Chapitre 6

Graphes pondérés

Sommaire

6.1 Définition

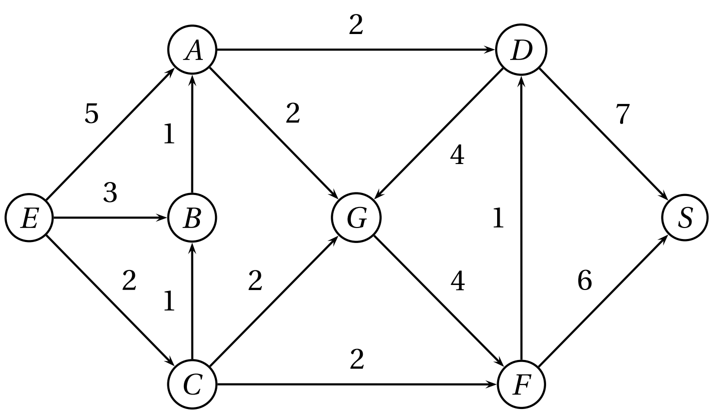
Définition 6.1. On appelle *graphe pondéré* un graphe tel que, à chaque arête a est associé un *poids* P_a.

Remarque. En Terminale nous nous limiterons aux graphes pondérés par des poids positifs.

Les applications des graphes pondérés sont nombreuses : cartes routières avec des indications de durée, de tarif ou de distance portée sur des routes entre deux lieux, par exemple.

6.2 Un problème

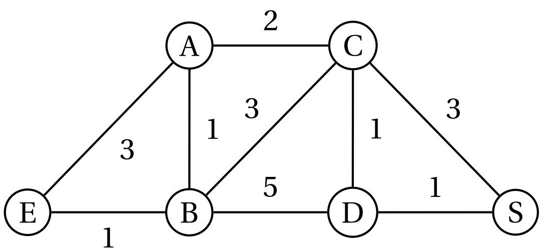
Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?



Remarque. Attention à la terminologie : la notion de longueur (plus court chemin) que nous utilisons ici n'est pas la même que celle que nous avons définie au premier chapitre (nombre d'arêtes qui composent un chaîne donnée) ; dans les termes du premier chapitre, $EAGF$, par exemple, est une chaîne orientée de longueur 3, alors qu'ici nous nous permettons de dire qu'elle est de longueur 11 $(5+2+4)$. Nous faisons cet abus de langage à cause de l'interprétation routière évidente de l'exercice ; dans la suite, on utilisera la terminologie exacte (plutôt *poids* que *longueur*), s'il y a un risque de confusion. Ainsi, selon la terminologie exacte, la chaîne $EAGF$ est une chaîne de *longueur* 3 (trois arêtes) mais de *poids* 11 (somme des poids des arêtes).

6.3 L'algorithme de DIJKSTRA

Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. Même pour un graphe aussi simple que celui-là, il n'est pas évident d'être sûr que l'on a trouvé le plus court chemin. La méthode la plus immédiate est de considèrer tous les chemins de A à S, et de chercher le plus court. Cette méthode est très inefficace : on peut bien sûr se limiter aux chemins sans cycle, donc de longueur bornée par le nombre de sommets, mais, même comme cela, le nombre de chemins possibles reste très grand. Voir la figure 6.1 page suivante représentant l'arbre pondéré de tous les chemins sans cycle menant de E à S.
Il nous faut donc obtenir une méthode plus efficace qui, si possible, donne systématiquement le bon résultat.
L'une d'elles est l'algorithme de DIJKSTRA.
Exemple



La figure 6.2 page 50 présente tous les chemins sans cycle allant de E à S. On pourra y suivre le fonctionnement de l'algorithme.
Initialisation : On affecte *provisoirement* le poids 0 à E et on attribue *provisoirement* à tous les sommets le poids $+\infty$.
Algorithme : Tant que tous les sommets ne sont pas marqués définitivement ou que le sommet S à atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer ***définitivement*** le poids d'un de ceux qui ont un poids minimum ; soit T ce sommet.
- parmi tous les sommets T' *non marqués définitivement* adjacents à T, si la somme s de T et de l'arête de T à T' est inférieure à leur poids provisoire les affecter de s (en indiquant entre parenthèse la provenance)

Le tableau 6.1 page 51 montre comment appliquer cet algorithme à notre exemple.
Pour retrouver le chemin le plus court, on se sert des sommets marqués : Sur S l'indication est qu'on provient de D, sur D qu'on provient de C, sur C qu'on provient de B et sur B qu'on provient de E.
La plus courte chaîne est donc $EBCDS$, elle mesure 6.

Remarque. On notera que l'algorithme fourni aussi la plus courte chaîne pour aller de E à n'importe lequel des sommets du graphe.

FIGURE 6.1: Chemins sans cycle menant de E à S du problème 6.2

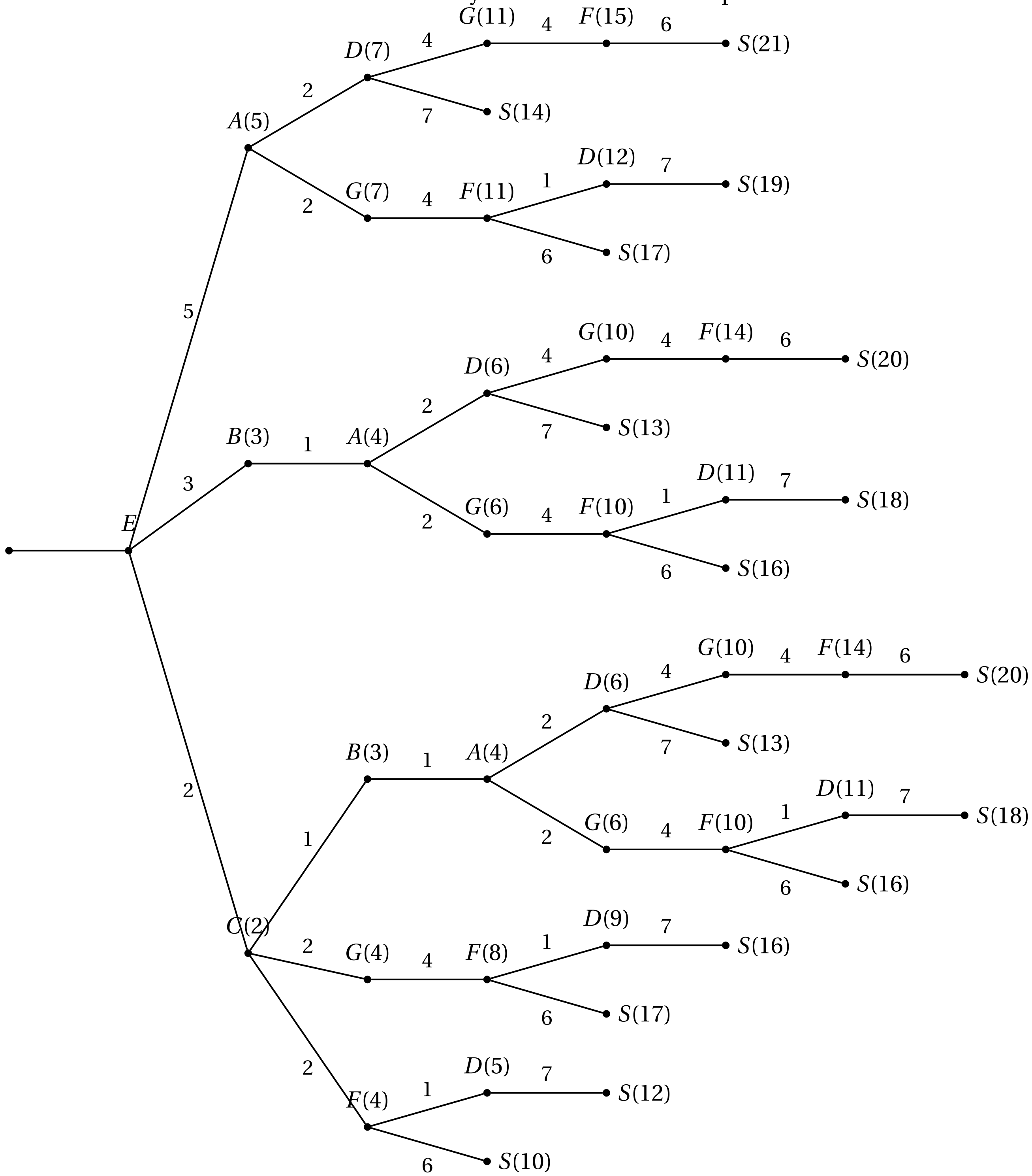


FIGURE 6.2: Chemins sans cycle allant de E à S de l'exemple

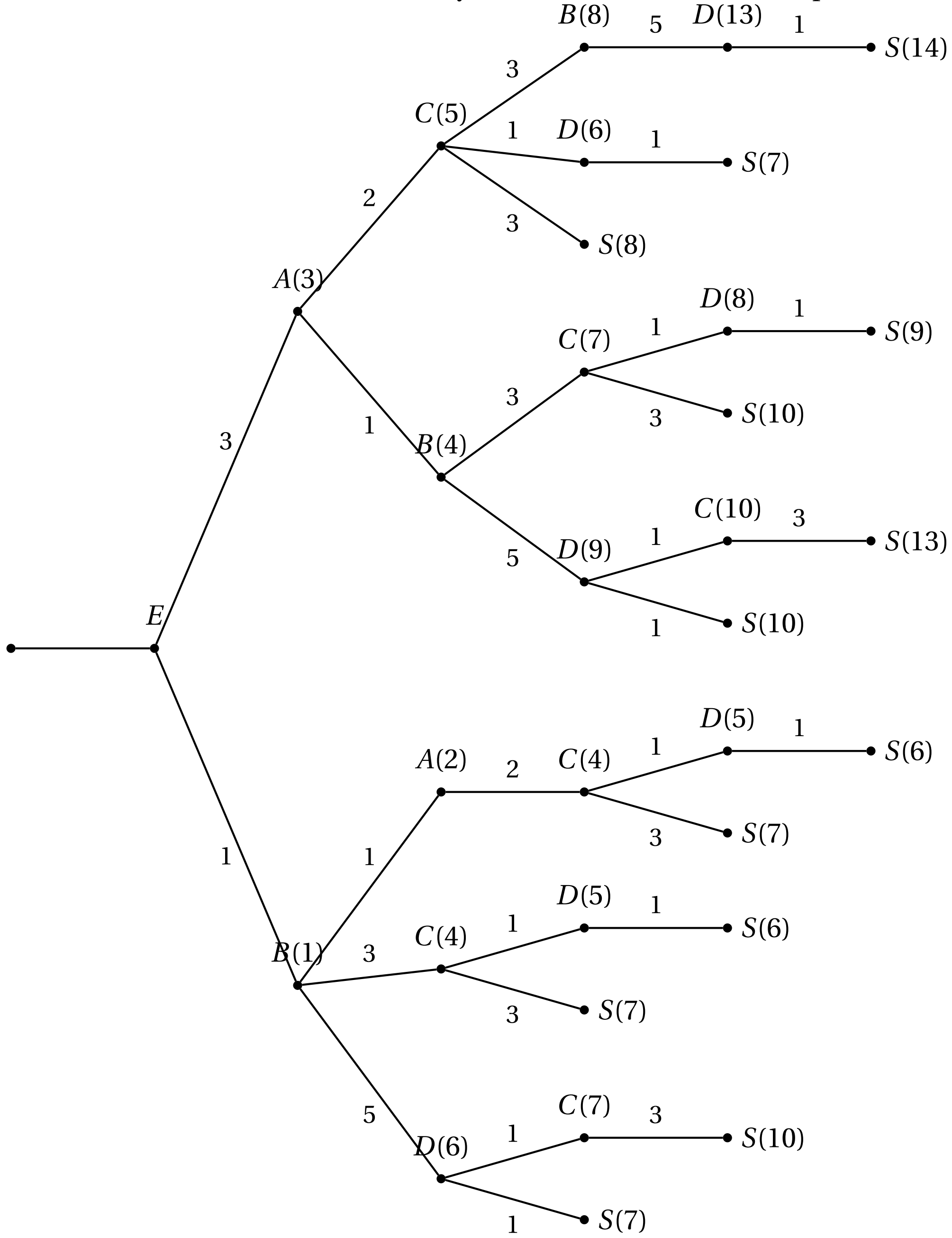
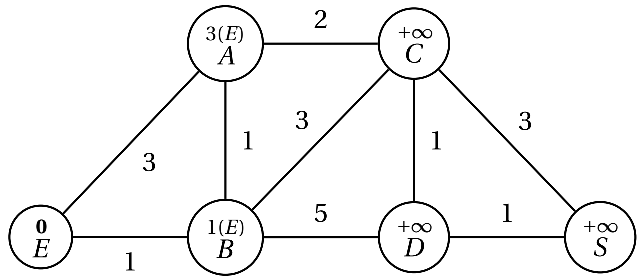


TABLE 6.1: Application de l'algorithme de DIJKSTRA

Étape 1 Aucun sommet n'est marqué définitivement. E est le seul marqué provisoirement. On marque donc définitivement son poids (0) et on affecte provisoirement A et B, adjacents à E de la somme de E (0) et du poids des arêtes menant de E à A et de E à B.

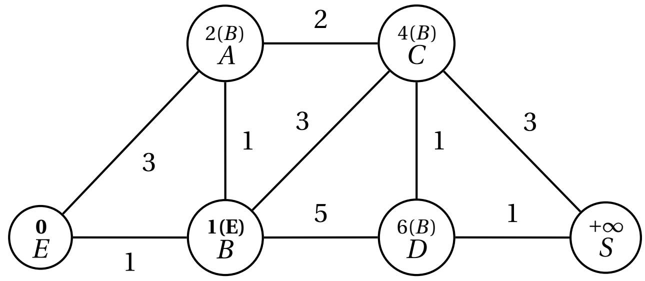
On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 2 B est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (1). On affecte les sommets adjacents à B des poids suivants :

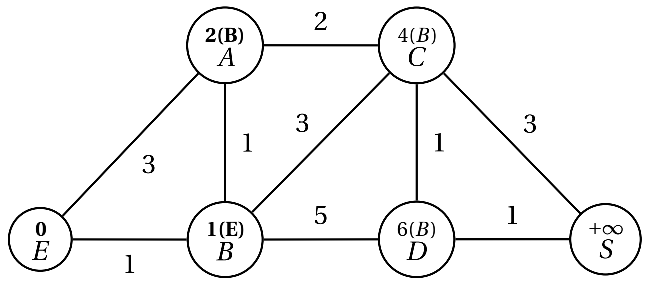
- $A = 2$ car $1(B) + 1$(arête BA)< 3 (poids provisoire de A)
- $C = 4$ $(1(B) + 3(BC))$
- $D = 6$ $(1(B) + 5(BD))$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 3 A est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (2). On ne change rien à C $2(A) + 2(AC) = 4$ (on pourrait aussi le changer car il y a égalité)

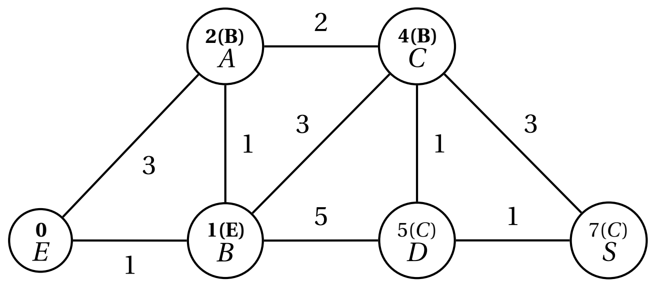
On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 4 C est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (4). On affecte

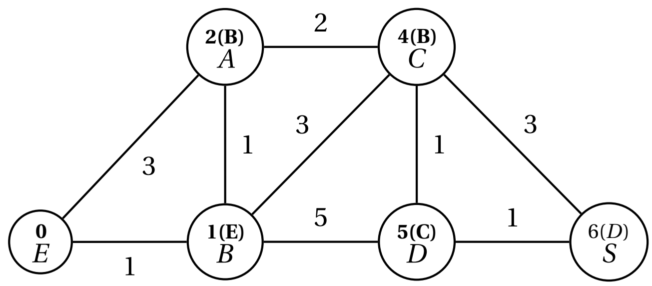
- D du poids provisoire 5 car $4(C) + 1(CD) < 6$
- S du poids provisoire 7 $(4(C) + 3(CS))$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



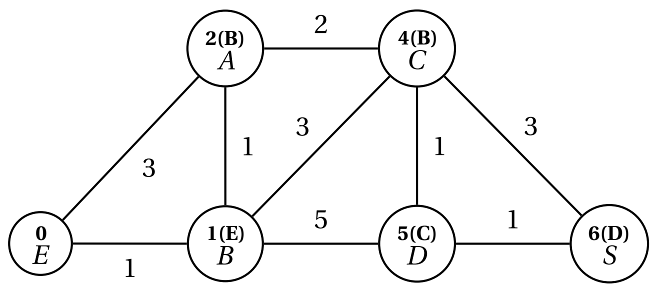
Étape 5 D est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (5). On affecte S du poids provisoire 6 car $5(D) + 1(DS) < 7$

On obtient le graphe marqué ci-contre.



Étape 6 S est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (6).

On obtient le graphe marqué ci-contre.



L'algorithme se présente aussi sous fo rme de tableau :

E	A	B	C	D	S
0	$3(E)$	$1(E)$	∞	∞	∞
	$2(B)$	$\mathbf{1}(E)$	$4(B)$	$6(B)$	
	$\mathbf{2}(B)$				
			$\mathbf{4}(B)$	$5(C)$	$7(C)$
				$\mathbf{5}(C)$	$6(D)$
					$\mathbf{6}(D)$

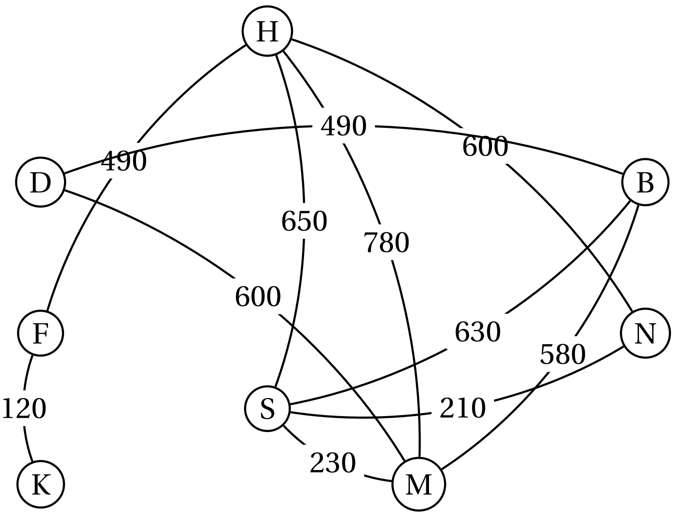
Théorème 6.1. *Soit G un graphe connexe, éventuellement orienté, l'algorithme de* DIJKSTRA *fournit systématiquement la plus courte chaîne d'un sommet initial à tous les autres sommets du graphe.*

On l'admettra.

EXERCICE.
Résoudre le problème d'introduction à l'aide de l'algorithme de DIJKSTRA.

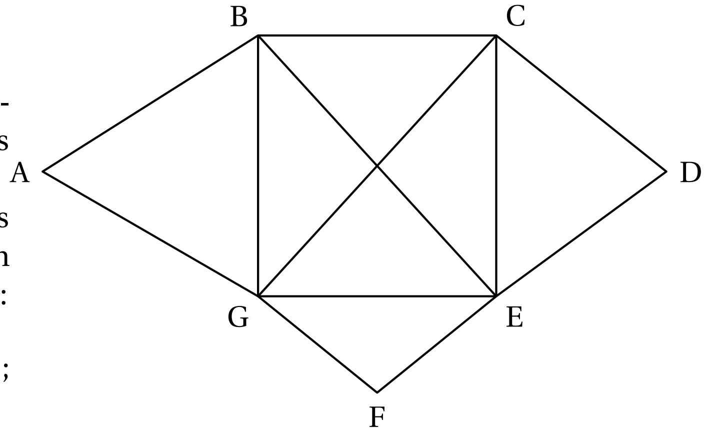
6.4 Exercices d'annales

EXERCICE 6.1 (D'après Amérique du Sud novembre 2006)**.**
À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe donné sur la figure ci-contre. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.
Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmnd, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.



EXERCICE 6.2 (France, juin 2004).

Le graphe de la figure ci-contre indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

- AB : 16 minutes ;
- AG : 12 minutes ;
- BC : 8 minutes ;
- BE : 12 minutes ;
- BG : 8 minutes ;
- CD : 7 minutes ;
- CE : 4 minutes ;
- CG : 10 minutes ;
- DE : 2 minutes ;
- EF : 8 minutes ;
- EG : 15 minutes ;
- FG : 8 minutes.

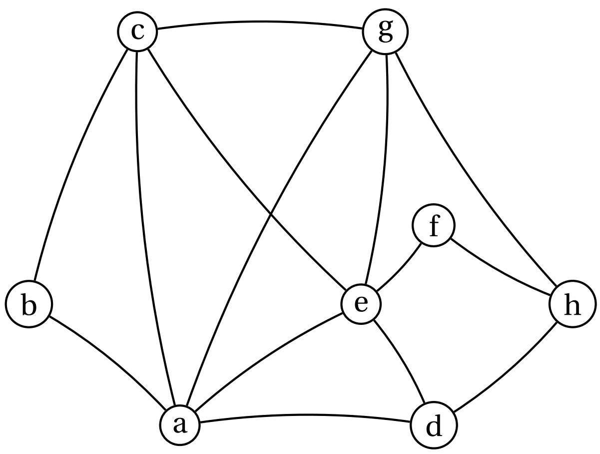
Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.
   En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

EXERCICE 6.3 (La Réunion, juin 2004).

Partie A

On note G le graphe représenté sur la figure ci-dessous :



On note M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est donnée :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

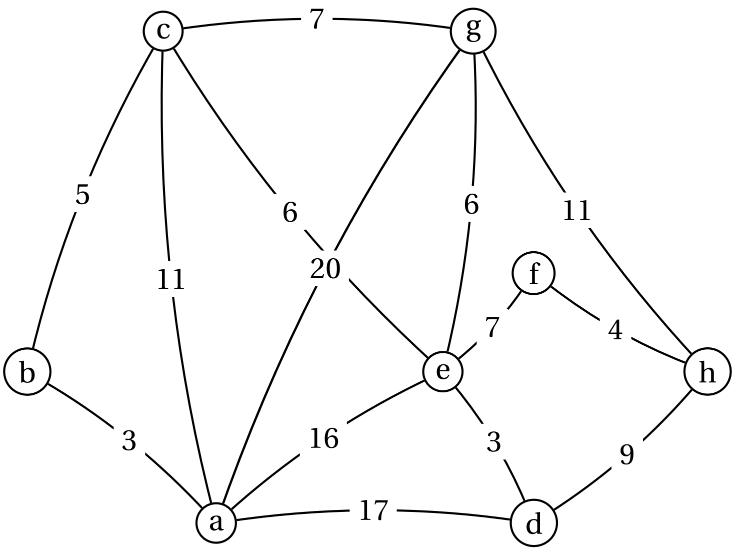
Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
4. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
5. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

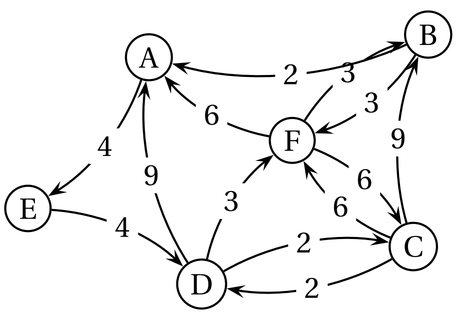
Le graphe de la figure ci-dessous représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).

Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.



EXERCICE 6.4 (Centres étrangers juin 2003)**.**

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G de la figure ci-dessous.



1. Donner la matrice M associée au graphe G en classant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

(a) Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

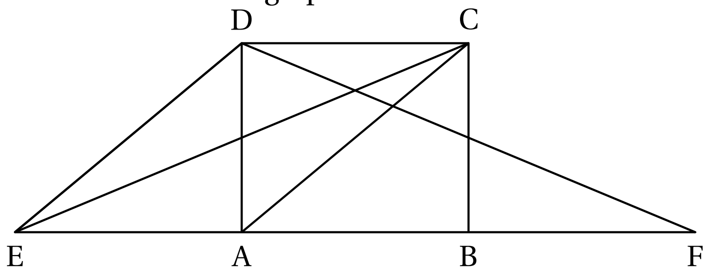
(b) Citer ces chemins.

(c) Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

(d) Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

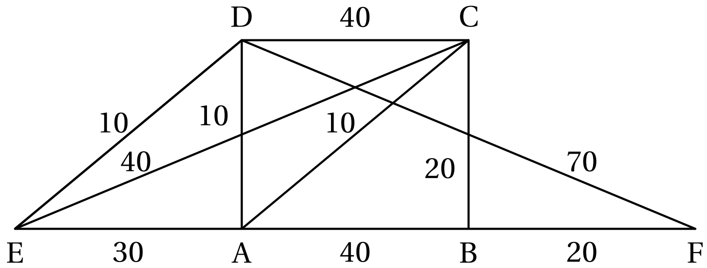
EXERCICE 6.5 (La Réunion, juin 2003).
Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

   (b) Le graphe est connexe. Pourquoi ?
2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.
   (a) Démontrer que son souhait est réalisable.
   (b) Donner un exemple d'un tel parcours.
3. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur E. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra débourser une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.



(AB = 40 ; AC = 1O ; AD = 1O ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)
Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.