Chapitre 12

Fonctions de deux variables

Sommaire

12.1 Rappels

12.1.1 Généralités

Définition 12.1. Une fonction numérique de deux variables est une fonction qui à deux nombres x et y associe un nombre z noté $z = f(x, y)$.
Une telle fonction est représentée dans l'espace par l'ensemble des points $M(x; y; z)$ où $z = f(x, y)$.
Cet ensemble est appelé *surface*, d'équation $z = f(x, y)$.

Définition 12.2. Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.
On appelle ligne de niveau $z = k$, la courbe formée par l'intersection du plan d'équation $z = k$ et de la surface d'équation $z = f(x, y)$.
C'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ z = f(x, y) \end{array}\right.$

Remarque. On définit de la même manière les lignes de niveau $x = k$ et $y = k$.

Propriété 12.1. *Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.*
Si la ligne de niveau $z = k$ est équivalente à un système de la forme :

- $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ ax + by = c \end{array}\right.$ *alors c'est une droite (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array}\right.$ *alors c'est un cercle de centre $\Omega(0; 0\ k)$ et de rayon r (contenu dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ y = ax^2 + bx + c \end{array}\right.$ *ou* $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ x = ay^2 + by + c \end{array}\right.$ *alors c'est une parabole (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ y = \frac{1}{x} \end{array}\right.$ *ou* $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ x = \frac{1}{y} \end{array}\right.$ *ou bien encore* $\left\{\begin{array}{l} z = k \\ y = u(x) \end{array}\right.$ *où u est une fonction associée à la fonction inverse alors c'est une hyperbole (contenue dans le plan d'équation $z = k$).*

On l'admettra.

Remarque. On obtient des propriétés équivalentes pour les lignes de niveau $y = k$ et $x = k$ en permutant les lettres.

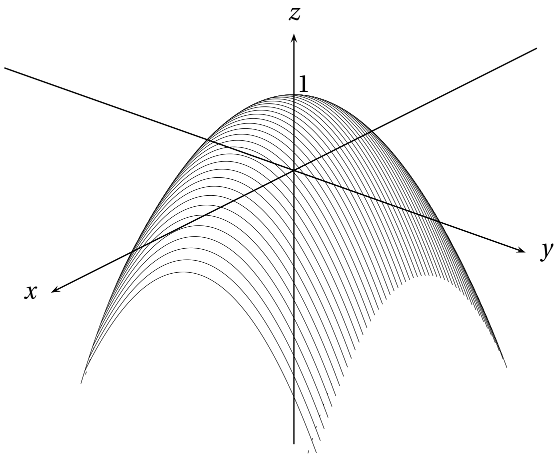
12.1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Pour toute la suite nous considèrerons la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Une première représentation

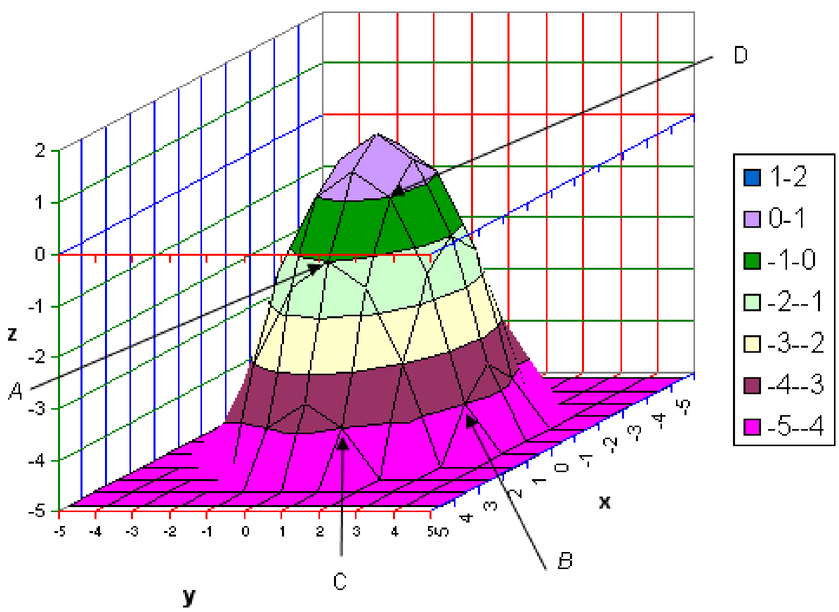
Un logiciel en donne la représentation suivante :



Une deuxième représentation

Une telle représentation n'est guère exploitable. Si l'on peut deviner (éventuellement) les coordonnées du sommet $(0;0;1)$, quasiment aucun autre point n'est lisible.
Pour pouvoir procéder plus facilement à des lectures graphiques, on fait apparaître sur cette surface des lignes de niveau $x = k$, $y = k$ et $z = k$ où k prend des valeurs entières (0, 1, 2, 3, etc. ou bien 0, 5, 10, etc.), c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à cette surface tels que $x = 0$, $x = 1$, etc. $y = 0$, $y = 1$ etc. et $z = 0$, $z = 1$ etc.
On colore en général les espaces entre deux lignes de niveau $z = 0$, $z = 1$ etc.
Enfin on place les axes à l'extérieur.
On obtient alors, avec un autre logiciel la figure 12.1 de la présente page.

FIGURE 12.1 – Deuxième représentation



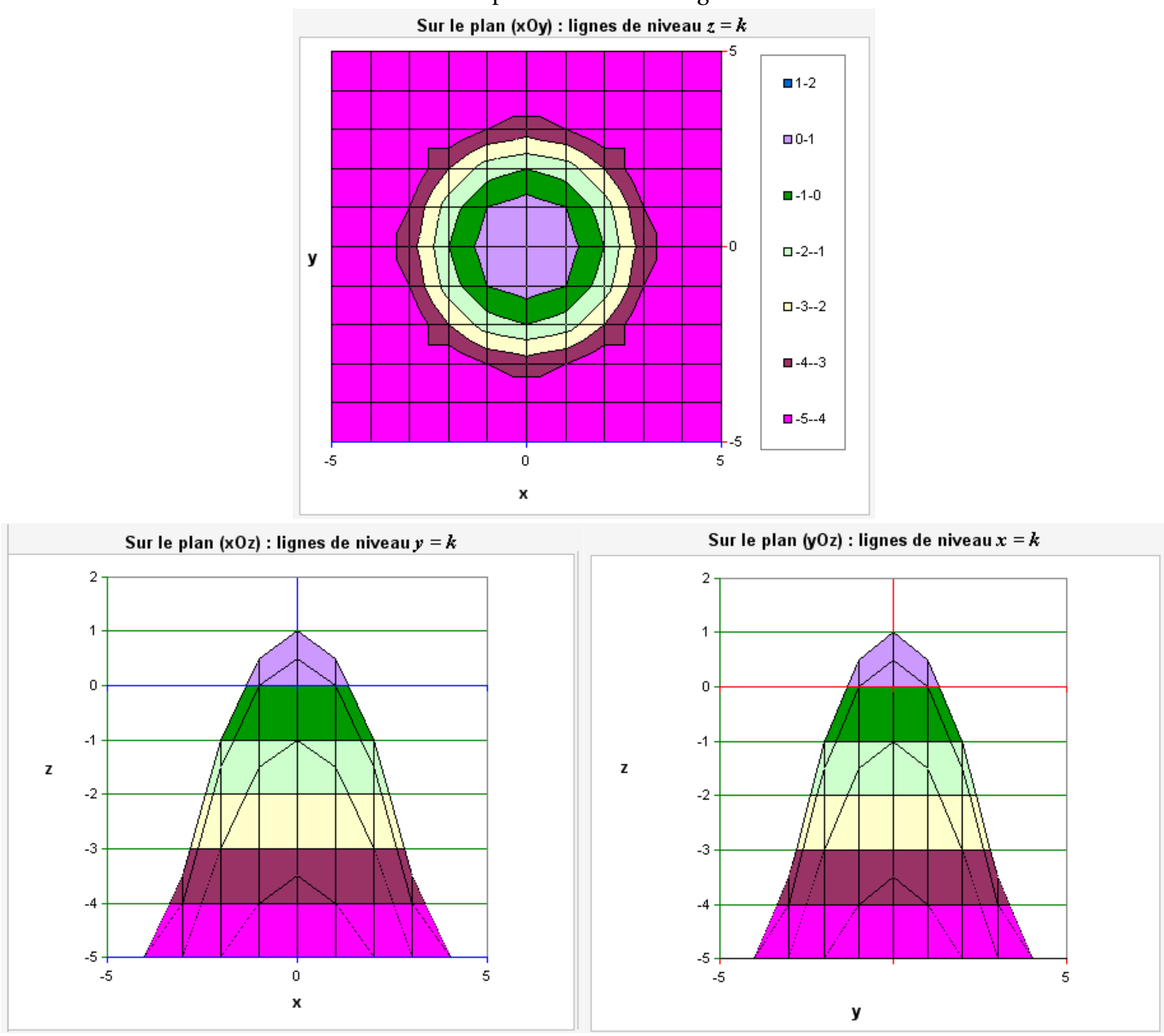
Remarque. La surface semble présenter des « angles », mais cela est dû au logiciel, la surface étant parfaitement « lisse ».

Les lignes joignant l'axe des x « de droite » à l'axe des x « de gauche » sont les lignes de niveau $x = k$, avec ici k variant de 5 (devant) à -5 (derrière).
Les lignes joignant l'axe des y « de devant » à l'axe des y « de derrière » sont les lignes de niveau $y = k$, avec ici k variant de -5 (gauche) à 5 (droite).
Enfin les autres lignes délimitant les couleurs sont les lignes de niveau $z = k$, avec ici k variant de -5 (bas) à 2 (haut).
Le point A est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 2$, $y = 0$ et $z = -1$. Ses coordonnées sont donc $A(2\,;0\,;-1)$. Le calcul le confirme : $f(x_A, y_A) = f(2,0) = 1 - \frac{1}{2}(2^2 + 0^2) = 1 - 2 = -1 = z_A$.
Le point B est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 1$, $y = 3$ et $z = -4$. Ses coordonnées sont donc $B(1\,;3\,;-4)$. Le calcul le confirme : $f(x_B, y_B) = f(1,3) = 1 - \frac{1}{2}(1^2 + 3^2) = 1 - 5 = -4 = z_B$.

Représentations des lignes de niveau

On peut avoir besoin de visualiser la surface « d'en haut », « de droite » ou « de face ».
On obtient les projections des lignes de niveau comme le montre la figure 12.2 page ci-contre (les « angles » sont dûs au logiciel).

FIGURE 12.2 – Représentations des lignes de niveau



Montrons que la ligne de niveau $z = -1$ est un cercle pour notre fonction $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Par définition, la ligne de niveau $z = -1$ est constituée des points dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} z = -1 \\ z = f(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -1 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 4 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

C'est donc un cercle de centre $(0\,;0\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

12.2 Optimisation sous contrainte

Les fonctions de deux variables sont généralement utilisées en économie pour mathématiser *la satisfaction* (on dit aussi *l'utilité*) associée pour un consommateur à la possession de deux quantités de biens consommables A et B.
Ainsi x est le nombre de biens A, y le nombre de biens B et $f(x, y)$ la modélisation de la satisfaction engendrée chez le consommateur par x biens de type A et y biens de type B.
Ce consommateur peut avoir des contraintes (de budget en général) et peut chercher à optimiser sa satisfaction sous ses contraintes (la théorie économique suppose que les individus sont parfaitement rationnels).
Ainsi si, par exemple, le bien A coûte 12 € et le bien B coûte 10 € et que le consommateur dispose d'un budget total de 150 €, on aura comme contrainte : $12x + 10y = 150$.
On cherche alors les x et y tels que la satisfaction $f(x, y)$ est maximale.
On a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} 12x+10y=150 \\ z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=15-1,2x \\ z=1-\frac{1}{2}\left(x^2+(15-1,2x)^2\right) \end{array}\right.$$

Il ne reste plus qu'à étudier la fonction $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + (15-1,2x)^2\right)$ (et souvent ses variations), pour savoir si elle admet un maximum et en quelle valeur de x il est atteint.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+(15-1,2x)^2\right) \\ &= 1-\frac{1}{2}(x^2+225-36x+1,44x^2) \\ &= -1,22x^2+18x-111,5 \end{aligned}$$

f est une fonction trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1,22 < 0$ donc elle admet un maximum atteint en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{-2,44} \approx 7,38$.
On aura alors $y_0 = 15 - 1,2x_0 \approx 6,15$.
Et la satisfaction sera $f(x_0, y_0) \approx -45,11$

Remarque. Le système $\left\{\begin{array}{l} 12x+10y=150 \\ z=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \end{array}\right.$ s'interprête géométriquement de la façon suivante : $12x + 10y = 150$ est l'équation d'un plan (parallèle à l'axe (Oz)) et $z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est l'équation de la surface S.
L'ensemble des points vérifiant ce système est donc l'intersection entre ce plan et la surface. C'est une courbe et on admettra que, dans le cas présent, c'est une parabole.
La recherche du maximum de satisfaction est la recherche des coordonnées du plus haut point de cette courbe, donc du sommet de la parabole.

EXERCICE.
Déterminer x, y pour que la satisfaction soit maximale quand les prix des biens de type A et B sont de 10 € et que le consommateur dispose de 100 €. On indiquera quelle est cette satisfaction.

12.3 Exercices

EXERCICE 12.1 (Asie – Juin 2 006)**.**
On a représenté de la présente page la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$.

Partie A – Exploitation du graphique.
On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1; 1; 6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

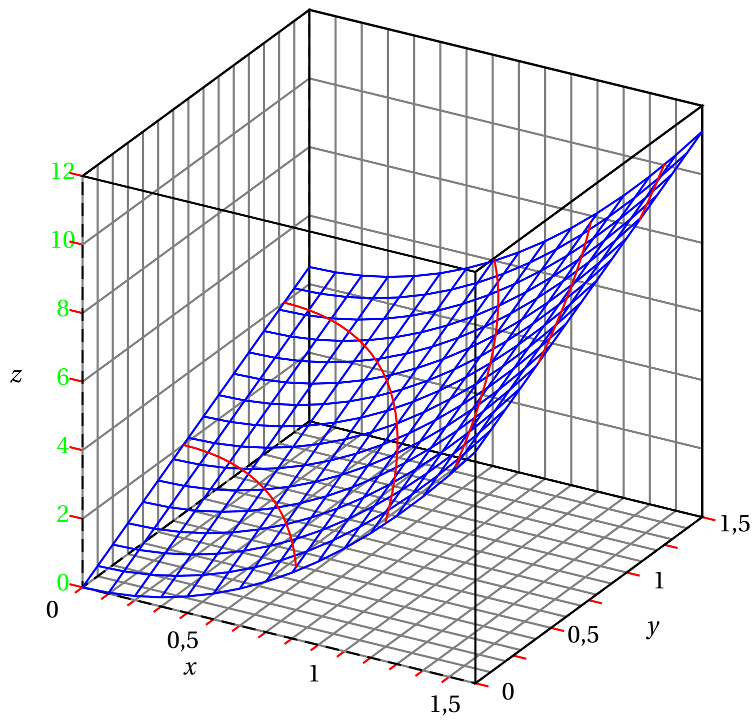
Partie B – Recherche d'un coût minimum.
Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.
On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.
Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x; y) = 3\left(x^2 + y\right)$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$.
   Exprimer $C(x; y)$ en fonction de la seule variable x. On note f la fonction ainsi obtenue.
   Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[0; 1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

FIGURE 12.3 – Figure de l'exercice 12.1



EXERCICE 12.2 (D'après Asie – Juin 2 005).
Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x\,;\,y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

La page suivante comporte deux figures.
- La figure 12.4 représente la surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 12$.
- La figure 12.5 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

Partie 1

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$?
   (a) $M(13\,;\,9\,;\,60)$ (b) $N(12\,;\,4\,;\,40)$ (c) $R(12\,;\,8\,;\,60)$ (d) $S(15\,;\,4\,;\,40)$
2. La courbe de niveau $z = 20$ est :
   (a) une parabole (b) une droite (c) une hyperbole (d) autre réponse
3. Déterminer la nature de la courbe de niveau $y = 10$.
4. (a) Déterminer la nature des courbes de niveau $x = k$ pour $k = 0$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 15$, $k = 20$.
   (b) Représenter leurs projections dans le plan (yOz)

Partie 2
Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple :
   Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?
2. Cas général
   Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal achetées.
   Montrer que x et y sont liés par la relation $x + 2y = 22$.
3. (a) Tracer sur la figure 12.5 l'ensemble des points dont l'équation est $x + 2y = 22$.
   (b) En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités.correspondantes de métaux A et B achetées.

EXERCICE 12.3.
Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0\,;\,10]$ et pour tout réel y élément de $[0\,;\,12]$ par : $f(x\,;\,y) = 2x(y+1)$.
On donne page 81 la représentation graphique de la surface $z = f(x\,;\,y)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.
Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que x, y et z sont liés par la relation $z = 2x(y+1)$ où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.
Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

Partie A

1. (a) Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?
   (b) Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordon- nées entières, de la surface donnée ci-dessous.
2. Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$? Justifier la réponse.

Partie B
Le prix d'un décilitre d'encre A est 6 € et celui d'un décilitre d'encre B est 2 €.
L'association décide d'investir 46 € dans l'achat des encres.

1. Donner la relation entre les quantités x et y d'encres A et B achetées pour un montant de 46 €.
2. Montrer alors que $z = -6x^2 + 48x$.
3. (a) Quelle quantité d'encre A l'association achètera-t-elle pour fabriquer le maximum de paquets de cartes ?
   (b) Combien de paquets de cartes seront alors fabriqués ?
   (c) Quelle quantité d'encre B sera alors utilisée ?

FIGURE 12.4 – Surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$

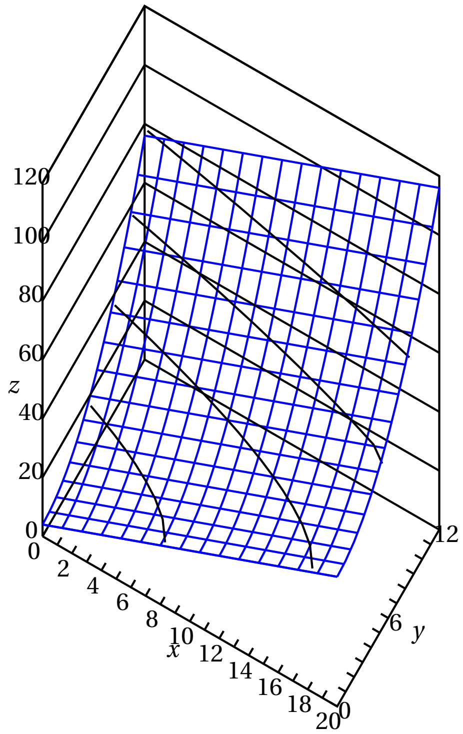


FIGURE 12.5 – Courbes de niveau

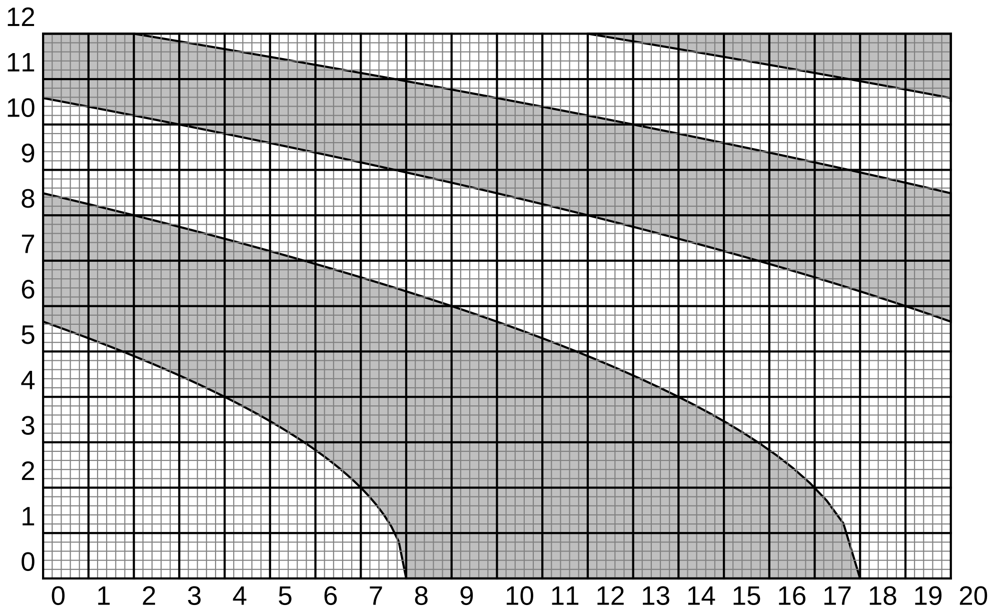
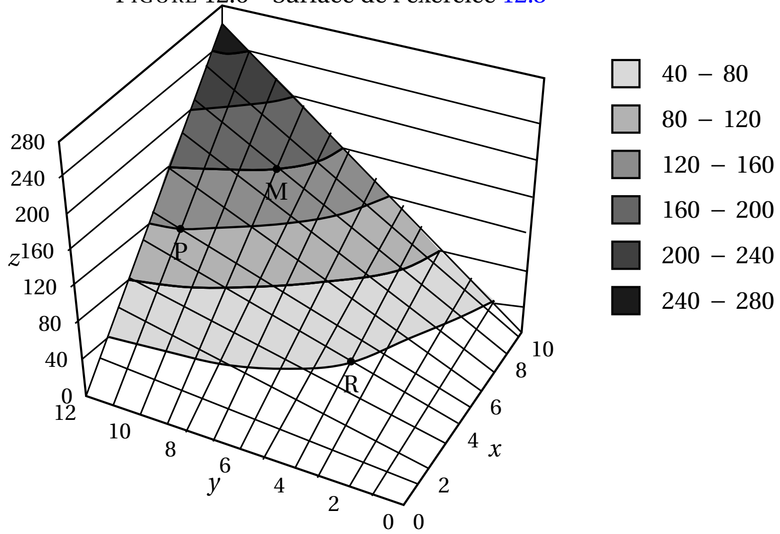


FIGURE 12.6 – Surface de l'exercice 12.3



EXERCICE 12.4 (France – Septembre 2 003).
Les questions 2 et 3 sont indépendantes.
Une entreprise fabrique deux produits E et F en quantités respectives x et y exprimées en tonnes, pour lesquelles le coût de production z est donné par

$$z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13.$$

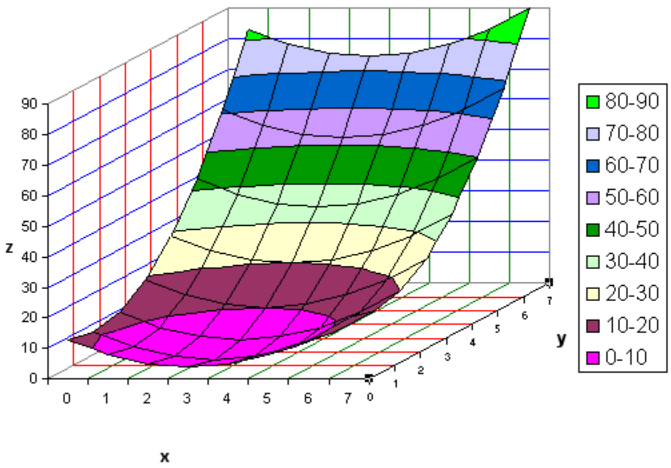
où z est exprimé en milliers d'euros avec $x \in [0; 7]$ et $y \in [0; 7]$.

1. La surface représentant ce coût est donnée dans le repère de l'espace situé sur de la présente page qui sera rendue avec la copie.
   (a) Placer sur cette surface le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 6.
   (b) Donner graphiquement un encadrement d'amplitude 10 de la cote du point A.
   (c) Vérifier par le calcul.
2. (a) Montrer que l'on a $z = (x-3)^2 + 2(y-1)^2 + 2$.
   (b) En déduire la production pour laquelle ce coût est minimal. Quel est ce coût en euros ?
   (c) Placer le point B correspondant à cette production sur la surface.
3. L'entreprise doit fabriquer une quantité x du produit E et une quantité y du produit F avec la contrainte $x + y = 7$.
   (a) Vérifier que z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $x \in [0; 7]$ et $g(x) = 3x^2 - 30x + 83$.
   (b) Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum. Quel est alors le coût de production en euros ?
   (c) Placer le point C correspondant à cette production sur la surface.

EXERCICE 12.5 (Liban – Juin 2 005).
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on désigne par $\mathscr{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy), avec la surface $\mathscr{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

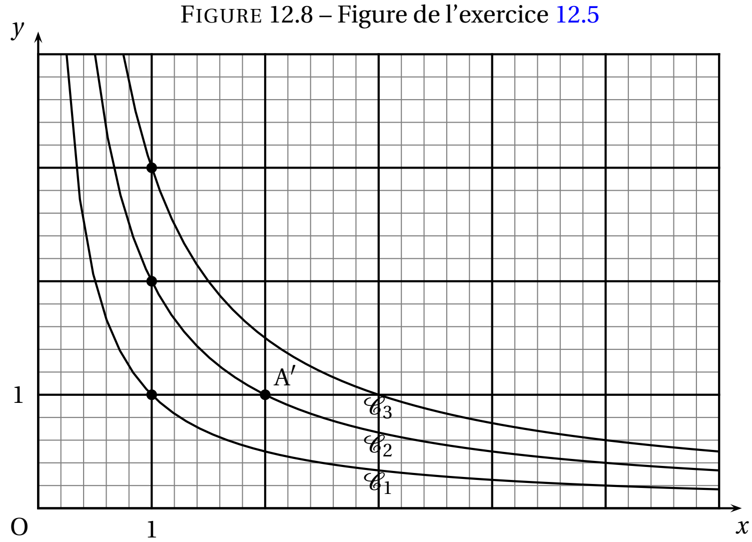
1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'abscisse 2.
   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz).
2. (a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?
   (b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
3. Sur la figure 12.8 de la présente page sont représentées trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k.
   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

FIGURE 12.7 – Figure de l'exercice 12.4



4. Le point A′ représenté sur la courbe $\mathscr{C}_2$ de la figure ci-dessous est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $A(x\,;\,y\,;\,z)$, de la surface $\mathscr{S}$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
   (b) Préciser les coordonnées du point A″, projeté orthogonal de A dans le plan (yOz), puis placer ce point A″ sur la figure 12.8.
5. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+6y-z-6=0$.
   (a) Montrer que le point A appartient au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Montrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
   (c) Démontrer que l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
   On pourra utiliser la factorisation $x+2y-xy-2=(x-2)(1-y)$.

FIGURE 12.8 – Figure de l'exercice 12.5



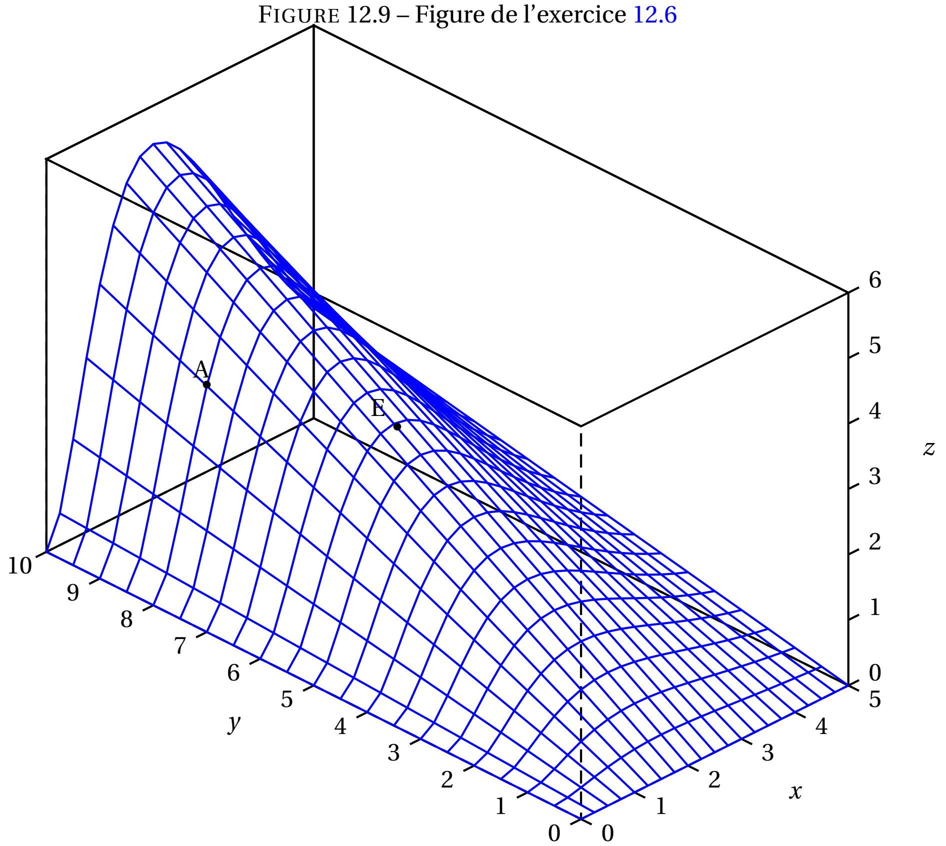
EXERCICE 12.6 (Nouvelle-Calédonie – Novembre 2 005).
Le bénéfice B d'une entreprise déepend à la fois des investissements et de la production.
On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par

$$B(x\,;\,y) = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$$

On donne de la présente page une vue de la surface (S) d' équation $z = x^2 y\mathrm{e}^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0\,;\,5]$ et y élément de l'intervalle $[0\,;\,10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.

1. Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0\,;\,5]$ et y appartient à l'intervalle $[0\,;\,10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
2. (a) Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A.
   (b) Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S), ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E.
3. Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier.
   Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0\,;\,10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.
4. Déterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

FIGURE 12.9 – Figure de l'exercice 12.6



EXERCICE 12.7 (Nouvelle-Calédonie – Novembre 2 004).
Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de COBB-DOUGLAS : $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ (A, α, β réels strictement positifs), où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y.

Partie A
On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0;10]$ et $y \in [0;10]$ respectivement par

$$f(x;y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x;y) = \frac{1}{4}x^2y.$$

1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de COBB-DOUGLAS en donnant pour chacune d'elles les valeurs A, α, β.
2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques de la figure 12.10 de la présente page.
Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.

Partie B
La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M′. Les durées de fonctionnement des machines M et M′ exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y. La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x, y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

1. Dans cette question la quantité produite est fixée à 25 tonnes.
Quelle est, parmi les trois représentations graphiques de la figure 12.11 page ci-contre, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2y$?
2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M′ est de huit centaines d'heures.
   (a) Montrer que $z = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$.
   (b) Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0;8]$.
   Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et$y$ qui assurent une production maximum.

FIGURE 12.10 – Figure de l'exercice 12.7

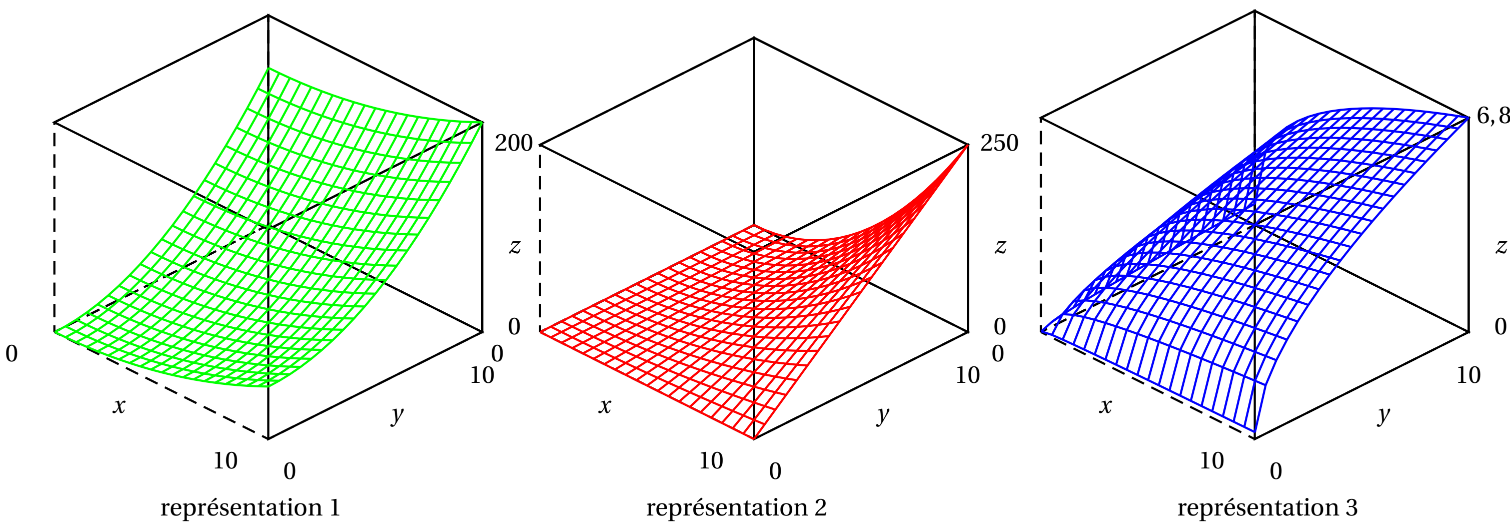


FIGURE 12.11 – Figure de l'exercice 12.7