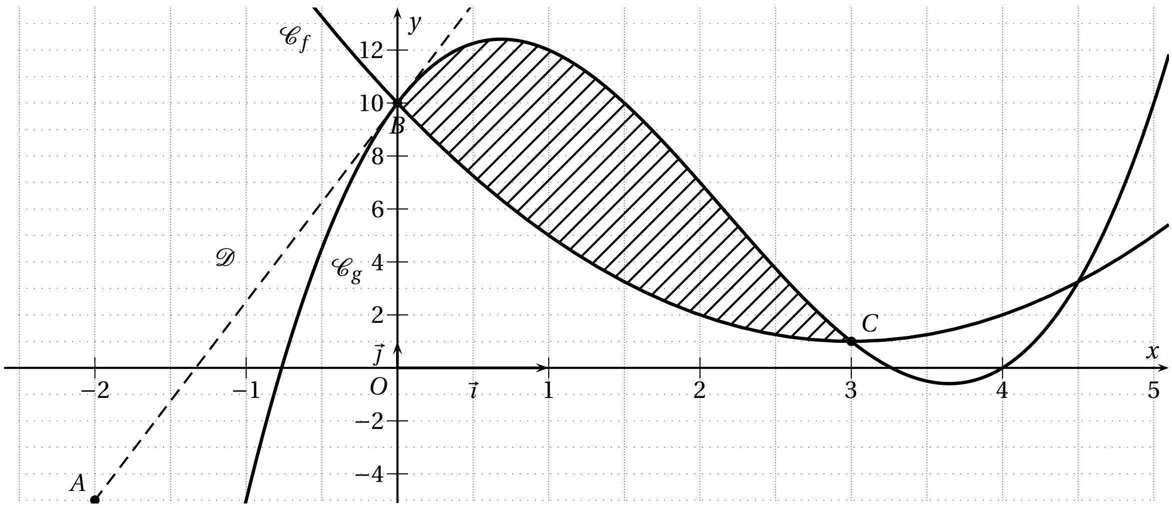
Devoir surveillé n°6

Calcul intégral – Probabilités conditionnelles – Logarithme népérien – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 6.1 (5 points).
Commun à tous les candidats
On considère deux fonctions f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 10$ et $g(x) = x^3 - 6,5x^2 + 7,5x + 10$.
Leurs courbes représentatives sont données ci-dessous dans un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 0,35 cm sur l'axe des ordonnées).
Les points A, B et C sont de coordonnées respectives $(-2; -5)$, $(0; 10)$ et $(3; 1)$.
Est également tracée $\mathscr{D}$, la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.
En C la tangente à la courbe de f est parallèle à l'axe des abscisses.



1. On note f' et g' les fonctions dérivées respectives de f et g.
   (a) Par lecture graphique, et sans justifier, déterminer $f(3)$ et $f'(3)$ ainsi que $g(0)$ et $g'(0)$.
   (b) Retrouver les résultats de la question précédente par le calcul.
2. *Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré situé entre les deux courbes pour x variant de 0 à 3.
   Calculer $\mathscr{A}$ en unités d'aire puis en cm^2.

EXERCICE 6.2 (5 points).
Commun à tous les candidats
Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.
35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.
Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.
On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.
On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ;
on note C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».
Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ l'événement contraire.
Tous les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au millième.

1. Quelle est la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant ?
2. Sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes ?
3. Décrire l'événement $\overline{E} \cap C$, et montrer que $p\left(\overline{E} \cap C\right) = 0,26$.
4. On sait de plus que 30 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
   (a) Calculer $p(E \cap C)$.
   (b) En déduire la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

EXERCICE 6.3 (5 points).
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin de la figure 6.1 joint en annexe page 92, on a placé les points $A\,(0\,;2\,;0)$, $B\,(0\,;0\,;6)$, $C\,(4\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;4\,;0)$ et $E\,(0\,;0\,;4)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).
   (b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.
2. (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.
   (b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.
3. On considère les points $F\,(2\,;0\,;0)$ et $G\,(0\,;3\,;0)$.
   On note $\mathscr{P}'$ le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$ et contenant les points F et G.
   (a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
   Sans justifier, représenter le plan $\mathscr{P}'$ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan $\mathscr{P}'$.
4. L'intersection des plans (CDE) et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ'.
   Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.
5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z & = & 6 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right.$$

   (a) Résoudre ce système.
   (b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?

EXERCICE 6.3 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, une seule des réponses est correcte. Pour chaque question, copier sur votre copie le numéro de la question et celui de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, une question sans réponse ou une mauvaise réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Le nombre réel $\frac{\ln \mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e}^2)}$ est égal à :
   (a) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ (b) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ (c) $\frac{1}{2}$
2. L'équation $\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(2x+1)$ admet sur $\mathbb{R}$:
   (a) aucune solution (b) une seule solution (c) deux solutions
3. On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   (a) L'ensemble de définition de la fonction f est :
      i. $]0\,;+\infty[$ ii. $[-1\,;1]$ iii. $]-1\,;1[$ iv. $]1\,;+\infty[$
   (b) Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ a pour ordonnée :
      i. $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ii. $\ln 1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ iii. $\ln 3-2\ln 2$ iv. $0,2876820725$
4. On considère la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(\ln x)$.
   Sur $]1\,;+\infty[$,l'inéquation $g(x)>0$ admet comme ensemble de solutions :
   (a) $]1\,;\mathrm{e}[$ (b) $]1\,;+\infty[$ (c) $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ (d) $[\mathrm{e}\,;+\infty[$

EXERCICE 6.4 (5 points).
Commun à tous les candidats
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x(1-\ln x)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dont une partie est donnée sur la figure 6.2 page suivante.
On rappelle que si f est une fonction et $[a\,;b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable alors la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[a\,;b]$, est le nombre m tel que : $m = \frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (*on rappelle que la limite en* 0 *de la fonction u définie sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *par* $u(x) = x\ln x$ *est* 0).
   (b) Montrer que $f'(x) = -2\ln x$ pour $x \in]0\,;+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.
3. (a) Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (b) Calculer m, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.
   (c) Représenter m sur la figure 6.2.

À rendre avec la copie

FIGURE 6.1 – Figure de l'exercice 6.3 pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

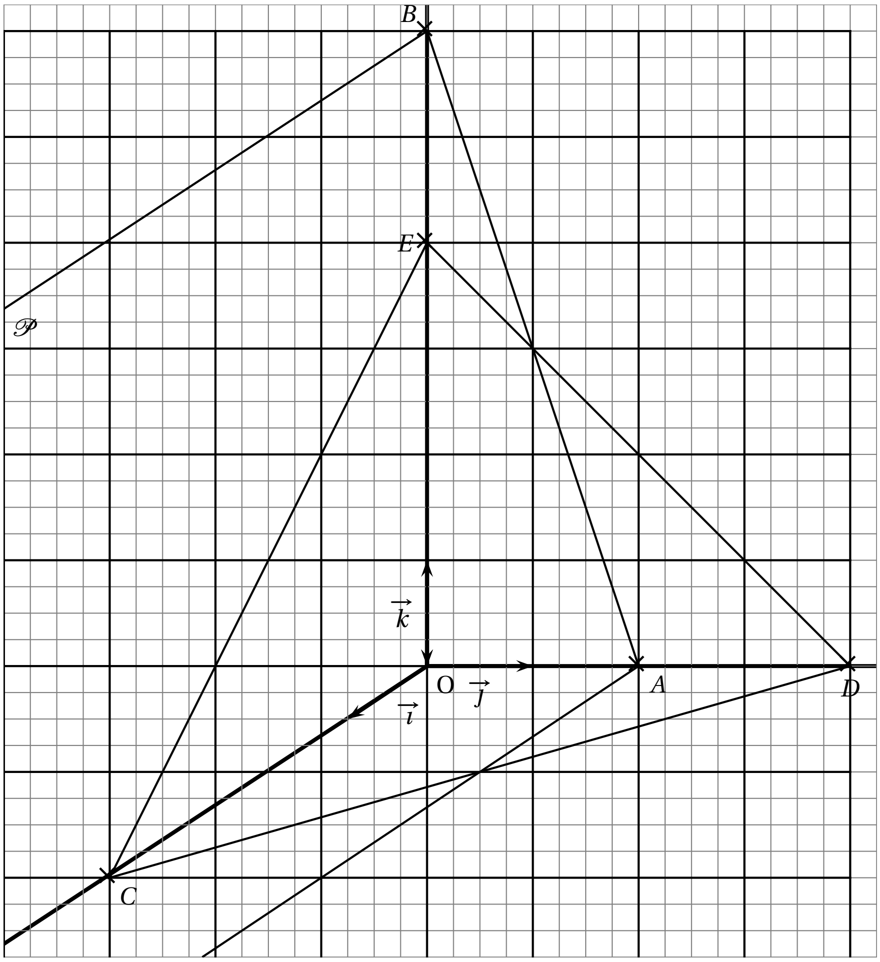


FIGURE 6.2 – Figure de l'exercice 6.4