Chapitre 13

Fonction inverse
Fonctions homographiques

Sommaire

13.1 Activités

ACTIVITÉ 13.1.
Chaque année, un célèbre magazine automobile organise le concours du véhicule écologique le plus performant. Il s'agit de parcourir un kilomètre sur une piste aménagée, avec comme seul carburant de l'eau, du vent ou du soleil. On désigne par v la vitesse moyenne d'un véhicule (en kilomètres par heure) et par $f(v)$ le temps (en heures) nécessaire pour parcourir la piste.
On rappelle que la vitesse moyenne v est donnée par $\frac{d}{t}$ où d désigne la distance parcourue et t le temps mis pour parcourir cette distance.

1. (a) Donner l'expression de la fonction f en fonction de la vitesse v.
   (b) Compléter le tableau suivant :

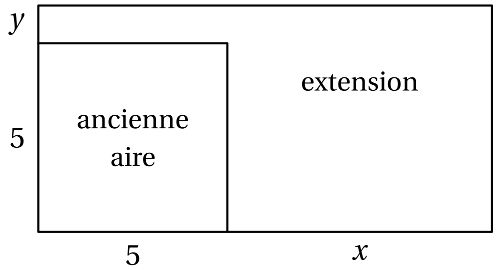
v	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(v)$														

   (c) Le tableau précédent est-il un tableau de proportionnalité ?
2. (a) On se place dans un repère orthornormé où une unité représente 1 kilomètre par heure en abscisse et 1 heure en ordonnée. Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.
   (b) Reconnaît-on la représentation graphique d'une fonction affine ? D'une fonction trinôme ?
3. Cette année, deux véhicules se sont particulièrement distingués : le véhicule « Solaria 2200 » et le véhicule « WindBolide ».

(a) Solaria 2200 a parcouru la piste à la vitesse de 9,5 kilomètre par heure. Donner un encadrement de son temps de parcours.

(b) WindBolide, quant à lui, a eu besoin de 3 heures pour faire le parcours. Donner un encadrement de sa vitesse moyenne.

ACTIVITÉ 13.2.
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5; 15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5; 15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5$ m ou $x_2 = 10$ m ?

13.2 Fonction inverse

Définition 13.1. On appelle *fonction inverse* la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une *hyperbole*.

Propriété 13.1. *La fonction inverse est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty; 0[$ *et strictement décroissante pour* $x \in]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Preuve. Rappelons qu'une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) > f(b)$ (on dit qu'elle inverse l'ordre). Soient x et y deux réels non nuls.
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{y-x}{xy}$

- Si $x < y < 0$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.
- Si $0 < x < y$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$\diamondsuit$

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 13.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

13.3 Fonctions homographiques

Définition 13.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée *fonction homographique*.
Elle est définie pour tout x tel que $cx + d \neq 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[$

Sa courbe est une hyperbole.

Propriété 13.3. *Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \beta$.*

On l'admettra.

Propriété 13.4. *Soit $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ une fonction homographique. Alors f a les variations résumées dans l'un des tableaux ci-dessous :*

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

On l'admettra.

13.4 Exercices

13.4.1 Technique

EXERCICE 13.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ... $\frac{1}{x}$ ...
3. Si $x > 2$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
4. Si $x < -3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
5. Si $x < 4$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
6. Si $x > -10$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
7. Si $x < 1$ alors ..... $\frac{1}{x}$ .....
8. Si $x > -5$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....

EXERCICE 13.2.
On considère les fonctions f et g définies pour tout x non nul par $f(x) = \frac{4}{x}$ et $g(x) = -\frac{2}{x}$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice ? Que peut-on conjecturer concernant les variations de f ?
   (b) Soient $0 < a < b$.
   Que peut-on dire alors de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$?
   Que peut-on dire alors de $4 \times \frac{1}{a}$ et de $4 \times \frac{1}{b}$?
   En déduire le sens de variation de f sur $]0\,; +\infty[$.
   (c) Faire de même en partant de $a < b < 0$.
2. Mêmes questions avec la fonction g.

EXERCICE 13.3.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

1. Une fonction homographique est toujours définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une fonction homographique peut être définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et 3.
3. La fonction $f(x) = \frac{2-x}{10-x}$ est une fonction homographique.
4. La fonction $g(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-10x}$ est une fonction homographique.
5. La fonction $h(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-6x}$ est une fonction homographique.
6. La fonction $i(x) = \frac{x^2+1}{x+4}$ est une fonction homographique.

EXERCICE 13.4.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions homographiques suivantes et les valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent :

- $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+4}$
- $g : x \longmapsto \frac{x+5}{x+4}$
- $h : x \longmapsto \frac{2x+3}{3x+4}$
- $i : x \longmapsto \frac{x-1}{3x+1}$

EXERCICE 13.5.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{x-4} = 0$
2. $\frac{-x+4}{2x-1} = 0$
3. $\frac{-3x+4}{-2x-1} = 2$
4. $\frac{3x+4}{x+4} = 8$
5. $\frac{x-4}{x-1} = -2$
6. $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$
7. $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$
8. $\frac{3x}{4x+9} > 0$
9. $\frac{2x-10}{11x+2} \leqslant 0$

13.4.2 Études de variation de fonctions homographiques

EXERCICE 13.6.
On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x+4}{x+1}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -1$ on a :
$$f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$$
3. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+1 & \dots & b+1 \\
 & & \dfrac{1}{a+1} & \dots & \dfrac{1}{b+1} \\
 & & \dfrac{3}{a+1} & \dots & \dfrac{3}{b+1} \\
 & & 1+\dfrac{3}{a+1} & \dots & 1+\dfrac{3}{b+1} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-1[$.

EXERCICE 13.7.
On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 3$ on a :
$$f(x) = \frac{1}{3-x} - 2$$
3. Soient a et b tels que $3 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & -a & \dots & -b \\
\dots & \dots & 3-a & \dots & 3-b \\
 & & \dfrac{1}{3-a} & \dots & \dfrac{1}{3-b} \\
 & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \dots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;3[$.

EXERCICE 13.8.
On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$ on a :
$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$$
3. En utilisant une des deux expressions de f, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = 1$
   (c) $f(x) < 0$
4. Soient a et b tels que $-2 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+2 & \dots & b+2 \\
 & & \dfrac{1}{a+2} & \dots & \dfrac{1}{b+2} \\
 & & -\dfrac{1}{a+2} & \dots & -\dfrac{1}{b+2} \\
 & & 1-\dfrac{1}{a+2} & \dots & 1-\dfrac{1}{b+2} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 13.9.
On s'intéresse à la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -3$ on a :
$$f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$$
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]-3\,;+\infty[$.

13.4.3 Problèmes

Problème 13.1.
ABC est un triangle, M est un point du segment $[AB]$ et N est le point de $[AC]$ tel que $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AB = x$, $MB = 2$ et $MN = 4$ et on suppose que $x > 2$.

1. Exprimer la longueur BC en fonction de x.
2. On appelle $\ell(x)$ la longueur BC.
   (a) Montrer que $\ell(x) = 4 + \frac{8}{x-2}$.
   (b) Démontrer que la fonction ℓ est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.
3. Calculer x pour que $BC = 5$.
4. Peut-on avoir $BC = 1\,000$?

Problème 13.2.
Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1 = 2$ et $R_2 = x$.

1. Démontrer que $R = \frac{2x}{x+2}$.
2. On considère la fonction r définie sur $[0\,;+\infty[$ par $r(x) = \frac{2x}{x+2}$.
   (a) Montrer que $r(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$.
   (b) Démontrer que r est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x positif on a $0 \leqslant r(x) < 2$.
   (d) Dresser la tableau des variations de r.
3. Comment choisir R_2 pour avoir $R = 1,5\,\Omega$?