Chapitre 8

$\ln(u)$ et $\exp(u)$

Sommaire

8.1 $\ln(u)$

Propriété 8.1. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u > 0$. Alors :*

- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
- *u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations*

Preuve. • On sait que $(v \circ u)' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = \ln(x)$, il vient $(\ln(u))' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$.
• Comme $u > 0$, $(\ln(u))'$ est du signe de u', donc u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

$\diamondsuit$

Propriété 8.2. *Une primitive d'une fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f = \frac{u'}{u}$ où $u > 0$ est $F = \ln(u)$.*

Preuve. Cela découle de la propriété précédente. $\diamondsuit$

8.2 $\exp(u)$

Théorème 8.3. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *La fonction définie par e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.*
- *Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $u'e^u$ admet une primitive de la forme $e^u + k$ où k est un réel quelconque.*

Preuve. • On sait que $(v(u))' = u' \times v'(u)$. En posant $v(x) = e^x$, on a $v'(x) = e^x$ et donc $(e^u)' = u'e^u$.
• $(e^u + k)' = u'e^u$

$\diamondsuit$

On a la conséquence suivante :

Propriété 8.4. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction définie par e^u a les mêmes variations que u.*

Preuve. On sait que la dérivée de e^u est $u'e^u$ et que $e^u > 0$ donc le signe de $u'e^u$ est le même que celui de u'.
e^u a donc les mêmes variations que u. $\diamondsuit$

8.3 Exercices

8.3.1 Technique

EXERCICE 8.1.
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sur quel intervalle elle est définie puis calculer sa dérivée :

1. $f(x) = \ln(x+3)$
2. $f(x) = \ln(x) + 3$
3. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
4. $f(x) = x + \ln\left(x^2\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = x\ln(x)$
7. $f(x) = \ln(x) + \ln(x+1)$
8. $f(x) = \ln[x(x+1)]$
9. $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

EXERCICE 8.2.
Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
Calculer, de deux façons différentes, la dérivée de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 8.3.
Soit f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{(x+1)^3}\right)$.
Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f.

EXERCICE 8.4.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f.

1. $f(x) = \frac{2}{2x-3}$ sur $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.
2. $f(x) = \frac{1}{3x-5}$ sur $\left]\frac{5}{3}\,;+\infty\right[$.
3. $f(x) = \frac{5}{5-x}$ sur $]-\infty\,;5[$.
4. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.
5. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
6. $f(x) = 1 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

EXERCICE 8.5.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x}{(x+1)^2}$ pour $x > -1$.

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c et d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$
2. En déduire l'expression de la primitive de f qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE 8.6.
1. Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 8.7.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$
3. $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
5. $f(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x$
6. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$
7. $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x) + 1$
9. $f(x) = \frac{2}{8+\mathrm{e}^{-x}}$

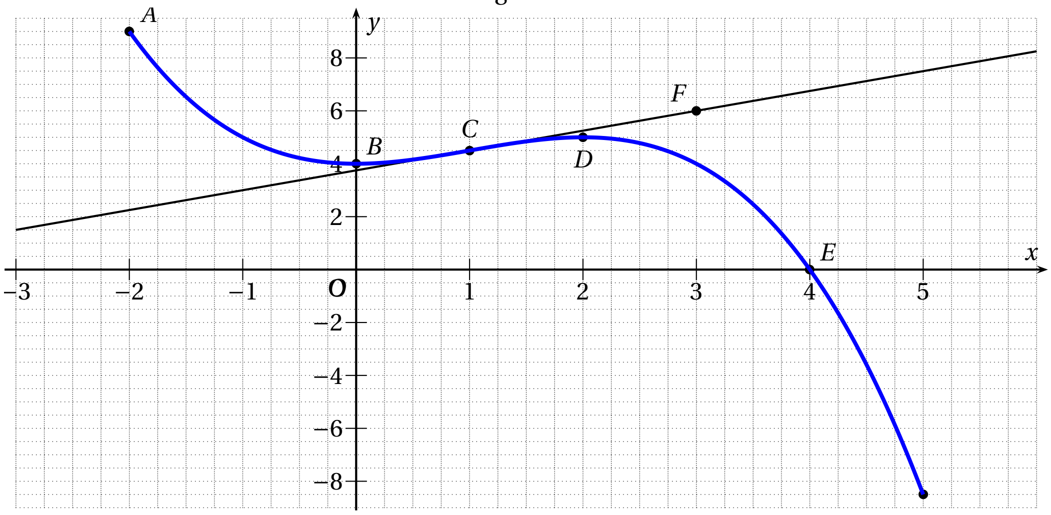
EXERCICE 8.8.
Déterminer une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$
5. $f(x) = x\mathrm{e}^{(x^2)}$

8.3.2 Lectures graphiques

EXERCICE 8.9 (France – Juin 2 009)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[2;5]$ et croissante sur l'intervalle $[0;2]$. On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2;5]$.
La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée sur la figure 8.1 de la présente page dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2;9)$, $B(0;4)$, $C(1;4{,}5)$, $D(2;5)$ et $E(4;0)$.
En chacun des points B et D, la tangente à la courbe Γ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3;6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe Γ au point C.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.9

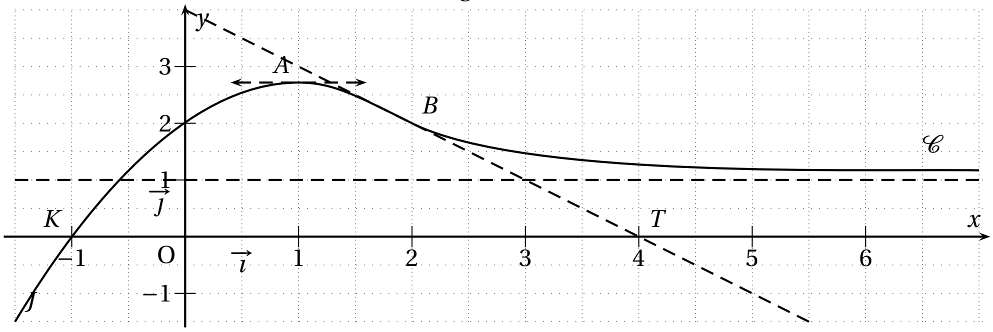


1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $[-2;4[$.
   (b) Calculer $g(-2)$, $g(0)$ et $g(2)$.
   (c) Préciser, en le justifiant, le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-2;4[$.
   (d) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4.
   Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.
   (e) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

EXERCICE 8.10.
Sur la figure 8.2 page suivante, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $]-2;+\infty[$.
- Les points $J\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $K(-1;0)$, $A(1;\mathrm{e})$ et $B(2;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La droite d'équation $x=-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en -2.
- La fonction f est strictement croissante sur $]-2;1[$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

1. (a) Donner les valeurs de $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x)=\exp[f(x)]$ et Γ sa représentation graphique.
   (a) Déterminer l'intervalle I de définition de g. Calculer les limites de g aux bornes de I.
   En déduire les asymptotes à la courbe Γ en précisant une équation pour chacune d'elles.
   (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de g.
   (c) Déterminer $g(2)$ et $g'(2)$, puis une équation de la tangente à Γ au point B$'$ d'abscisse 2.

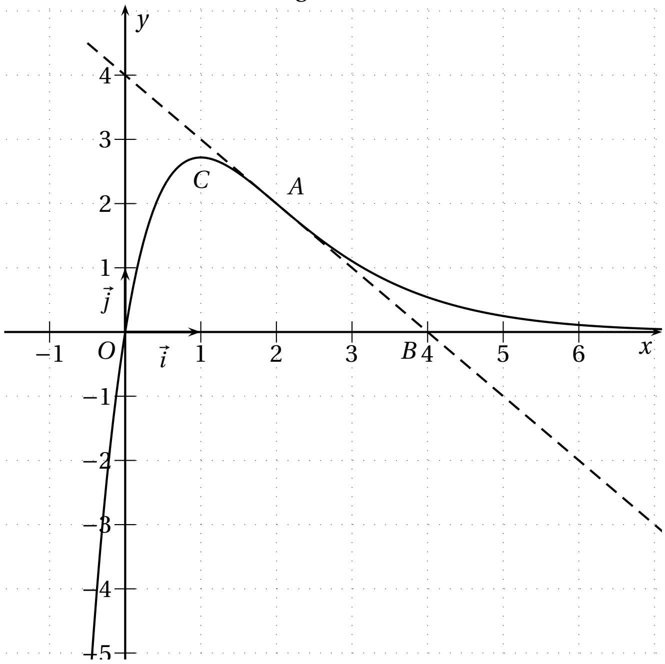
FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.10



EXERCICE 8.11.
On a représenté sur la figure 8.3 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ.
La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

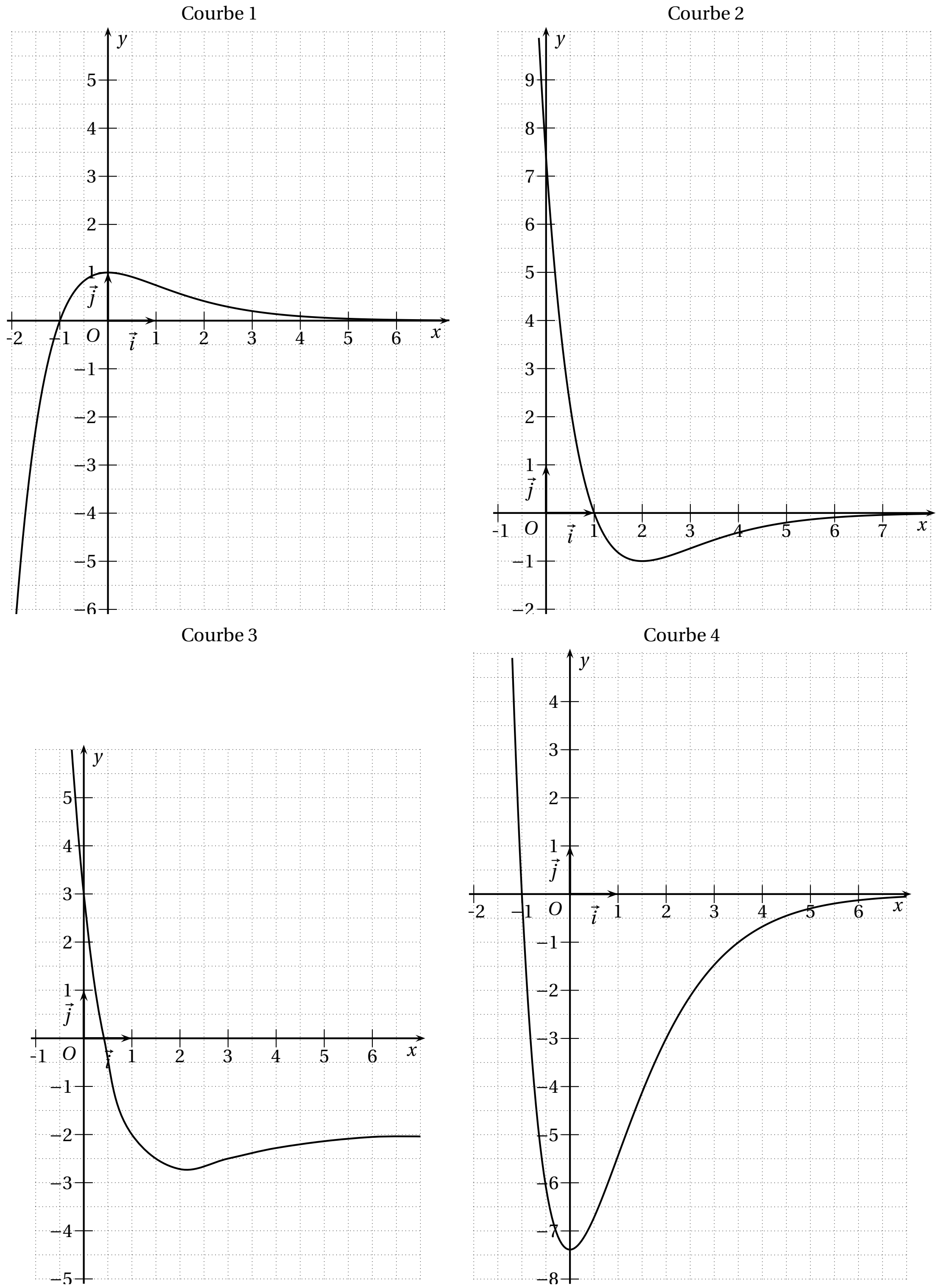
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques présentées sur la figure 8.4 page suivante, représente la fonction dérivée g' de g et une autre représente une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer la courbe associée à la fonction g' et celle associée à G ; vous justifierez votre choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.11



3. On suppose que la fonction g est la forme : $g(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx+c}$, où a, b et c sont des nombres réels.
   (a) Démontrer que $a = 0$ et que $c = -2b$.
   (b) Déterminer $g'(x)$ en fonction de b et de x.
   (c) Calculer alors les valeurs de b et de c.
4. Démontrer que la fonction G définie par $G(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{2-x}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer l'aire K, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

FIGURE 8.4 – Courbes de l'exercice 8.11



EXERCICE 8.12 (Polynésie 2 006)**.**
On sait que la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction numérique f définie sur $]-2\,;+\infty[$, passe par les points $\text{O}(0\,;0)$ et $\text{A}(-1\,;0)$, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = x+1$.

1. (a) À l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, de $f'(0)$, de $f(-1)$ et de $f'(-1)$.
   (b) Donner une équation de la tangente en O à $\mathscr{C}_f$.
2. Nous savons qu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $x > -2$: $f(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\ln(x+2)$.
   (a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a, b et c.
   (b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a, b et c.
   (c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a, b et c.
   (d) En déduire les valeurs de a, b et c.

8.3.3 Tableau de variations

EXERCICE 8.13 (D'après Nouvelle Calédonie 2 006)**.**
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$

x	-3			-2		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-\infty$	↗	0	↗	2

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln[g(x)]$.
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.
2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3\,;+\infty[$ qui est telle que : $G(-2) = 0$.
   Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

EXERCICE 8.14 (Amérique du Nord 2 007)**.**
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Première partie

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+b)$, où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Deuxième partie

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = -x^2+2x-\ln(2x+1)$.
On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée. Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

1. Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

8.3.4 Études de fonctions du type $\ln(u)$

EXERCICE 8.15 (France 2 007)**.**
Un laboratoire pharmaceutique produit et commercialise un médicament en poudre. Sa production hebdomadaire, exprimée en kilogrammes, est limitée à 10 kilogrammes.

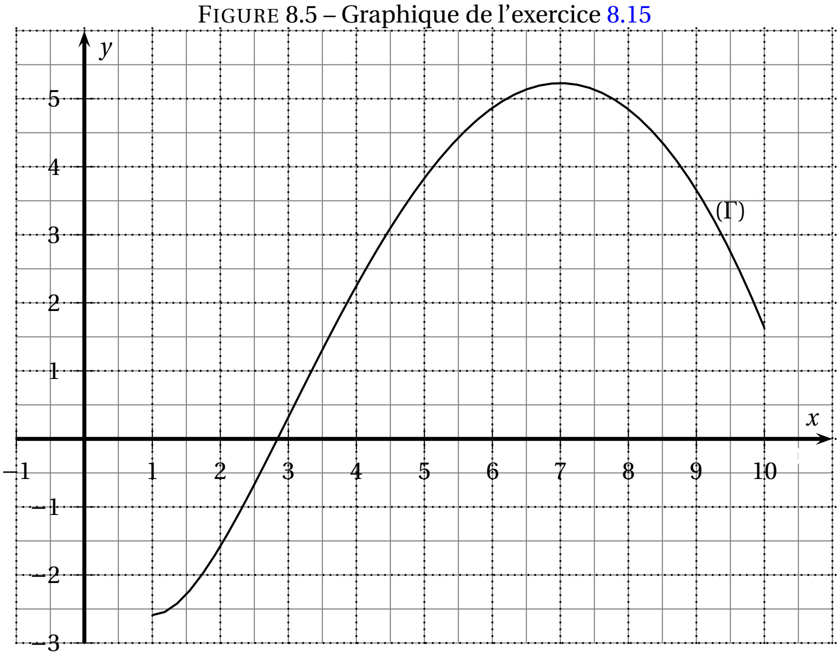
Partie I : Étude des coûts hebdomadaires de production

1. Le coût marginal de production est fonction de la quantité x de médicament produit. Une étude a montré que, pour cette entreprise, l'évolution du coût marginal de production est modélisée par la fonction C_m définie pour les nombres réels x de l'intervalle $[0\,;10]$ par : $C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}$. ($C_m(x)$ est exprimé en centaines d'euros, x en kilogrammes).
   Étudier les variations de la fonction C_m, puis dresser le tableau de variations de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$.
2. En économie, le coût marginal de production correspond à la dérivée du coût total de production. Ainsi le coût total de production hebdomadaire est modélisé par une primitive de la fonction C_m.
   Déterminer la fonction C, primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[0\,;10]$ qui modélise ce coût total, pour une production de médicaments comprise entre 0 et 10 kilogrammes, sachant que $C(0) = 0$.

Partie II : Étude du bénéfice hebdomadaire

On admet que le laboratoire produit une quantité hebdomadaire d'au moins 1 kg et que tout ce qui est produit est vendu. Le bénéfice hebdomadaire (exprimé en centaines d'euros) dépend de la masse x (exprimée en kilogrammes) de médicament produit. Il peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par : $B(x) = 9x - 0,5x^2 - 16\ln(x+1)$.
La représentation graphique de la fonction B dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe (Γ) donnée par la figure 8.5 de la présente page.

FIGURE 8.5 – Graphique de l'exercice 8.15



1. (a) On admet que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;7]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[7\,;10]$.
   En déduire la quantité de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour que son bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) soit maximal.
   (b) Calculer ce bénéfice hebdomadaire maximal en centaines d'euros (arrondir à l'euro).
2. (a) Utiliser la courbe (Γ) pour déterminer un encadrement d'amplitude 0,5 de la plus petite quantité x_0 de médicaments que l'entreprise doit produire par semaine pour ne pas perdre d'argent.
   (b) Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur décimale de x_0 approchée au centième.

EXERCICE 8.16 (Pondichery – 2006).

Partie 1

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;9]$ par $f(x) = \frac{10}{1+x} - 1$ et $g(x) = \frac{x}{2}$.

1. Résoudre algébriquement l'équation : $f(x) = g(x)$.
2. Calculer l'intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_3^9 f(x)\,\mathrm{d}x$; on donnera la valeur exacte de I.

Partie 2

Un produit conditionné en boite est mis sur le marché. On désigne par x le prix d'une boîte de ce produit en dizaines d'euros.

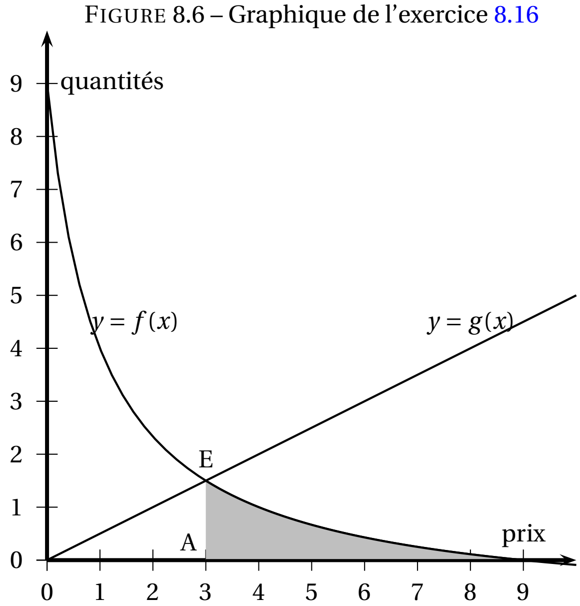
On admet que la quantité achetée par les consommateurs, en fonction du prix x appliqué sur le marché, est donnée par $f(x)$ en centaines de boîtes.

On admet que la quantité proposée sur le marché par les producteurs, en fonction du prix de vente x auquel les producteurs sont disposés à vendre, est donnée par $g(x)$ en centaines de boîtes.

Sur le graphique de la figure 8.6, de la présente page, sont tracées dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. On pourra utiliser le graphique pour conjecturer les réponses aux questions suivantes, puis on les justifiera algébriquement.
   (a) Combien de boîtes seront achetées par les consommateurs si le prix de vente est de 40 euros la boite ?
   (b) Lorsque l'offre est égale à la demande, le marché a atteint son équilibre. Donner le prix d'équilibre, en euros, et le nombre de boîtes correspondant.
2. (a) D'après le graphique, les producteurs étaient disposés à vendre les boîtes à un prix inférieur au prix d'équilibre. On appelle surplus des producteurs le gain réalisé en vendant les boîtes au prix d'équilibre. Ce gain est donné en milliers d'euros par l'aire du triangle OAE (1 unité d'aire = 1 millier d'euros). Calculer ce surplus en euros.
   (b) Le surplus des consommateurs est l'économie réalisée par les consommateurs qui étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre. Ce surplus est donné, en milliers d'euros, par l'aire de la partie grisée du plan sur le graphique ($3 \leqslant x \leqslant 9$). Préciser quelle intégrale permet de calculer ce surplus et en donner l'arrondi à l'euro.

FIGURE 8.6 – Graphique de l'exercice 8.16



EXERCICE 8.17 (Centres étrangers – Juin 2 009)**.**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5\text{e}^x}{\text{e}^x + 1}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 0$.
Dans le repère orthonormal d'unité 2 cm de la figure 8.7 de la présente page, la courbe $\mathscr{C}_f$ tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $\text{A}\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

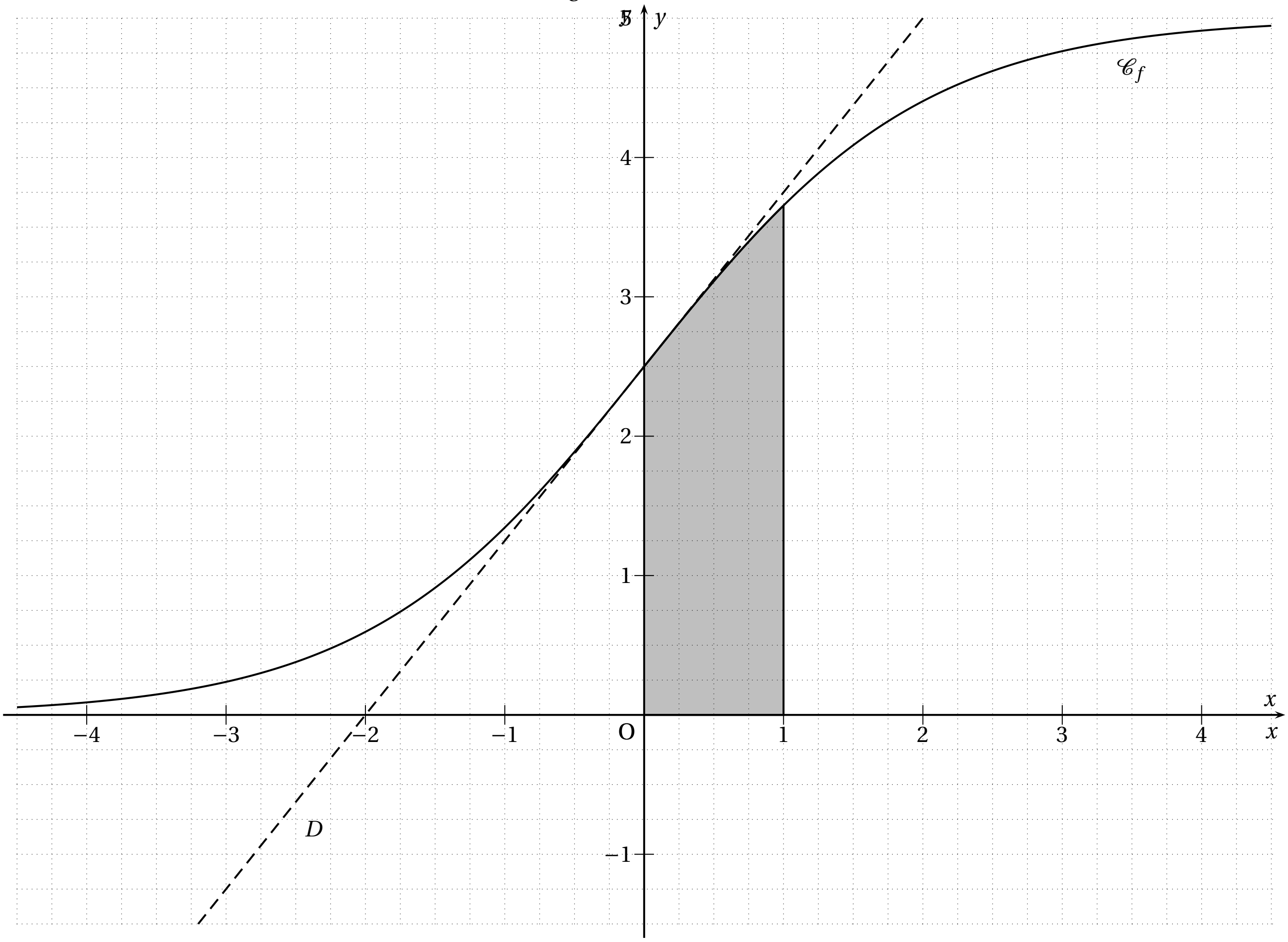
Première partie

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y = 5$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{5\text{e}^x}{(\text{e}^x+1)^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. En utilisant le résultat de la question 2., déterminer une équation de la droite D.

Deuxième partie

1. Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.
2. Vérifier que $F(1) = 5\ln\left(\frac{\text{e}+1}{2}\right)$.
3. Sur la figure 8.7 de la présente page, le domaine grisé est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer l'aire, en unités d'aire puis en cm^2, de ce domaine et en donner une valeur approchée arrondie au dixième.

FIGURE 8.7 – Figure de l'exercice 8.17



8.3.5 Études de fonctions du type e^u

EXERCICE 8.18 (France métropolitaine, Réunion – Septembre 2 009)**.**
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right) e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) En remarquant que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \left(-x^2 + 3x - 2\right) e^{-x}$.
   (b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.
3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 0.
4. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
   Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0; 8]$ dans le plan.
5. (a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0; 8]$ de l'équation $f(x) = 0,4$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie au centième de la plus grande des solutions de l'équation considérée à la question 5. a.

EXERCICE 8.19 (Polynésie – Septembre 2 007)**.**
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0; +\infty[$ et on note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathscr{C})$ passe par le point $E(0; 1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale.
   En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

1. (a) Vérifier que pour tout x de $[0; +\infty[$, $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (c) En déduire que $(\mathscr{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0; 4]$.
   (b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = -(x + 2)e^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.
   Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0; 4]$.
Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q + 1)e^{-q}$.

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4 000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?

Exercice 8.20 (Métropole – La Réunion – Septembre 2007).
La courbe $(\mathscr{C})$ donnée sur la figure 8.8 de la présente page, est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur R. On note f' sa fonction dérivée. Les points $A(3; \mathrm{e})$ et $B(4; 2)$ appartiennent à cette courbe. La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente (T) à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

Partie I : Lectures graphiques

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3; 10]$ a-t-on $f(x) \leqslant 2$?
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$.

Partie II : Étude de la fonction

La fonction f représentée sur la figure 8.8, est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.

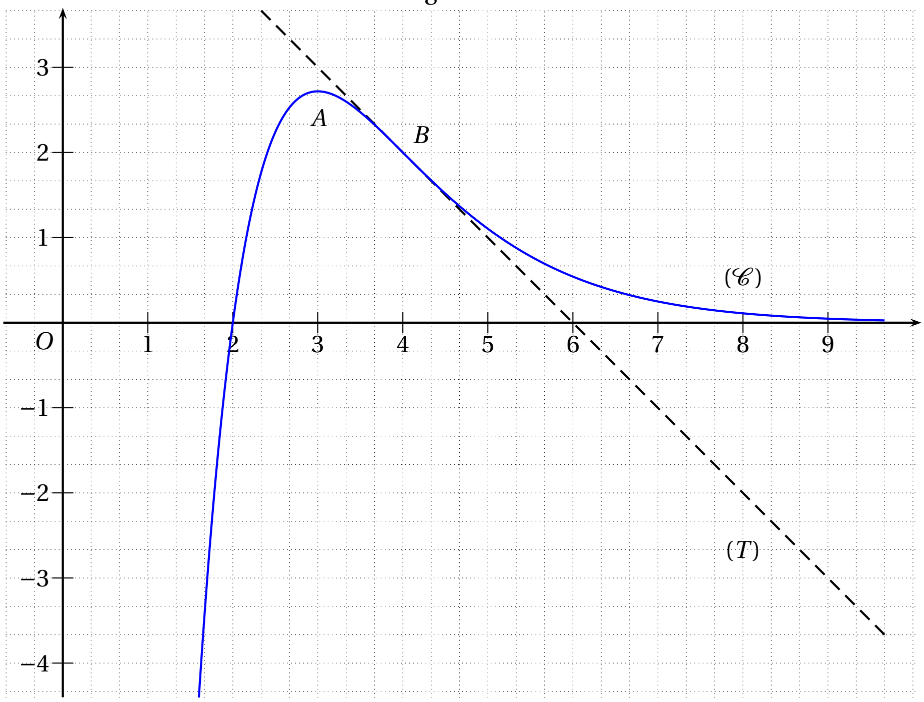
1. (a) Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.
   (b) On donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
2. (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$.
   (b) Sur l'intervalle $[0; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2; 10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millième.
   Rappel : Soit f une fonction et $[a; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
   La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a; b]$ est le nombre m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a} \times \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie III : Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour $1,8 \leqslant x \leqslant 4,5$.
Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8; 4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).
2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).
3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

Figure 8.8 – Figure de l'exercice 8.20



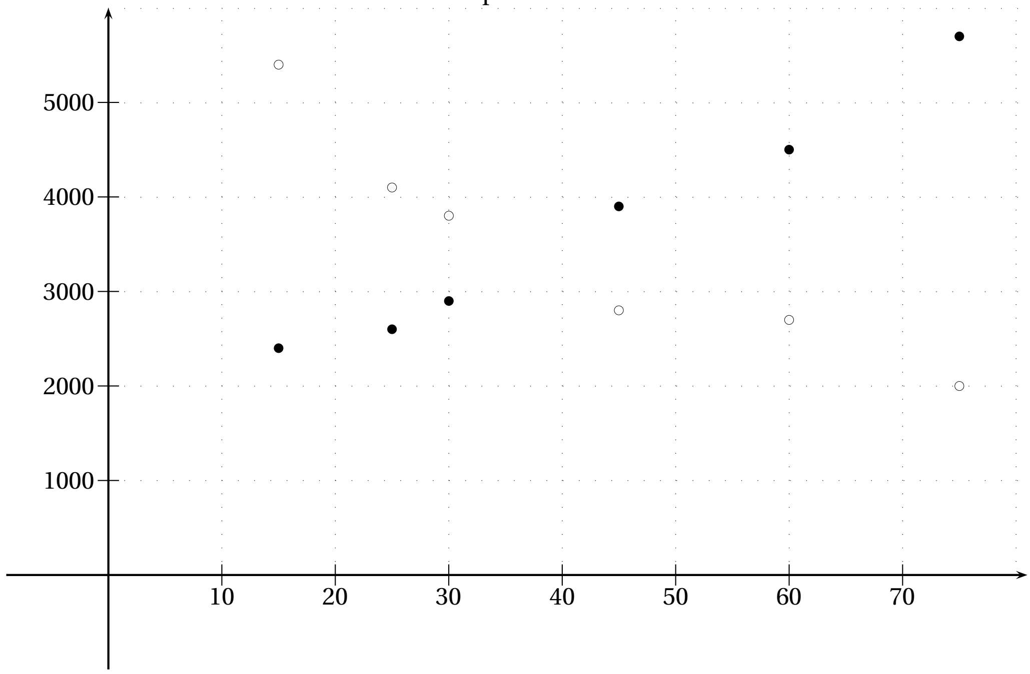
8.3.6 Ajustements non affines

EXERCICE 8.21.
Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse sur une année 22 000 livres dont les prix varient de 15 à 75 €. On désigne par x le prix d'un livre, par p le nombre de livres disponibles et par q le nombre de livres demandés. Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
q	5 400	4 100	3 800	2 800	2 700	2 000

On a tracé sur la figure 8.9 de la présente page les nuages de points $(x_i\,;\,p_i)$ et $(x_i\,;\,q_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

FIGURE 8.9 – Repère de l'exercice 8.21



1. On pose $y = \ln p$.
   (a) Recopier et compléter le tableau (les résultats seront arrondis au millième) :

x	15	25	30	45	60	75
p	2 400	2 600	2 900	3 900	4 500	5 700
$\ln p$						

   (b) *Dans cette question, le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.*
   À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au centième*).
   En déduire une expression de p en fonction de x.

   (c) En utilisant cette expression, donner une estimation du nombre de livre disponibles pour un prix unitaire de 40 € (*résultat arrondi à la centaine*).

2. On pose $z = \ln q$ et on admet l'égalité suivante : $z = -0,02x + 8,73$.
   En utilisant cette relation, donner une estimation du prix correspondant à une demande de 2 800 livres (*résultat arrondi à l'unité*).

3. Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre ; il est noté x_0.
   (a) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre, arrondi à l'unité.
   (b) Les calculs précédents permettaient-ils de prévoir le résultat ?

EXERCICE 8.22 (Centres étrangers – Juin 2 009).
Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$de la figure 8.10 page suivante. Les unités graphiques de ce repère sont 1 unité = 1 cm en abscisse et 4 unités = 1,5 cm en ordonnée.
Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

Première partie
En première approximation, on envisage de représenter y en tant que fonction affine de x.
La droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés admet pour équation $y = -1,5x + 16,5$ dans laquelle les deux coefficients sont des valeurs arrondies au dixième.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point dans le repère de la figure 8.10 page suivante.
2. Tracer la droite D dans le repère de la figure 8.10 page suivante.
3. En considérant cet ajustement affine, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Deuxième partie
On admet que la courbe tracée sur la figure 8.10 page suivante représente un ajustement exponentiel de y en fonction de x et que son équation est de la forme $y = k\mathrm{e}^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1. En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013.
2. En supposant que la courbe passe par les points A(0 ; 18) et B(3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

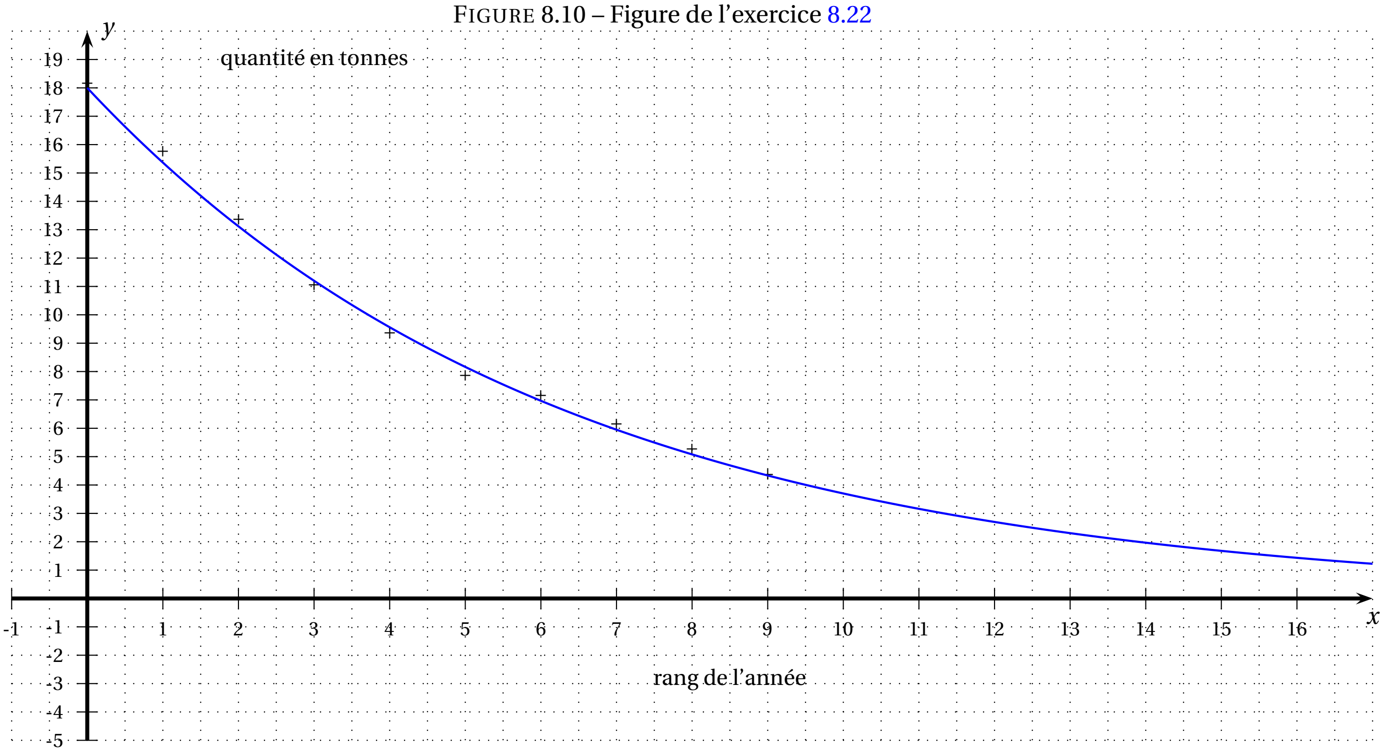
Troisième partie
On effectue le changement de variable $z = \ln y$ et on pose $z_i = \ln y_i$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant une valeur approchée de chaque résultat arrondie au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i										

2. À l'aide de la calculatrice et en donnant une valeur approchée de chaque coefficient arrondie au centième, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\mathrm{e}^{px}$ et retrouver ainsi, en arrondissant k au dixième, les coefficients k et p calculés à la question 2. de la deuxième partie.

FIGURE 8.10 – Figure de l'exercice 8.22



EXERCICE 8.23 (Polynésie – Juin 2009).

Le tableau suivant donne l'évolution du marché des capteurs solaires installés en France métropolitaine entre 2000 et 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
Surface de capteurs solaires installés en milliers de m^2 : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	6	18	23	39	52	121	220	253

Source : ENERPLAN (*Association professionnelle de l'énergie solaire*)

L'objectif gouvernemental est d'atteindre un marché d'un million de m^2 en 2010.

1. (a) Calculer le pourcentage d'augmentation de la surface des capteurs solaires installés entre les années 2006 et 2007.

   (b) Si ce pourcentage reste le même d'année en année jusqu'en 2010. l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

2. (a) Sur une feuille de papier milimétré, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$; $1 \leqslant i \leqslant 8$, dans un repère orthogonal du plan (on prendra 2 cm pour une année eu abscisse et en ordonnée 1 cm pour 20 milliers de m^2 de capteurs solaires installés).

   La forme du nuage suggère de faire un ajustement exponentiel.

   Pour cela on pose $z_i = \ln(y_i)$.

   (b) Après l'avoir recopié, compléter le tableau suivant où les valeurs z_i seront arrondies au centième.

Rang de l'année : x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 8$	1,79							

   (c) En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. Les coefficients seront arrondis au centième.

   (d) On suppose que l'évolution se poursuit de cette façon jusqu'en 2010.

   À l'aide de cet ajustement exponentiel, estimer en m^2 la surface de capteurs solaires installés en 2010.

   Si l'évolution se poursuit selon ce modèle, l'objectif gouvernemental sera-t-il atteint ?

EXERCICE 8.24 (Antilles – Guyane – 2008)**.**
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

Partie A : un ajustement affine.

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent *(aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis à l'unité)*.
3. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007.

Partie B : un ajustement exponentiel.
On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés *(aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millième)*.
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année.
4. En prenant l'approximation $y \approx 57,1\mathrm{e}^{0,224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007.

Partie C : comparaison des ajustements.
En 2007, il y a eu 280 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ?
Justifier la réponse.
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

8.3.7 Repère semi-logarithmique

EXERCICE 8.25.
On considère deux fonctions f et g croissantes données par les tableaux de valeurs :

x	0	2,7	4	5,4	7,4	9,1
$f(x)$	1	3	5	9	20	40

x	0	2,2	2,8	3,1	4,5	7
$g(x)$	1	5	8	10	20	50

1. Représenter les fonctions f et g dans le repère de la figure 8.11 page ci-contre.
2. Le repère de la figure 8.12 page suivante est appelé repère semi-logarithmique.
La graduation sur l'axe (Oy) n'est pas « régulière ». Elle est réalisée proportionnellement au logarithme népérien. Par exemple un point d'ordonnée $y = 1$ est placé à la hauteur $z = \ln 1 = 0$ unités graphiques, un point d'ordonnée $y = 10$ est placé à la hauteur $z = \ln 10 \approx 2,3$ unités graphiques (et ici 1 unité graphique = 2 cm).
Remarque. Dans le cadre de cet exercice, pour une meilleure lecture des hauteurs en unités graphiques, un axe a été ajouté à droite.
Pour l'utilisation d'un tel repère on pourra s'aider du tableau suivant :

Point	A	B	...
x			...
y			...
$z = \ln y$			...

Où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique.
   (a) Placer dans ce repère les points suivants :
   - $A(2;1,5)$
   - $B(5;15)$
   - $C(5;19)$
   - $D(12;175)$

   (b) Déterminer les coordonnées des points E, F, G et H.
   Indication : on mesurera z avec une règle avant de déterminer y par le calcul.
   (c) Représenter les courbes de f et de g dans ce repère. Que remarque-t-on pour la courbe de f ?
   (d) Représenter dans les deux repères les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, respectivement, $h(x) = e^{2x}$ et $l(x) = e^{\frac{x}{3}}$. Que remarque-t-on ?
   (e) Une fonction k est représentée dans le repère semi-logarithmique une droite passant par les points $(0;1)$ et $(14;1000)$.
      i. Tracer cette droite.
      ii. À l'aide d'une règle compléter la ligne z du tableau ci-dessous et compléter par la ligne y par le calcul.

x	0	1	3	5	10
z					
$y = \ldots\ldots$					

      iii. Représenter alors k dans le premier repère.
   (f) Démontrer que lorsqu'une fonction positive est représenté dans un repère semi-logarithmique par une droite passant par l'origine, cette fonction est de la forme $f(x) = e^{kx}$.
   Indication : On posera $z = mx$, où z est la hauteur en unités graphiques dans le repère semi-logarithmique et on déterminera alors une expression de y en fonction de x.
   En utilisant l'égalité $f(4) = 5$ donner l'expression de $f(x)$.
   Déterminer l'expression de $k(x)$.
   (g) Démontrer que lorsqu'une fonction positive représentée dans un repère semi-logarithmique par une droite d'équation $z = mx + p$ où z est la hauteur en unités graphiques, cette fonction est de la forme $f(x) = Ke^{kx}$.
   Exprimer alors K et k en fonction de m et p.

FIGURE 8.11 – Premier repère de l'exercice 8.25

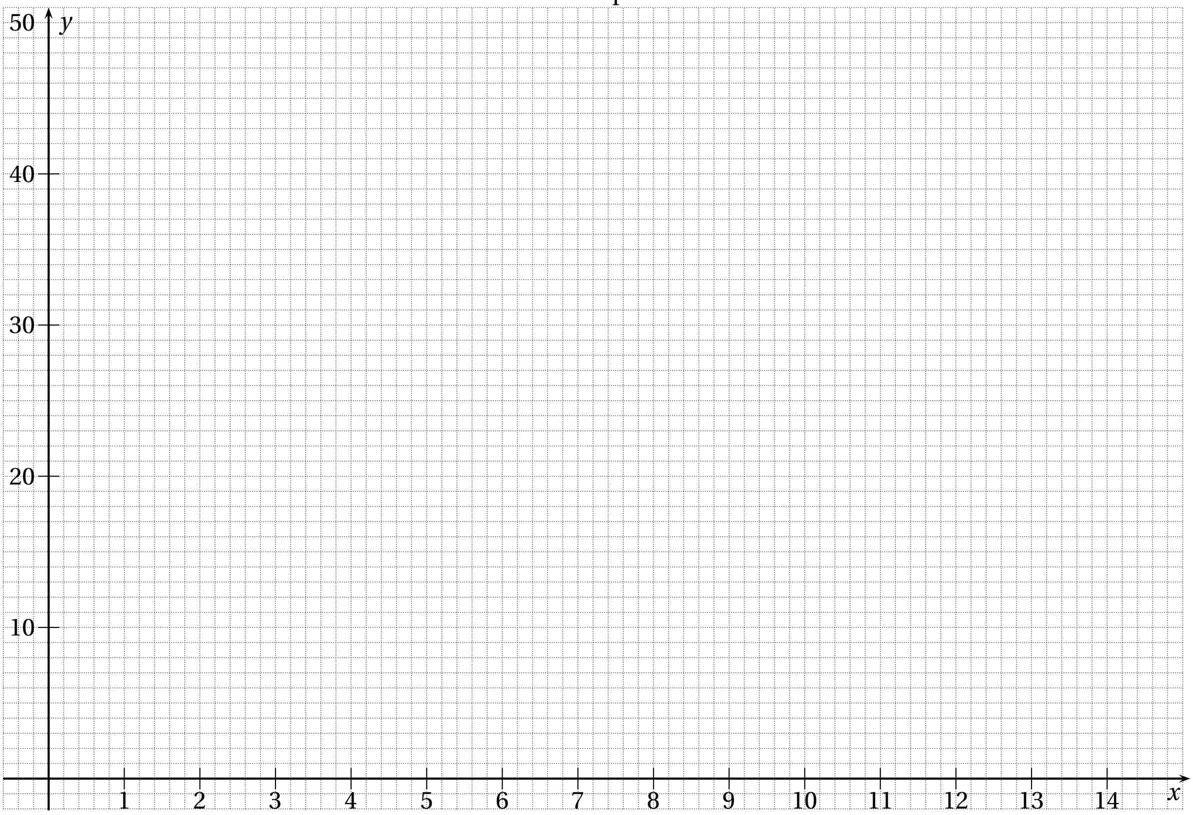


FIGURE 8.12 – Repère semi-logarithmique de l'exercice 8.25