

Devoir surveillé de spécialité n°2

Graphes étiquetés – Suites arithmético-géométriques

EXERCICE 2.1 (6 points).

Au 1^{er} janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.

Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1^{er} janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Partie A : Étude théorique

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1^{er} janvier de l'année $(2005 + n)$.

Ainsi $u_0 = 100\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,05u_n + 4\,000$.
3. Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
 - (a) Calculer v_0 .
 - (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $u_n = 180\,000 \times 1,05^n - 80\,000$.
 - (d) Étudier la convergence de (u_n) .

Partie B

Le but de cette partie est de prévoir l'évolution de la population jusqu'en 2020, en utilisant le modèle théorique étudié à la **partie A**.

1. Quel sera le nombre d'habitants de la ville au 1^{er} janvier 2020 ?
2. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera-t-elle 400 000 habitants ? Justifier.

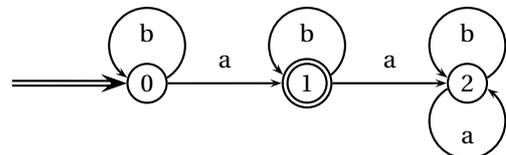
EXERCICE 2.2 (4 points).

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Soit l'automate ci-contre.

1. Les mots « aa », « aba », « bba », « babb » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



Partie B

Construire un automate qui reconnaît, dans un alphabet constitué uniquement de a et de b , tous les mots comportant exactement deux b .