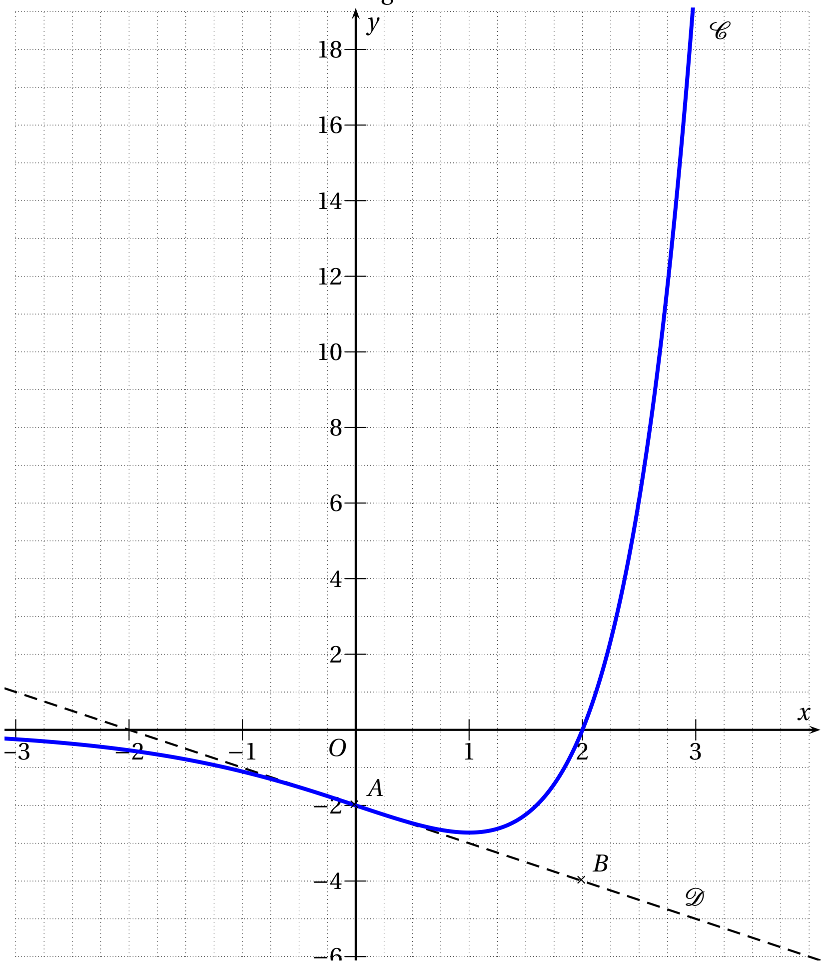
Devoir surveillé n°8

Fonction exponentielle

EXERCICE 8.1 (8 points).
Partie A
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 8.1 de la présente page (unités graphiques : 1 unité = 1,5 cm sur l'axe des abscisses, 1 unité = 0,5 cm sur l'axe des ordonnées) représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. La tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0\,;\,-2)$ passe par le point $B(2\,;\,-4)$.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.1



1. Sans justification donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. On admet qu'il existe un réel a tel que, pour tout réel x, $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^x$. Déterminer la valeur exacte de a.

Partie B
On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ *(on rappelle que* $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$*)*. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. (a) Montrer que $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de f *(on indiquera les limites et les valeurs exactes des valeurs extrêmes).*
3. (a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Déterminer la valeur arrondie au dixième, en cm^2, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Exercice 8.2 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou avec une réponse fausse n'apporte ni ne retire aucun point.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2 + 3$	↗	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = \mathrm{e}^2$ admet :

   ❒ aucune solution ❒ une unique solution ❒ deux solutions

2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1,5)$ admet un coefficient directeur :

   ❒ strictement positif ❒ strictement négatif ❒ nul

3. $f[-\ln(2)]$ est égal à :

   ❒ $-2\ln(2) + 3$ ❒ $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ ❒ $-2\ln(2) + 1$

4. La courbe $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

   ❒ $y = 2x + 2$ ❒ $y = 2x + 1$ ❒ $x = 0$