERCICE 13.2.
On considère les fonctions f et g définies pour tout x non nul par $f(x)=\frac{4}{x}$ et $g(x)=-\frac{2}{x}$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice ? Que peut-on conjecturer concernant les variations de f ?
   (b) Soient $0<a<b$.
   Que peut-on dire alors de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$?
   Que peut-on dire alors de $4\times\frac{1}{a}$ et de $4\times\frac{1}{b}$?
   En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (c) Faire de même en partant de $a<b<0$.
2. Mêmes questions avec la fonction g.

EXERCICE 13.3.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

1. Une fonction homographique est toujours définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une fonction homographique peut être définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et 3.
3. La fonction $f(x)=\frac{2-x}{10-x}$ est une fonction homographique.
4. La fonction $g(x)=\frac{2}{2-5x}+\frac{1}{4-10x}$ est une fonction homographique.
5. La fonction $h(x)=\frac{2}{2-5x}+\frac{1}{4-6x}$ est une fonction homographique.
6. La fonction $i(x)=\frac{x^2+1}{x+4}$ est une fonction homographique.

EXERCICE 13.4.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions homographiques suivantes et les valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent :

- $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+4}$
- $g : x \longmapsto \frac{x+5}{x+4}$
- $h : x \longmapsto \frac{2x+3}{3x+4}$
- $i : x \longmapsto \frac{x-1}{3x+1}$

EXERCICE 13.5.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{x-4} = 0$
2. $\frac{-x+4}{2x-1} = 0$
3. $\frac{-3x+4}{-2x-1} = 2$
4. $\frac{3x+4}{x+4} = 8$
5. $\frac{x-4}{x-1} = -2$
6. $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$
7. $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$
8. $\frac{3x}{4x+9} > 0$
9. $\frac{2x-10}{11x+2} \leqslant 0$

13.4.2 Études de variation de fonctions homographiques

EXERCICE 13.6.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -1$ on a $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$.
3. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc} \dots & < & a & < & b \\ \dots & \dots & a+1 & \dots & b+1 \\ & & \dfrac{1}{a+1} & \dots & \dfrac{1}{b+1} \\ & & \dfrac{3}{a+1} & \dots & \dfrac{3}{b+1} \\ & & 1+\dfrac{3}{a+1} & \dots & 1+\dfrac{3}{b+1} \\ & & f(a) & \dots & f(b) \end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-1[$.

EXERCICE 13.7.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$ on a $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$.
3. En utilisant une des deux expressions de f, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) < 0$
4. Soient a et b tels que $-2 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc} \dots & < & a & < & b \\ \dots & \dots & a+2 & \dots & b+2 \\ & & \dfrac{1}{a+2} & \dots & \dfrac{1}{b+2} \\ & & -\dfrac{1}{a+2} & \dots & -\dfrac{1}{b+2} \\ & & 1-\dfrac{1}{a+2} & \dots & 1-\dfrac{1}{b+2} \\ & & f(a) & \dots & f(b) \end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 13.8.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 3$ on a $f(x) = \frac{1}{3-x} - 2$.
3. Soient a et b tels que $3 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & -a & \dots & -b \\
\dots & \dots & 3-a & \dots & 3-b \\
 & & \dfrac{1}{3-a} & \dots & \dfrac{1}{3-b} \\
 & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \dots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;3[$.

EXERCICE 13.9.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -3$ on a $f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]-3\,;+\infty[$.

13.4.3 Problèmes

EXERCICE 13.10.
ABC est un triangle, M est un point du segment $[AB]$ et N est le point de $[AC]$ tel que $(MN) \parallel (BC)$.
On donne $AB = x$, $MB = 2$ et $MN = 4$ et on suppose que $x > 2$.

1. Exprimer la longueur BC en fonction de x.
2. On appelle $\ell(x)$ la longueur BC.
   (a) Montrer que $\ell(x) = 4 + \frac{8}{x-2}$.
   (b) Démontrer que la fonction ℓ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.
3. Calculer x pour que $BC = 5$.
4. Peut-on avoir $BC = 1\,000$?

EXERCICE 13.11.
Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1 = 2$ et $R_2 = x$.

1. Démontrer que $R = \frac{2x}{x+2}$.
2. On considère la fonction r définie sur $[0\,;+\infty[$ par $r(x) = \frac{2x}{x+2}$.
   (a) Montrer que $r(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$.
   (b) Démontrer que r est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x positif on a $0 \leqslant r(x) < 2$.
   (d) Dresser la tableau des variations de r.
3. Comment choisir R_2 pour avoir $R = 1{,}5\,\Omega$.

Fiche A

Expressions algébriques

A.1 Rappels

Définition. Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

Propriété. *Au collège, on a obtenu les factorisations et développements suivants :*

$$\begin{array}{rclrcl} ka+kb & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a+b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(c+d) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a-b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a^2-b^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A.2 Exercices

EXERCICE A.1.
Indiquer pour chaque expression s'il s'agît d'une somme ou d'un produit :

- $A=(x-5)(x+8)$
- $B=x^2-\frac{1}{x}$
- $C=2x+(x-3)(2x+1)$
- $D=x(2+3x)$
- $E=(x+3)x+7$
- $F=(x-3)^2+1$
- $G=7(x-3)^2$
- $H=(3x+5)^4$
- $I=(x+3)(x+7)$
- $J=(x-3)^2-1$
- $K=x+\frac{1}{x}$
- $L=x^2-(3x-1)^2$
- $M=\frac{3x+4}{x-2}$
- $N=(x+3)(x-2)x+1$
- $O=(x+1)^2$
- $P=6ab$

EXERCICE A.2.
Parmi les formules rappelées dans la propriété ci-dessus, lesquelles sont des formules de développement, lesquelles sont des formules de factorisation ?

EXERCICE A.3.
Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A=(x^2+4)(2x-3)$
- $B=x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C=(5-2x)(x-4)$
- $D=(x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E=(x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F=x(x+1)(x-3)$
- $G=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H=(a+b)^3$
- $I=(a-b)^3$
- $J=-(x-7)$
- $K=-(2x+3)^2$
- $L=(x-2)^2$
- $M=(x+1)^2-x^2$

EXERCICE A.4.
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A=x(x-1)+2x(x-3)$
- $B=(x-1)^2+4(x-1)(x+5)$
- $C=x^2-(3x+1)^2$
- $D=x(x-4)-5(4-x)$
- $E=4x^2+20x+25$
- $F=x(x-1)-(2x+5)x$
- $G=(x+5)^2-(2x+7)^2$
- $H=(5x+1)(-3x+4)+x(10x+2)$
- $I=x^3-12x^2$
- $J=x^2-4+(x-2)(2x+1)$
- $K=2x-3+(3-2x)^2$
- $L=(2a+1)^2-(a+6)^2$
- $M=(2x-3)(1-x)-3(x-1)(x+2)$
- $N=(x-1)^2+2(x^2-1)$
- $O=x^4+4x^3+4x^2$
- $P=4x^5-x^3$
- $Q=x^7-x^5$
- $R=x(x+2)^2-4x(x-1)^2$
- $S=(2a-b)(b-a)-(2b-a)(b-2a)$
- $T=a^4-b^4$

A.3 Problèmes

PROBLÈME A.1.
Montrer que le somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

PROBLÈME A.2.
Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédant cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi. Pourquoi ?

PROBLÈME A.3.
Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux nombres. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.

PROBLÈME A.4.
On donne : $a^2+b^2+c^2=1$.
Que vaut $a^4+(ab+c)^2+(ac-b)^2$?

PROBLÈME A.5.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2+x+3$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
   - 0 ;
   - 1 ;
   - -2 ;
   - $\sqrt{2}$;
   - $1+\sqrt{3}$;
   - $2-\sqrt{5}$.
2. Résoudre $f(x)=3$.

PROBLÈME A.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-5x+3$. Résoudre $f(x)=3$.

PROBLÈME A.7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2-4x+1$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x)=9$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Résoudre $f(x)=9$.

PROBLÈME A.8.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=-x^2+2$. Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=g(x)$.

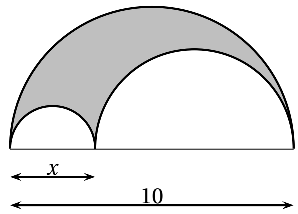
PROBLÈME A.9.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3$ et $g(x)=3x-2$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x)=g(x)$.

1. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3-3x+2=0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.

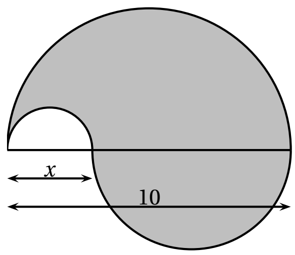
PROBLÈME A.10.
On considère la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(x-2)$. On cherche à trouver, par le calcul, le minimum de $f(x)$.

1. Démontrer que $f(x)=(x-1)^2-1$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$.

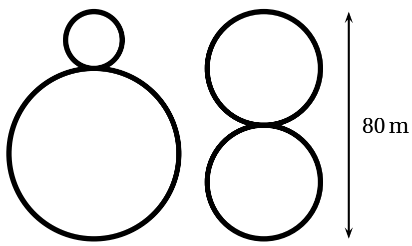
PROBLÈME A.11.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction du nombre x. Que constate-t-on ?



PROBLÈME A.12.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.

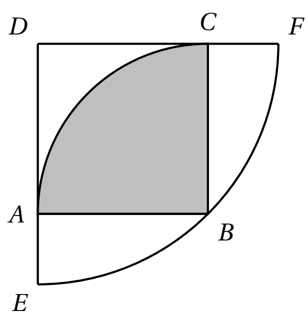


PROBLÈME A.13.
Oscar et Alix doivent tracer sur la plage un circuit de karting. Ils souhaitent construire un circuit en forme de 8 et disposent de 80 mètres de plage. Sur la figure ci-dessous sont tracés leurs modèles respectifs, composés chacun de deux cercles tangeants. De ces deux circuits, lequel est le plus long ?



PROBLÈME A.14.
$ABCD$ est un carré. Pour construire E et F, on a tracé un quart de cercle de centre D passant par B. On a également tracé un quart de cercle de centre B passant par A.

1. Montrer que l'aire de la surface blanche intérieure au secteur DEF est égale à l'aire de la surface verte.
2. L'aire de la surface verte est-elle plus grande ou plus petite que les trois quarts de l'aire du carré $ABCD$?

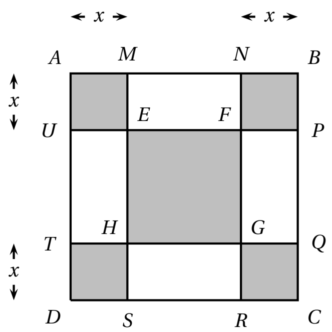


PROBLÈME A.15.
Sur la figure A.1 page iv $ABCD$ est un carré de côté 6 cm et E est le milieu du côté $[BC]$. I est un point quelconque

du segment $[AB]$ distinct de A et de B. On note $AI = x$ (en cm). $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I qui passe par A. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$.

PROBLÈME A.16.

Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.

2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.

3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.

4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.

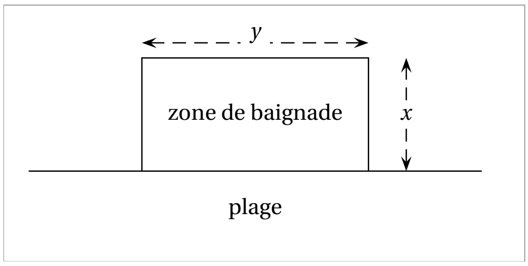
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.

5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.

   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

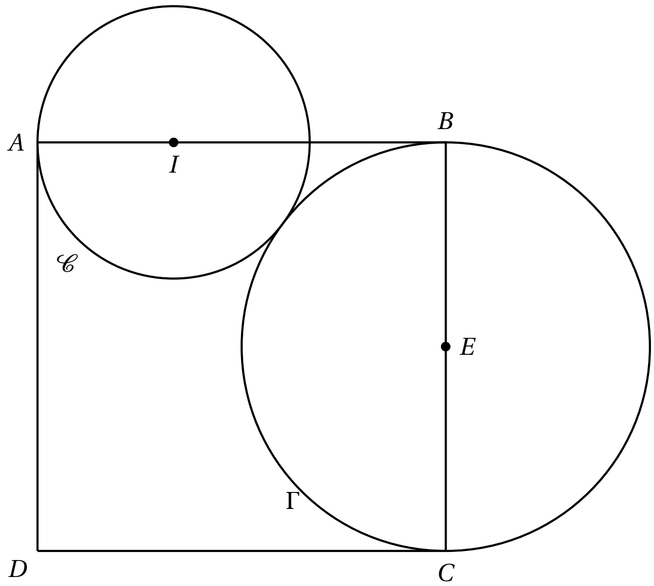
PROBLÈME A.17.

Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade .
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?
2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?
3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifer.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?

FIGURE A.1 – Figure du problème A.15

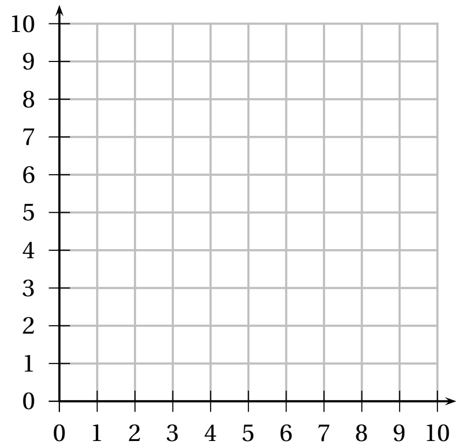


Fiche B

Algorithmique : boucle « pour »

EXERCICE B.1 (Lecture d'un algorithme)**.**
On donne l'algorithme :

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT (0,k)->(k,k)
  FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```



L'appliquer, à la main, dans le repère ci-contre puis taper cet algorithme dans algobox en choisissant un repère gradué de 0 à 10 sur les deux axes et vérifier votre dessin.

EXERCICE B.2 (Écriture d'algorithmes)**.**
Écrire des algorithmes qui permettent de faire les dessins de la page suivante.

EXERCICE B.3.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant tous les nombres entiers de 0 à n.

EXERCICE B.4.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant la somme de tous les nombres entiers de 0 à n.

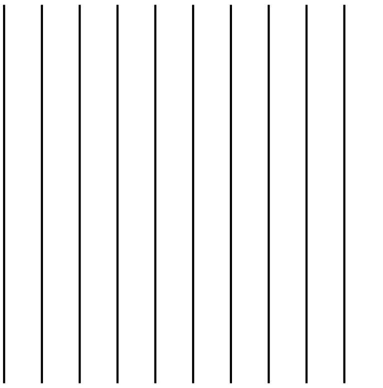
EXERCICE B.5.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.

EXERCICE B.6.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant tous les diviseurs de n.

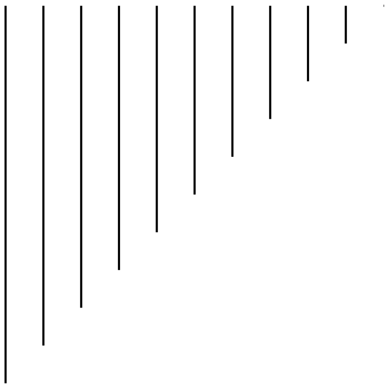
Remarque. En langage Algobox, le reste de la division de x par y s'écrit $x\%y$.

EXERCICE B.7.
Écrire un algorithme prenant comme argument un nombre entier n et affichant le nombre de diviseurs de n.

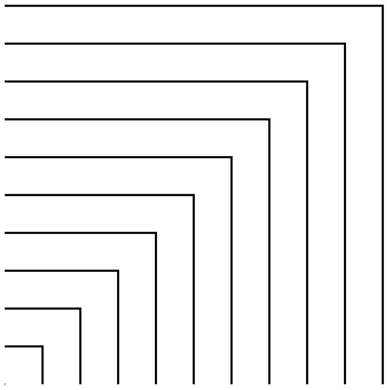
Dessin n° 1



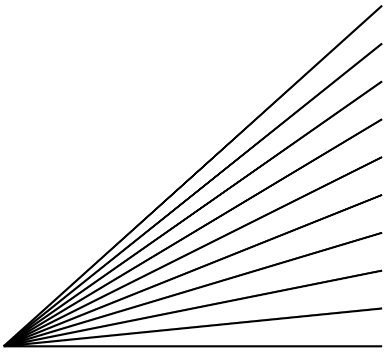
Dessin n° 2



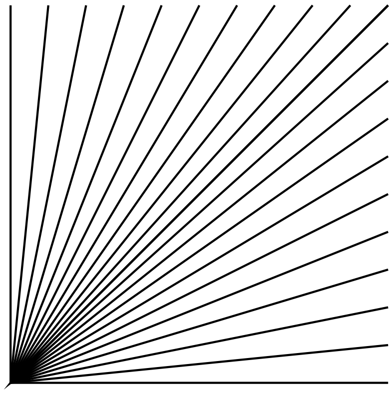
Dessin n° 3



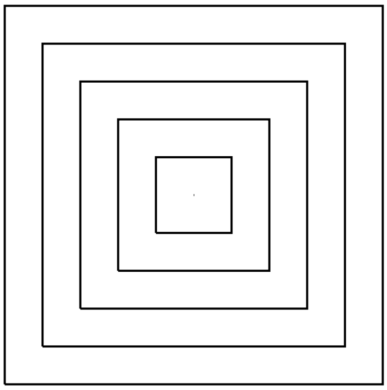
Dessin n° 4



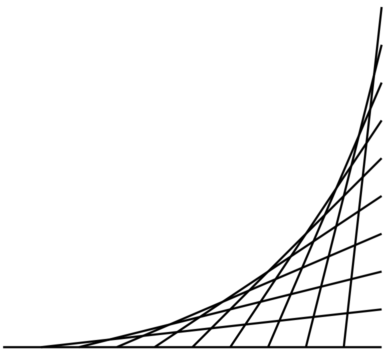
Dessin n° 5



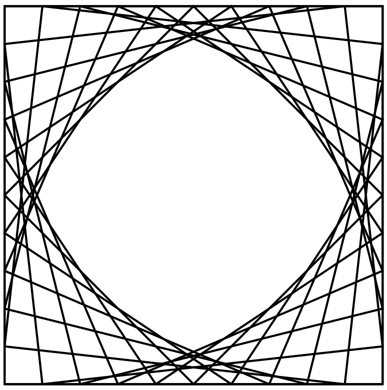
Dessin n° 6



Dessin n° 7



Dessin n° 8



Dessin n° 9