Chapitre 8

Graphes probabilistes

Sommaire

8.1 Quelques exemples

8.1.1 Une évolution de population

Le problème

Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.
La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires.
20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.
À l'année 0, un quart des habitants sont en X.

On se pose les questions suivantes :

- Comment sera répartie la population, entre les villes X et Y au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans ?
- Que se serait-il passé au bout de 1, 2, 5, etc. ans si 99 % des habitants avaient été initialement en X (ou en Y) ?
- Que se serait-il passé au bout de 1, 2, 5, etc. ans si la population avait été également répartie entre les deux villes en l'année zéro ?

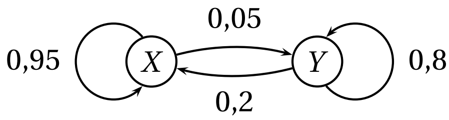
Une solution

1. L'énoncé nous dit que 95 % des gens qui sont en X y restent, 5 % partent en Y, et que 80 % des gens qui sont en Y y restent, 20 % partant en X.

En appelant X_n la population de la ville X à l'année n et Y_n celle de Y, expliquer pourquoi on peut représenter l'évolution par le système d'équations :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} = 0,05X_n + 0,8Y_n \end{cases}$$

2. On peut représenter la situation par le graphe suivant, où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet X au sommet Y, la proportion de population qui passe à chaque étape de X à Y. Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant un sommet doit être 1 :



Si l'on note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années, déterminer la matrice M telle que le système déquation d'évolution trouvée précédemment peut se réécrire :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

On appelera M : *matrice de transition du système*.

Attention ! Le produit ne se fait pas à droite de la matrice, comme on en a l'habitude, mais à gauche. Cela présente l'avantage de garder l'écriture des vecteurs en ligne, et c'est l'habitude en probabilité.

   (a) Exprimer P_1 et P_2 en fonction de M et de P_0.
   Généraliser pour obtenir P_n en fonction de P_0, de M et de n.

   (b) À l'aide de cette formule, répondre aux questions qu'on se pose dans le problème.

3. (a) Que constate-t-on, quand n devient grand, quelle que soit la répartition de population à l'année 0 ?

   (b) On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} 800\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}$.
   Calculer P_1, P_2, P_3, etc.
   Comment peut-on alors qualifier cette répartition, cet état ?

   (c) On a vu que, quelle que soit la population de départ, le système converge vers cet état. Il peut donc être intéressant d'être en mesure de le déterminer dès le départ.
   On admet qu'une telle répartition existe et on appelle x la population de X et y celle de Y pour lesquelles la population de chaque ville est la même chaque année.

      i. Que devient le système d'équations d'évolution si $\begin{pmatrix} X_n & Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$?

      ii. En déduire que x et y sont solutions de : $\begin{cases} 0,2y = 0,05x \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases}$

      iii. Déterminer alors x et y.

8.1.2 Maladie

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).
D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

1. Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.
2. Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans pour chacune des situations suivantes :
   - au départ, il est immunisé ;
   - au départ, il est non malade et non immunisé ;
   - au départ, il est malade.
3. On note $\begin{pmatrix} i & m & s \end{pmatrix}$ l'état stable du système.
   (a) Montrer que i, m, s sont solutions du système :
   $$(S) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0,8m - 0,1i &=& 0 \\ 0,5s - 0,8m &=& 0 \\ 0,1i - 0,5s &=& 0 \\ i + m + s &=& 1 \end{array} \right.$$
   (b) En déduire l'état stable.

8.2 Cas général : graphes probabilistes à p états

On considère un système qui peut se trouver dans p états $\{1 ; 2 ; \dots ; p\}$, avec une certaine probabilité, variable au cours du temps, pour chaque état.
On s'intéresse à l'évolution de ce système au cours du temps, et on fait l'hypothèse que la probabilité de transition de l'état i à l'état j est indépendante du temps, et ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de l'état dans lequel on se trouve.
De bons exemples de tels systèmes sont donnés par les jeux de hasard, tels que jeu de l'oie, Monopoly, jacquet, petits chevaux, etc. Pour de tels jeux, l'état est donné par la case sur laquelle on se trouve ; la façon dont on y est arrivé n'a pas d'importance pour la suite du jeu.
Les systèmes qu'on observe dans la vie réelle sont en général beaucoup plus complexes, mais l'approximation simple qu'on en fait ici donne souvent des indications utiles ; ce type de modèle est utilisé en pratique dans un grand nombre de situations, avec de bons résultats.
On peut représenter un tel système par un graphe orienté, dont les sommets sont les états du système, et où l'on associe à chaque transition, de l'état i à l'état j, une arête orientée allant de i vers j, étiquetée par la probabilité de transition, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n. Remarquons que l'on peut rester dans un même état : le graphe peut avoir des boucles.

Définition 8.1. On appelle *graphe probabiliste* un graphe orienté, tel que pour chaque couple de sommets $(i ; j)$ distincts ou confondus il existe au plus une arête de i vers j, et où chaque arête est étiquetée par un réel p_{ij} compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

De même qu'à un graphe (orienté ou non), on associe une matrice d'adjacence A, dont le terme a_{ij} compte le nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j, on peut associer à un graphe probabiliste une matrice qui décrit les probabilités de transition :

Définition 8.2. Étant donné un graphe probabiliste à p sommets, on appelle *matrice de transition* associée la matrice carrée $M = (m_{ij})$ à p lignes et p colonnes, dont le coefficient m_{ij} est l'étiquette de l'arête orientée de i vers j si elle existe (c'est-à-dire la probabilité de transition de i à j), et 0 sinon.

On veut étudier l'évolution d'un tel système au cours du temps ; on note X_n le vecteur ligne à p éléments dont l'élément d'ordre j est la probabilité que le système se trouve à l'instant n dans l'état j (Attention aux indices ! on a ici une suite de vecteurs lignes, avec chacun p composantes !).
La propriété fondamentale est la suivante :

Propriété 8.1. *Pour tout entier n, on a $X_{n+1} = X_n \times M$*

On l'admettra.
On en déduit immédiatement :

Propriété 8.2. *Pour tout entier $n > 0$, on a : $X_n = X_0 \times M^n$*

On l'admettra.
Cette formule, qui permet de calculer la répartition de probabilités au temps n si on la connaît au temps 0, est fondamentale pour tous les exercices.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la répartition de probabilité est stable au cours du temps.

Définition 8.3. On appelle état stable un vecteur ligne $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ à p composantes tel que $X = X \times M$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$

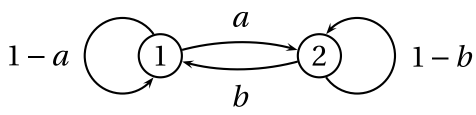
La dernière condition $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$ est due au fait que X représente une répartition de probabilité.

Remarquons que la recherche d'un état stable n'est pas difficile en pratique : il s'agit de résoudre l'équation $X = X \times M$, et d'en chercher une solution satisfaisant $\sum_{i=1}^{p} x_i = 1$, ce qui se fait sans problème pour une matrice M donnée.
On peut interpéter cette équation de la manière suivante : pour obtenir un état stable, il faut que toutes les transitions s'équilibrent ; si l'on considère le problème comme une évolution de population, il faut que, pour tout état i, la quantité de personnes qui quittent l'état i à chaque étape soit égale à la quantité de personnes qui y arrivent.
Ce qui est moins évident, c'est qu'un tel état existe, et qu'il soit unique. Ce qui se passe quand on ne part pas d'un état stable n'est pas évident non plus. Nous allons l'étudier en détail dans le cas d'un système à deux états, cas qui est accessible au niveau de la terminale.

8.3 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états

On suppose qu'il n'y a que deux états, notés 1 et 2. On note U_n (resp. V_n) la probabilité qu'à l'instant n, le système se trouve dans l'état 1 (resp. 2).
Pour tout entier n, on note X_n le vecteur-ligne à deux colonnes, $X_n = \begin{pmatrix} U_n & V_n \end{pmatrix}$. Remarquons que l'on a toujours $U_n + V_n = 1$.
On note a la probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2, c'est-à-dire la probabilité que le système passe à l'état 2 à l'étape $n+1$ sachant que le système est à l'état 1 à l'étape n et b la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 1.

Les probabilités de demeurer dans l'état 1 ou dans l'état 2 sont donc $1-a$ et $1-b$.
Le système peut donc être représenté par le graphe probabiliste suivant :



et la matrice correspondante est :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Les nombres a et b sont tous deux compris entre 0 et 1.
Il y a quelques **cas triviaux** que l'on peut traiter à part :

- *Si a et b sont nuls, M* est la matrice identité, et **tous les états sont stables**. Ce n'est pas étonnant, puisqu'il est impossible de changer !
- *Si l'un des deux seulement est nul*, par exemple a, on voit que l'on finit toujours par arriver dans l'état 1. C'est le cas d'une population qui ne se renouvelle pas, et dont les individus peuvent être dans deux états, vivants (état 2) ou morts (état 1) : à long terme, la population ne sera plus composée que de morts. On parle alors d'état absorbant (pour l'état 1). Il y a donc **un état stable**.
- Enfin, *si les deux coefficients a et b sont égaux à 1*, le système clignote : il oscille sans se stabiliser entre l'état 1 et l'état 2, et se retrouve tous les deux coups dans le même état. **Il n'y a pas d'état stable**.

Ces cas particuliers étant faciles à étudier, et peu intéressants, **on supposera désormais que** a **et** b **sont strictement positifs, et ne sont pas tous deux égaux à 1**.
On admettra alors le résultat général suivant :

Théorème 8.3. *Considérons un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition* $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ *telle que* $0 < a < 1$ *et* $0 < b < 1$. *Alors, le système admet un unique état stable, indépendamment de l'état initial.*

On peut généraliser, sous certaines conditions à un graphe à n états :

Théorème 8.4. *Soit un graphe probabiliste à n états, de matrice de transition M. S'il existe une puissance* M^k *de M dont tous les coefficients sont* strictement *positifs, alors il existe un seul état stable* X, *vérifiant* $X = XM$, *et quel que soit l'état initial, le système converge exponentiellement vite vers l'état stable.*

On l'admettra.

8.4 Exercices

8.4.1 État stable

EXERCICE 8.1 (Liban, juin 2003)**.**
Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :
a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;
b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;
P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année n.
Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1 500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1 000 l'abonnement B.
   Déterminer l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
   (b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
   (c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
   Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
   Déterminer x et y.
   En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.
   Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

EXERCICE 8.2 (Amérique du sud, novembre 2 004)**.**
Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;
b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;
P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste la semaine n.

1. Déterminer l'état initial P_1.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times$ M où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $\begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \times \text{M} = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$.
   On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

EXERCICE 8.3 (Antilles-Guyane, juin 2 004).
On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $(n+1)$-ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la n-ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.
On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.
On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n.
L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.

1. Représenter G et donner sa matrice.
2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
   (a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
   (b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3. Déterminer l'état stable du graphe G.
4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.
   Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

EXERCICE 8.4 (Polynésie, juin 2 004).
Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.
- S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1. Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.
2. En déduire la probabilité des événements suivants :
   J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;
   K : « il fera sec mardi » ;
   L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1. Soit n un entier naturel, on note :
   s_n la probabilité pour que le jour n, il fasse sec ;
   h_n la probabilité pour que le jour n, il fasse humide ;
   P_n la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n. Déterminer une relation entre s_n et h_n.
2. (a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.
   (b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.
3. La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer M^2 (utiliser la calculatrice).
   (b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M, la situation du mardi étudiée dans la partie A.
4. (a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.
   (b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 8.5 (France métropolitaine - 2011)**.**
Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».
Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée. Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau et 20 % reviennent au niveau A et les autres passent passent au niveau C,
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A »,
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B »,
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année $2010 + n$. Ainsi $P_0 = (0,2 \quad 0,7 \quad 0,1)$.

On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux abonnés et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 0 \\ 0,2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0,15 & \cdots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q, R, T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

   Le président de l'association affirme que 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

EXERCICE 8.6.
Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales.
Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 13 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois sortes d'image, a déclaré mensongère la publicité : « Les images sont également réparties dans les boîtes ». Que penser de ce qu'il affirme ?
On donnera les résultats numériques arrondis à 1 près.

Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte de céréales.

Partie A : Étude du début du processus.
On pourra s'aider d'un arbre pour représenter la situation

1. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement une sorte d'image la première semaine, la deuxième semaine, la cinquième semaine.
2. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement deux sortes d'image la première semaine, la deuxième semaine, la troisième semaine.
3. Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement trois sortes d'image la troisième semaine.

Partie B : Modélisation de la situation.

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On appelle :
   - a_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement une sorte d'image la semaine n ;
   - b_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement deux sortes d'image la semaine n ;
   - c_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement trois sortes d'image la semaine n.

   Préciser a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2.
2. On choisit une personne au hasard parmi les 1 000.

   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère les événements :
   - A_n : « La personne considérée possède exactement une sorte d'image la semaine n » ;
   - B_n : « La personne considérée possède exactement deux sortes d'image la semaine n » ;
   - C_n : « La personne considérée possède exactement trois sortes d'image la semaine n ».

(a) Exprimer $p(A_n)$ en fonction de a_n, $p(B_n)$ en fonction de b_n et $p(C_n)$ en fonction de c_n.

(b) Représenter par un arbre pondéré l'évolution de la situation de la semaine n à la semaine $n+1$.

(c) En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer $p(A_{n+1})$, $p(B_{n+1})$ et $p(C_{n+1})$ en fonction $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$.

(d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{array}{ll} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n & (1) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n & (2) \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n & (3) \end{array}$$

3. L'état E_n du système la n-ième semaine est le vecteur-ligne $E_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

   (a) Traduire le système formé par les trois équations (1), (2) et (3) par une seule équation matricielle de la forme $E_{n+1} = E_n \times M$.

   (b) Représenter le graphe G, orienté et pondéré, associé à la matrice M.

   (c) Exprimer E_{n+1} en fonction de E_1, M et n.

   (d) En utilisant la calculatrice pour faire les calculs, déterminer E_{13} et E_{22}.
   Commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.

8.4.2 Démonstrations à l'aide de suites

EXERCICE 8.7 (Centres étrangers, juin 2 005)**.**
On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs »et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n, où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$
3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = f_n - 0,2$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

   (d) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 8.8 (Amérique du nord – 2013).
Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.
On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. (a) Traduire les données par un graphe probabiliste.
   (b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   (c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = a_n - \frac{8}{9}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. (a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   (b) Interpréter ce résultat.

EXERCICE 8.9 (Nouvelle Calédonie – 2013).
Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans. En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.
On admet qu'à partir de l'année 2010 :

- 14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection votreont pour le parti Phénix à l'élection suivante ;
- 6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante ;
- Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard. On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l'état « L'électeur vote pour le parti Phénix ».

1. (a) Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
   (b) Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
   On a donc $E_0 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer E_1 et E_4. *(On arrondira les coefficients de E_4 au centième).* Interpéter les résultats.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
   (b) On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n, $u_n = h_n - 0,3$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?

8.4.3 Démonstrations à l'aide de matrices

EXERCICE 8.10 (L'allumeur de réverbères)**.**
Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

1. Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
2. Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
3. Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

   Vérifier que : $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire M^n, pour n entier naturel.
5. Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculer la probabilité p_n (respectivement p'_n) que le réverbère soit allumé. (respectivement éteint) au n-ième matin.

EXERCICE 8.11 (France, septembre 2 004)**.**
On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.
On suppose que l'effectif de cette population est stable.
Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
• 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
• 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
   (a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.
   (b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3. (a) Vérifier que $A = N + 0,7R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   (b) Calculer N^2, R^2, NR et RN puis en déduire A^n, pour n entier naturel.
   (c) L'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

EXERCICE 8.12.
Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges.
On pourra éventuellement représenter ces mouvements de population par un arbre pondéré ou par un graphe probabiliste G.
On donnera les résultats en pourcentage, sous forme décimale arrondie à 0,01 près.

1. On suppose dans cette question qu'en 2 002, 25 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
   (a) Quelle est la répartition prévisible de la population totale de l'île entre la capitale et le reste de l'île en 2 003 ?
   (b) Traduire le calcul effectué par la relation matricielle $E_1 = E_0 \times M$, où :
   - E_0 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2 002 ;
   - E_1 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition prévisible de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2 003 ;
   - M est une matrice carrée de dimension 2 représentant les mouvements de population dans l'île d'une année sur l'autre.

   (c) Quel est le lien entre la matrice M et le graphe G ?
   (d) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 005.
2. On suppose dans cette question qu'en 2 002, 75 % de la population totale de l'île habite dans la capitale. À l'aide d'un calcul matriciel et en utilisant la fonction matrice de la calculatrice :
   (a) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 005.
   (b) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2 010.
3. Reprendre la question précédente en supposant qu'en 2 002, 10 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
   Que remarque-t-on ?
4. On considère les matrices :
   - $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
   - $R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que $M = N + 0,4R$.
   (b) Calculer N^2, R^2, NR et RN.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = N + 0,4^n R$.
   (d) En déduire la valeur exacte de chaque coefficient de la matrice M^n.
   (e) Déterminer la limite de chaque coefficient de la matrice M^n quand n tend vers l'infini.
5. Dans cette question, on appelle x la valeur décimale du pourcentage de la population totale de l'île qui habite dans la capitale en 2 002 (x est un réel de l'intervalle $]0;1[$).
   Soit n un entier naturel, la répartition prévisible de la population de l'île en l'année $2002 + n$ est un vecteur-ligne E_n.
   (a) Déterminer E_0.
   (b) Exprimer E_n en fonction de M et E_0.
   (c) Calculer le vecteur-ligne $E = E_0 \times N$.
   Vérifier que E est indépendant de x.
   (d) Déterminer la limite de chaque coefficient du vecteur-ligne E_n quand n tend vers l'infini.
   Comparer cette limite au coefficient correspondant du vecteur-ligne E.
   (e) Démontrer que $EM = E$.