Chapitre 10

Fonction carrée
Fonctions trinômes

Sommaire

10.1 Activités

ACTIVITÉ 10.1 (Fonction trinôme).
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés a, b et c pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,1 pour a et de 1 pour b et c puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

1. Donner à a la valeur 0. Qu'observe-t-on ?
   Pour toute la suite on prendra $a \neq 0$.
2. Donner à a la valeur 1 et à b et c la valeur 0.
   (a) De quelle nature est la courbe obtenue ?
   (b) Indiquer l'abscisse de son sommet et ses éléments de symétrie.
   (c) Donner l'expression de $f(x)$.
   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau des variations de f.
3. Donner à b et c la valeur 0 et faire varier a.
   (a) Quel semble être le « rôle » de a ?
   (b) Dans quel cas le tableau de variations de f est-il identique au précédent et dans quel cas est-il différent ?

4. Donner à a la valeur 1, à b la valeur 0 et faire varier c.
   (a) Quel semble être le « rôle » de c ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?
   (c) Démontrer par le calcul que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont les coordonnées ne dépendent que de c.
5. On notera x_0 l'abscisse du sommet de la courbe.
   (a) Donner à a la valeur 1, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (b) Donner à a la valeur 2, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (c) Donner à a la valeur $-0{,}5$, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (d) Faire varier c. Cela influence-t-il x_0 ?
   (e) Conjecturer l'expression de x_0 en fonction de a et b.
   Que peut-on dire des éléments de symétrie de la courbe dans tous les cas ?
6. Régler le curseur b pour que son incrément soit maintenant de 0,1.
   On admettra qu'un projectile lancé en l'air suit une trajectoire parfaitement parabolique.
   Un projectile est lancé depuis une colline depuis une altitude de 400 m symbolisée par le point $A(0;4)$. Il doit atteindre une cible située à 1 000 m à l'altitude 0, symbolisée par le point $B(10;0)$. Pour des raisons de sécurité, son altitude maximum ne doit pas dépasser 800 m.
   Déterminer des valeurs de a, b et c permettant d'obtenir une courbe symbolisant la trajectoire de ce projectile et satisfaisant toutes ces conditions.

ACTIVITÉ 10.2 (Forme canonique)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés m, n et p pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,5 puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = m*(x-n)^2 + p$.

1. (a) Dans la zone de saisie, créer la fonction $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
   (b) Déterminer les valeurs de m, n et p telles que la courbe de f et celle de g soient confondues.
   (c) Vérifier par le calcul que les deux fonctions sont bien égales.
   (d) Noter l'abscisse du sommet de la courbe.
   (e) Par le calcul, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   Comment cela se traduit-il graphiquement ?
2. Mêmes questions avec $g(x) = -1{,}5x^2 - 6x - 4{,}5$.

3. Mêmes questions avec $g(x) = -0,5x^2 - 2x - 1,5$.

4. (a) Conjecturer quelles doivent être les valeurs de m et de n.
   (b) **Par le calcul**, en utilisant la conjecture précédente, déterminer les valeurs de m, n et p pour que la fonction f soit égale à la fonction $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
   (c) Déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
   Vérifier si vos résultats coïncident avec la courbe de la fonction sur Geogebra.

10.2 Fonction carrée

Définition 10.1. On appelle *fonction carrée* la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est une *parabole* qui possède l'origine du repère comme *sommet* et l'axe des ordonnées comme *axe de symétrie*.

Propriété 10.1. *La fonction carrée est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty\,; 0]$ *et strictement croissante pour* $x \in [0\,; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Preuve. La preuve sera faite en classe. ♢

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 10.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $a^2 > b^2$.

10.3 Fonctions trinômes

Définition 10.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction trinôme*.

Sa courbe est une parabole admettant le point d'abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ comme sommet et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce sommet comme axe de symétrie, donc qu'équation $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.

Propriété 10.3. *Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On l'admettra.

Propriété 10.4. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Preuve. La preuve sera faite en classe. ◇

10.4 Exercices

10.4.1 Fonction carrée

EXERCICE 10.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour x^2 :

1. Si $x > 3$ alors ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ....
3. Si $x > 2$ alors ....
4. Si $x < -3$ alors ....
5. Si $x < 4$ alors ....
6. Si $x > -10$ alors ....
7. Si $x < 1$ alors ....
8. Si $x > -5$ alors ....

EXERCICE 10.2.

1. On pose : $-7 \leqslant x \leqslant 5$.
   Compléter :
   (a) Si $-7 \leqslant x \leqslant 0$ alors .... x^2 ....
   (b) Si $0 \leqslant x \leqslant 5$ alors .... x^2 ....
   (c) Donc si $-7 \leqslant x \leqslant 5$ alors
   .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
2. Compléter de la même manière :
   (a) Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$ alors ..... $\leqslant x^2 \leqslant$ .....
   (b) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors ..... $\leqslant x^2 \leqslant$ .....
   (c) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors ..... $\leqslant x^2 \leqslant$ .....

EXERCICE 10.3.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

EXERCICE 10.4.
L'énoncé « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est appelé **une implication**. On dit aussi « $x \geqslant 2$ implique $x^2 \geqslant 4$ » ou bien « $x \geqslant 2$ donc $x^2 \geqslant 4$ ». On note « $x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$ ».

1. L'implication proposée est-elle vraie ? Justifier.
2. Parmi les implications suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
   (a) $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1$
   (b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$
   (c) $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$
   (d) $x < \sqrt{3} \Rightarrow x^2 < 3$
   (e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

3. Traduisez par une implication les propositions suivantes :
   (a) Un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à son carré.
   (b) Si le nombre x est tel que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $1-x^2$ est positif.
   (c) Un nombre supérieur à 1 a un carré supérieur à 1.

EXERCICE 10.5.
Les nombres a et b sont positifs.
L'énoncé « $a<b$ équivaut à $a^2<b^2$ » signifie que $a<b \Rightarrow a^2<b^2$ et que $a^2<b^2 \Rightarrow a<b$. On dit aussi « $a<b$ si et seulement si $a^2<b^2$.
On note $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$.
Parmi les équivalences suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b :
   $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$
2. Pour tous réels négatifs a et b :
   $a<b \Leftrightarrow a^2>b^2$
3. Pour tous réels a et b :
   $a^2=b^2 \Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$
4. $x^2<1 \Leftrightarrow x<1$

10.4.2 Fonctions trinômes

EXERCICE 10.6.
On donne :

- $f(x)=5-(x+1)^2$;
- $g(x)=(x-1)(2+3x)$;
- $h(x)=(x-1)(2x+1)-(x+1)$.

1. Montrer que les 3 fonctions sont des fonctions trinômes.
2. Dresser leurs tableaux de variation.
3. Indiquer les éléments de symétrie de leurs courbes représentatives.

EXERCICE 10.7.
On donne $f(x)=x^2+2x-1$.

1. Montrer que $f(x)=(x+1)^2-2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x)=0$.
3. Dresser son tableau de variation en y faisant apparaître les solutions précédentes.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 10.8.
On donne $f(x)=x^2+2x-15$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x)=(x-3)(x+5)$.
2. Montrer que $f(x)=(x+1)^2-16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x)=0$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 9$.

EXERCICE 10.9.
On donne $f(x)=x^2+2\sqrt{2}x-6$ pour tout x.

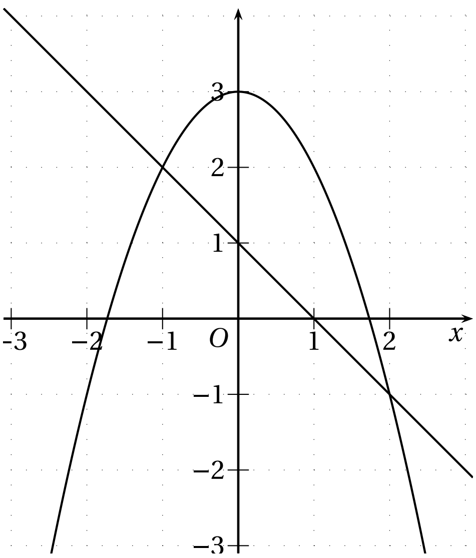
1. Montrer que $f(x)=(x-3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
2. Montrer que $f(x)=(x-\sqrt{2})^2-8$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x)=4$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 10.10.
On donne $f(x)=2x^2+3x-2$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x)=(2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x)=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x)=0$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant \frac{11}{8}$.

EXERCICE 10.11.
Sur le graphique ci-dessous sont tracées une droite $\mathscr{D}$ et une parabole $\mathscr{P}$. Cette dernière représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - x^2$.

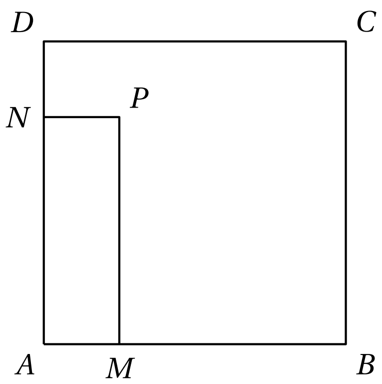
1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire, graphiquement, le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. (a) Déterminer la fonction affine g représentée par $\mathscr{D}$.
   (b) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. On désire retrouver par le calcul le résultat précédent.
   (a) Prouver que $f(x) > g(x)$ équivaut à $-x^2 + x + 2 > 0$.
   (b) Vérifier que $(x+1)(2-x) = -x^2+x+2$.
   (c) Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.



10.4.3 Problèmes

PROBLÈME 10.1.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$.
P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.
On cherche à trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.
On note $AM = x$ et on appelle $f(x)$ la fonction qui donne l'aire du rectangle $AMPN$ en fonction de x.

1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. En déduire la réponse au problème.



PROBLÈME 10.2.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm.
I est le milieu du segment $[BC]$ et M un point variable du segment $[AB]$.
On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N de $[BC]$ et P de $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.
Le but du problème est de comparer les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle ABI.

1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Faire afficher la longueur AM, puis les aires du rectangle et du triangle.
2. Déplacer M.
   Quelle semble être l'aire la plus grande ? Pour quelle position de M les deux aires semblent-elles égales ?
3. Prouver la conjecture précédente.

Problème 10.3.

Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.

Dans un repère orthonormal, on donne le point $A(0; 1)$ et un point $M(m; 0)$, libre sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe l'axe (Oy) en N.

P est le point tel que $OMPN$ est un rectangle.

Le but de l'exercice est de chercher sur quelle ligne se trouve P lorsque M décrit l'axe des abscisses.

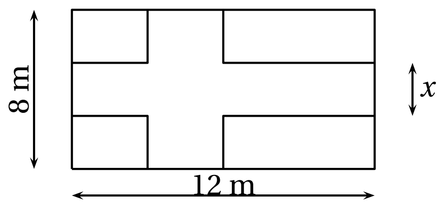
1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Activer le mode trace pour le point P (propriétés) et déplacer le point M.
   (c) Conjecturer la nature de la coubre décrite par P.
2. (a) Prouver que $\widehat{OMA} = \widehat{ONM}$.
   (b) Calculer $\tan \widehat{OMA}$ et $\tan \widehat{ONM}$ et en déduire que $ON = m^2$.
   (c) Donner les expressions, en fonction de m, des coordonnées de P et en déduire que P est un point de la parabole qu'équation $y = x^2$.

Problème 10.4.

Un jardinier dispose d'un terrain rectangulaire de 12 m sur 8 m. Il désire le partager en quatre parcelles bordées par deux allées perpendiculaires de même largeur x. Il estime que l'aire des deux allées doit représenter $\frac{1}{6}$ de la superficie de son terrain.

Le but de ce problème est de déterminer la largeur x des allées.

1. Exprimer en fonction de x l'aire des deux allées.
2. (a) Prouver que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 20x + 16 = 0$.
   (b) Vérifier que $x^2 - 20x + 16 = (x - 10)^2 - 84$.
   (c) En déduire x.



Problème 10.5.

Une entreprise produit de la farine de blé.

On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.

On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) Déterminer l'expression de $B(q)$.
   (b) Montrer que $B(q) = -2(q - 10)(q - 45)$.
3. Déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable.
4. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

Problème 10.6.

Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.

Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Commenter.
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimer en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifier que $r(x) = -x^2 + 40x + 2100$.
   (c) En déduire la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

PROBLÈME 10.7.

Une société de livres par correspondance a actuellement 10 000 abonnés qui paient, chacun, 50 € par an. Une étude a montré que chaque fois qu'on augmente d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une diminution de 100 abonnés et chaque fois qu'on baisse d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une augmentation de 100 abonnés.

On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.

n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonnement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.

2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.

3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

PROBLÈME 10.8.

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?