Chapitre 10

Suites arithmético-géométriques

Sommaire

10.1 Un exemple 61
10.2 Bilan et compléments 61
10.3 Exercices 62

L'objectif de ce chapitre est d'acquérir un savoir-faire sur un type d'exercice. Une définition et une propriété sont données mais elles ne sont pas exigibles. La propriété sera à démontrer, le cas échéant, dans chaque exercice, si l'énoncé l'impose.

10.1 Un exemple

Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients.
Chaque année, sa clientèle est composée de 50 % des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 0,5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ de la figure 10.1 page suivante, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.
   Construire la représentation en escalier de la suite (u_n).
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites
   (b) Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite (u_n).
   Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?

10.2 Bilan et compléments

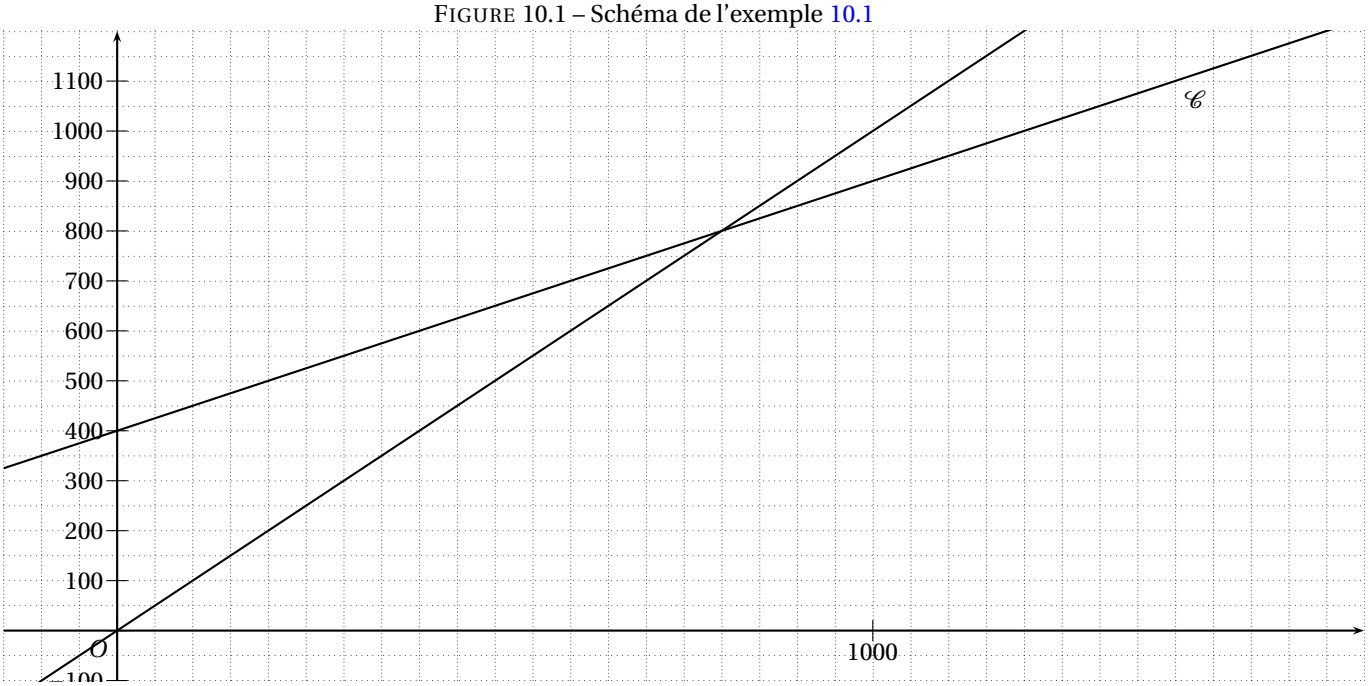
Définition. Soit m et p deux réels.
Une suite définie par récurrence par $(u_n) : \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = mu_n + p \end{cases}$ est dite *arithmético-géométrique.*

Cette définition n'est pas à retenir.

Remarque.
- Si $p = 0$, elle est géométrique car $u_{n+1} = mu_n = qu_n$.
- Si $m = 1$, elle est arithmétique car $u_{n+1} = u_n + p = u_n + r$.
- Dans les autres cas, elle n'est ni géométrique, ni arithmétique.

Dans toute la suite on supposera $m \neq 1$ et $p \neq 0$.

FIGURE 10.1 – Schéma de l'exemple 10.1



Propriété. *Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$.*
Si (u_n) converge c'est vers le nombre α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

On l'admettra.

Exemple 10.1. Dans l'exemple d'introduction on a conjecturé que la suite (u_n) convergeait vers 800. Or $0,5x + 400 = x \Leftrightarrow 400 = 0,5x \Leftrightarrow x = 800$.

10.3 Exercices

EXERCICE 10.1.

On donne la suite : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$

1. (a) Déterminer les 30 premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice.
   (b) Conjecturer sa monotonie.
   (c) Conjecturer sa convergence.
2. Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n - \frac{3}{2}$
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.
   (c) Quelle est la monotonie de (v_n) ? En déduire celle de (u_n).
   (d) Quelle est la convergence de (v_n) ? En déduire celle de (u_n).

EXERCICE 10.2.

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.

(c) En déduire v_n en fonction de n.
(d) En déduire u_n en fonction de n.
(e) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1er janvier de l'année 2027

EXERCICE 10.3.
Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 €le premier d'un mois, et ensuite 50 €le 1er de chaque mois. On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1, c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique.
   (b) En déduire c_n puis u_n en fonction de n.
4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. Déterminer le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection.

EXERCICE 10.4.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950 + n$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. Déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

EXERCICE 10.5 (Amérique du sud, novembre 2003)**.**
Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret. On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
   (d) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).
3. Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
   Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.

EXERCICE 10.6 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2003, 4 points)**.**
Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit. Pour cela, il planifie sur trois ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.
n étant un entier naturel, on désigne par v_n l'indice du prix de vente lors du n-ième trimestre. L'indice de départ est noté v_0. On a : $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n + 28$.

1. On pose : $u_n = v_n - 140$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ de premier terme (-40).
   (b) Exprimer u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.
2. On désigne par d_n l'indice de la demande lors du n-ième trimestre.
   Sachant que : $d_n = \frac{750}{7} - \frac{5}{7}v_n$, calculer d_0 et exprimer d_n en fonction de n.
3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des trois ans.