

# Chapitre 9

## Équations de droites

### Sommaire

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>9.1 Rappels</b>                                         | <b>75</b> |
| <b>9.2 Équations cartésiennes</b>                          | <b>76</b> |
| 9.2.1 Vecteur directeur d'une droite                       | 76        |
| 9.2.2 Équation cartésienne d'une droite                    | 76        |
| 9.2.3 Lien entre équation cartésienne et vecteur directeur | 78        |
| 9.2.4 Parallélisme et vecteurs directeurs                  | 78        |
| <b>9.3 Équations réduites</b>                              | <b>79</b> |
| 9.3.1 Équation réduite d'une droite                        | 79        |
| 9.3.2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine        | 79        |
| 9.3.3 Coefficient directeur et parallélisme                | 79        |
| <b>9.4 Exercices</b>                                       | <b>80</b> |
| 9.4.1 Équations cartésiennes de droites                    | 80        |
| 9.4.2 Équations réduites de droite                         | 80        |

Dans tout ce chapitre, on considère que le plan est muni d'un repère quelconque.

### 9.1 Rappels

On a vu dans le chapitre 4 les deux choses suivantes :

**Définition.** Soit  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs du plan.  
Le nombre  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$  est appelé *déterminant* des deux vecteurs.

**Propriété.** Soit  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

## 9.2 Équations cartésiennes

### 9.2.1 Vecteur directeur d'une droite

**Définition 9.1.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite et  $A$  et  $B$  deux points distincts de cette droite. On appelle *vecteur directeur* de  $\mathcal{D}$  tout vecteur  $\vec{u} \neq \vec{0}$  colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ .

*Remarque.*  $\overrightarrow{AB}$  étant colinéaire à lui même, c'est aussi un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

La figure 9.1 page ci-contre présente une droite et quelques vecteurs directeurs de cette droite.

### 9.2.2 Équation cartésienne d'une droite

#### ACTIVITÉ 9.1.

On cherche à se donner une idée de ce que sont les points du plan de coordonnées  $(x; y)$  telles que ces coordonnées vérifient l'équation  $3x - 2y + 6 = 0$ .

1. Déterminer combien doit valoir  $y$  pour que l'équation soit vérifiée si  $x = 0$ .
2. Déterminer combien doit valoir  $x$  pour que l'équation soit vérifiée si  $y = 0$ .
3. Compléter le tableau suivant en déterminant de la même manière les  $x$  ou les  $y$  pour que l'équation soit vérifiée :

|     |   |    |   |   |    |   |
|-----|---|----|---|---|----|---|
| $x$ | 0 | -1 | 2 |   |    |   |
| $y$ |   |    |   | 0 | -3 | 1 |

4. Placer l'ensemble des points trouvés dans le repère de la figure 9.2 page suivante. Que remarque-t-on?
5. Déterminer par lecture graphique les coordonnées d'un autre point aligné avec les précédents. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation  $3x - 2y + 6 = 0$ ?

On généralise avec la propriété suivante, qu'on admettra :

**Propriété 9.1.** Toute droite  $\mathcal{D}$  du plan admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  ou  $ax + by = c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels avec  $(a; b) \neq (0; 0)$  appelée *équation cartésienne* de  $\mathcal{D}$ .

Cela signifie que tous les points dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient cette équation appartiennent à la droite  $\mathcal{D}$  et que tous les points appartenant à la droite  $\mathcal{D}$  ont leurs coordonnées  $(x; y)$  qui vérifient cette équation.

*Remarque.* Il n'y a pas qu'une seule équation cartésienne. En effet si  $ax + by + c = 0$  est une équation cartésienne d'une droite  $\mathcal{D}$ , alors, en multipliant cette équation par  $k \neq 0$ , on obtient une équation équivalente qui est une autre équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ . Par exemple  $3x - 2y + 6 = 0$  et  $-6x + 4y - 12 = 0$  sont deux équations cartésiennes d'une même droite.

FIGURE 9.1: Une droite et des vecteurs directeurs

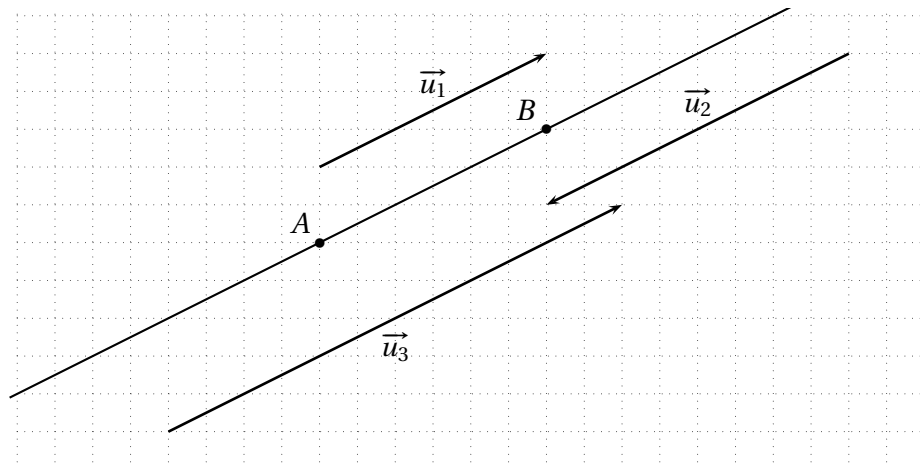
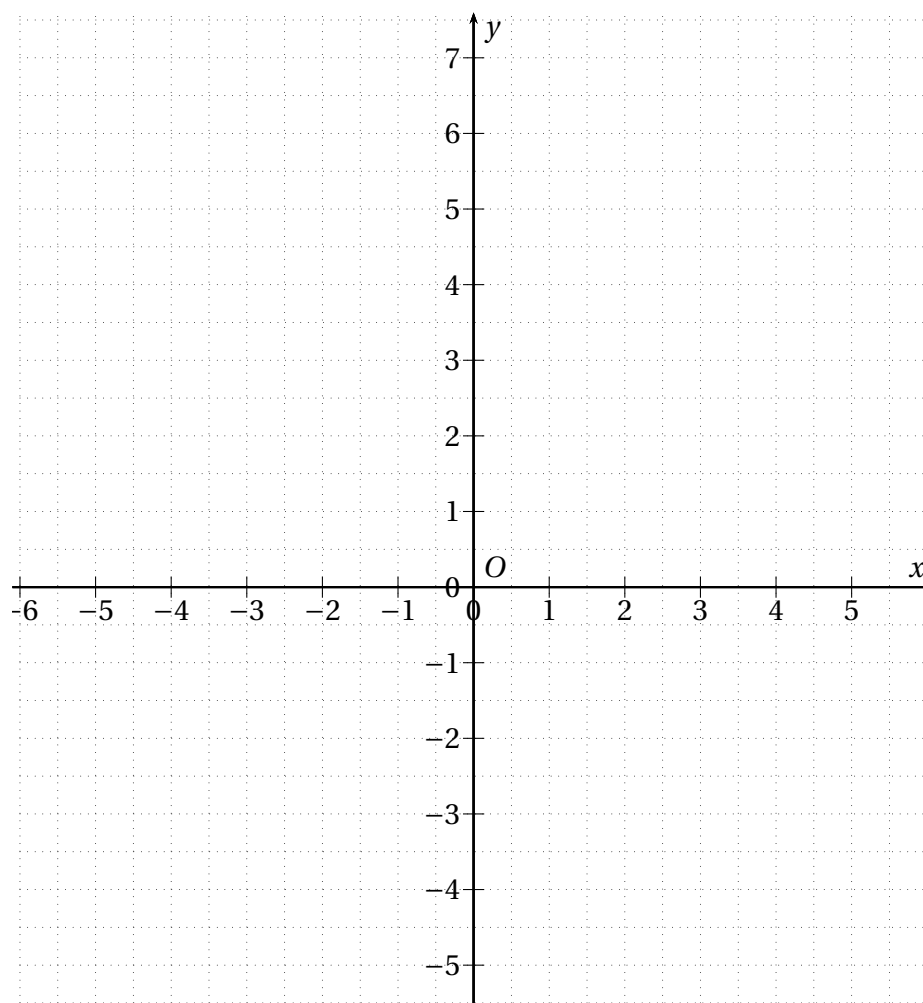


FIGURE 9.2: Repère de l'activité 9.1



### 9.2.3 Lien entre équation cartésienne et vecteur directeur

#### ACTIVITÉ 9.2.

Soit  $A(1; -2)$  et  $B(2; 3)$  deux points distincts du plan. On cherche à obtenir une équation cartésienne de la droite  $(AB)$  et à mettre en évidence le lien existant entre les coefficients de cette équation cartésienne et les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

1. Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Qu'est-il pour la droite  $(AB)$ ?
2. Soit  $M(x; y)$  un point de la droite  $(AB)$ . Compléter les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \text{ sont } \dots\dots\dots \\ &\Leftrightarrow XY' - X'Y = 0 \\ &\Leftrightarrow \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = 0 \\ &\Leftrightarrow \dots\dots x + \dots\dots y + \dots\dots = 0 \end{aligned}$$

3. Quel est le lien entre les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et les coefficients  $a$  et  $b$  de cette équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ ?
4. Application :
  - (a) Déterminer les coefficients  $a$  et  $b$  d'une équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  de la droite  $(CD)$  sachant que  $C(-1; 4)$  et  $D(2; -3)$ .
  - (b) En utilisant l'un de ces deux points, déterminer la valeur de  $c$  correspondante.

On généralise pour obtenir la propriété suivante, qu'on admettra :

**Propriété 9.2.** La droite  $\mathcal{D}$  dont une équation cartésienne est  $ax + by + c = 0$  admet comme vecteur directeur, parmi d'autres,  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

Réciproquement :

**Propriété 9.3.** Si la droite  $\mathcal{D}$  admet comme vecteur directeur  $\vec{v}$  alors elle admet comme équation cartésienne, parmi d'autres, une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  où  $a$  et  $b$  sont tels que  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

### 9.2.4 Parallélisme et vecteurs directeurs

Des droites parallèles sont des droites qui ont la même direction et donc leurs vecteurs directeurs aussi, c'est-à-dire qu'ils sont colinéaires. On peut aussi dire que tout vecteur directeur de l'une est aussi un vecteur directeur de l'autre.

On en tire trois propriétés :

**Propriété 9.4.** Soit  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites du plan et  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  des vecteurs directeurs respectifs de ces deux droites.

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \text{ colinéaires}$$

*Preuve.* Par définition du parallélisme et de la colinéarité. ◇

**Propriété 9.5.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$  et une droite  $\mathcal{D}'$ .

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D}' \text{ admet au moins une équation de la forme } ax + by + c' = 0$$

*Preuve.*  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  admet pour vecteur directeur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{v}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D}' : ax + by + c' = 0$ . ◇

## 9.3 Équations réduites

### 9.3.1 Équation réduite d'une droite

**Propriété 9.6.** Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme  $x = k$ .  
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une unique équation de la forme  $y = mx + p$  appelée équation réduite de  $\mathcal{D}$ .

*Preuve.* Un vecteur directeur d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées a ses vecteurs directeurs de la forme  $\vec{v} = \beta \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ , avec  $\beta \neq 0$ , donc admet une équation de la forme  $\beta x + 0y + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{\beta}$  car  $\beta \neq 0$ . En posant  $k = -\frac{c}{\beta}$  on obtient le résultat.

Un vecteur directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a ses vecteurs directeurs de la forme  $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , avec  $\alpha \neq 0$ , donc admet une équation de la forme  $\beta x - \alpha y + c = 0 \Leftrightarrow \alpha y = \beta x + c \Leftrightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{c}{\alpha}$  car  $\alpha \neq 0$ . En posant  $m = \frac{\beta}{\alpha}$  et  $p = \frac{c}{\alpha}$  on obtient le résultat.  
On admettra que cette équation est unique. ◇

### 9.3.2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

**Propriété 9.7.** Soit  $\mathcal{D}$  d'équation réduite  $y = mx + p$ . Alors  $\vec{v}(1; m)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .  
Le point  $(0; p)$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

*Preuve.*  $\mathcal{D} : y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$  avec  $a = m$ ,  $b = -1$  et  $c = p$ . Donc  $\vec{v}(-b; a) = (1; m)$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

Si  $x = 0$  alors  $y = m \times 0 + p = p$  donc  $(0; p) \in \mathcal{D}$ . ◇

**Définition 9.2.** Soit  $\mathcal{D}$  admettant une équation de la forme  $y = mx + p$ .  
Alors  $m$  est appelé *coefficient directeur* de la droite et  $p$  est appelé *ordonnée à l'origine* de  $\mathcal{D}$ .

### 9.3.3 Coefficient directeur et parallélisme

**Propriété 9.8.** Soit  $\mathcal{D} : y = mx + p$  et  $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$ .

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow m = m'$$

*Preuve.*  $\mathcal{D} : y = mx + p$  et  $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$  ont pour vecteurs directeurs respectifs  $\vec{v}(1; m) = (X; Y)$  et  $\vec{v}'(1; m') = (X'; Y')$ .

$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{v}$  et  $\vec{v}'$  colinéaires  $\Leftrightarrow XY' - X'Y = 0 \Leftrightarrow 1 \times m' - 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m' - m = 0 \Leftrightarrow m' = m$ . ◇

## 9.4 Exercices

### 9.4.1 Équations cartésiennes de droites

#### EXERCICE 9.1.

On considère les points  $A(-1; 2)$ ,  $B(1; 3)$  et  $C(195; 100)$ .

- Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .  
À l'aide de cette équation déterminer si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.
- La droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x + 1$  est-elle parallèle à  $(AB)$ ?
- Le point  $C$  appartient-il à la droite  $\Delta$  passant par le point  $J(0; 1)$  et de coefficient directeur  $\frac{3}{5}$ ?

#### EXERCICE 9.2.

On donne  $A(1; 2)$ ,  $B(2; 1)$  et  $C(-3; 0)$ . Déterminer les équations des droites suivantes :

- $\mathcal{D} = (BC)$ ;
- $\mathcal{D}'$  passant par  $C$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ ;
- $\Delta$  parallèle à  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ ;
- $\Delta'$  parallèle à  $\mathcal{D}'$  passant par  $B$ .

#### EXERCICE 9.3.

Déterminer si les droites suivantes sont parallèles et, si elles ne le sont pas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- $\mathcal{D}_1 : x + 2y - 1 = 0$
- $\mathcal{D}_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
- $\mathcal{D}_3 : -2x + 3y + 5 = 0$

#### EXERCICE 9.4.

Dans un même repère tracer les droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1 : 2x + 3y = 6$ ;
- $\mathcal{D}_2 : -3x + y = 9$ ;
- $\mathcal{D}_3 : 4x - y = 8$ ;
- $\mathcal{D}_4 : 2x - 3y = 9$ ;
- $\mathcal{D}_5 : 0x + 3y = 6$ ;
- $\mathcal{D}_6 : 2x + 0y = 2$ ;

### 9.4.2 Équations réduites de droite

#### EXERCICE 9.5.

La droite  $\mathcal{D}$  est d'équation réduite  $y = -3x + 0,5$ . Déterminer si  $A(150, 5; -451)$  ou  $B(-73, 25; 219, 5)$  appartiennent à  $\mathcal{D}$ .

#### EXERCICE 9.6.

La droite  $\mathcal{D}$  est d'équation réduite :  $y = \frac{5}{2}x - 1$ .

- $A$  est le point de  $\mathcal{D}$  d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée?
- $B$  est le point de  $\mathcal{D}$  d'ordonnée  $-\frac{1}{2}$ . Quelle est son abscisse?

#### EXERCICE 9.7.

Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathcal{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$ ;
- $\mathcal{D}_2 : y = 4x - 2$ ;
- $\mathcal{D}_3 : y = -3$ ;
- $\mathcal{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$ ;

- $\mathcal{D}_5 : x = 6$ .

**EXERCICE 9.8.**

Dans un même repère, tracer les droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$  passant par  $A(3; 1)$  et de coefficient directeur  $-1$ ;
- $\mathcal{D}_2$  passant par  $B(-3; 2)$  et de coefficient directeur  $-\frac{1}{4}$ ;
- $\mathcal{D}_3$  passant par  $C(1; 0)$  et de coefficient directeur  $3$ ;
- $\mathcal{D}_4$  passant par  $D(0; 2)$  et de coefficient directeur  $\frac{4}{3}$ ;
- $\mathcal{D}_5$  passant par  $E(-2; 2)$  et de coefficient directeur  $0$ .

**EXERCICE 9.9.**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite  $(AB)$  :

1.  $A(1; 2)$  et  $B(3; -1)$ ;
2.  $A(4; 4)$  et  $B(-1; 2)$ ;
3.  $A(0; -1)$  et  $B(2; 3)$ ;
4.  $A(-2; 2)$  et  $B(3; 2)$ ;
5.  $A(1; 3)$  et  $B(1; 4)$ .

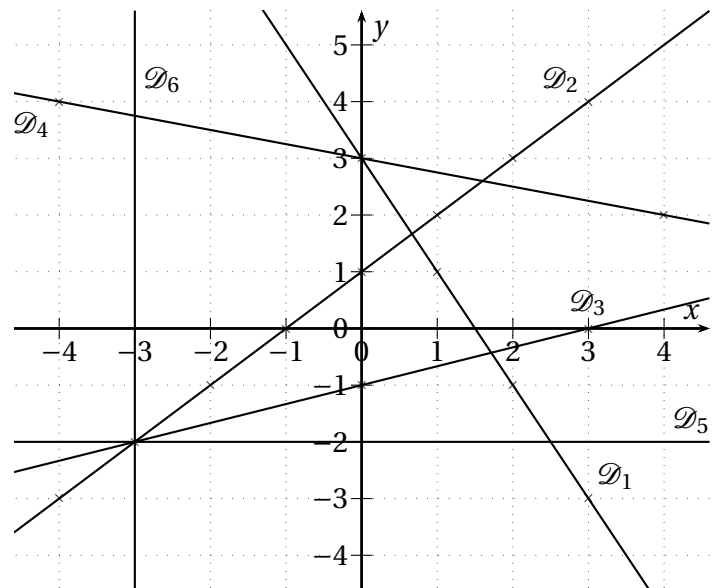
**EXERCICE 9.10.** 1. Déterminer l'équation réduite de la droite  $\mathcal{D}$  sachant que  $A(2; 1) \in \mathcal{D}$  et que  $\mathcal{D}$  est parallèle à la droite  $\mathcal{D}' : y = 3x - 1$ .

2. (a) On donne  $A(2; 3)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(4; 1)$  et  $D(-2; 5)$ . Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles parallèles?  
 (b) Même question avec  $A(1; 2)$ ,  $B(2; -4)$ ,  $C(0; 3)$  et  $D(1; -3)$ .
3. Déterminer l'ordonnée du point  $A$  sachant que :
  - $A \in \mathcal{D}$ ;

- $\mathcal{D}$  parallèle à la droite  $(BC)$  où  $B(2; 1)$  et  $C(-1; 3)$ ;
- l'abscisse de  $A$  vaut  $8$

**EXERCICE 9.11.**

Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :

**EXERCICE 9.12.**

Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :

