

Devoir surveillé de spécialité n°1

Suites – Comptage de chaînes

EXERCICE 1.1 (4,5 points).

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :

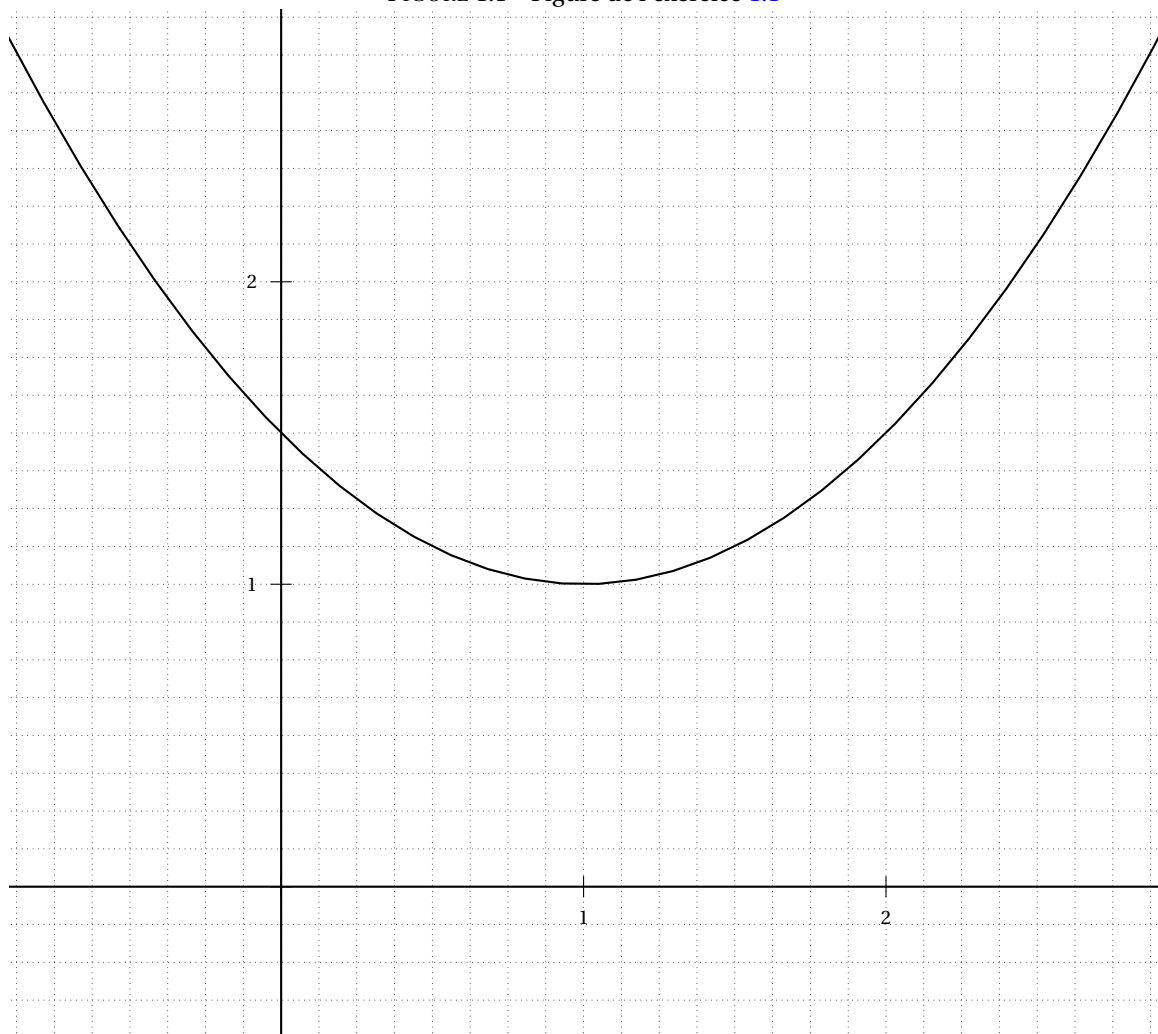
$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,5u_n^2 - u_n + 1,5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. On a tracé dans le repère de la figure 1.1 de la présente page la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = 0,5x^2 - x + 1,5$$

- (a) Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n)
- (b) À l'aide du graphique, conjecturer la monotonie, la convergence et les bornes de (u_n) .
2. (a) Montrer que la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$.
- (b) Déterminer un encadrement de $f(x)$ dans le cas où $x \in [1; 2]$.
3. (a) Montrer que u_0, u_1 et u_2 appartiennent à $[1; 2]$.
- (b) Montrer que, si $u_p \in [1; 2]$, alors $u_{p+1} \in [1; 2]$.
- (c) Que peut-on en conclure pour la suite (u_n) ?

FIGURE 1.1 – Figure de l'exercice 1.1



EXERCICE 1.2 (5,5 points).

On donne la matrice d'adjacence M d'un graphe G et quelques unes de ses puissances. Répondre aux questions suivantes, en justifiant vos réponses soigneusement uniquement à l'aide des matrices données.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 2 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 & 4 & 13 & 8 & 8 \\ 9 & 23 & 9 & 15 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 9 & 9 & 8 & 7 & 7 & 3 \\ 4 & 15 & 8 & 15 & 2 & 6 & 2 \\ 13 & 4 & 7 & 2 & 11 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 7 & 6 & 7 & 8 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre du graphe G ?
2. Ce graphe est-il orienté?
3. Quel est le degré du sommet 3?
4. Ce graphe admet-il un cycle eulérien? Une chaîne eulérienne?
5. Quelle est la distance entre le sommet 2 et le sommet 7?
6. Quel est le diamètre de G ?
7. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 4 qui partent du sommet 6 et qui y reviennent?