Chapitre 8

Équations cartésiennes dans l'espace

Sommaire

Ce chapitre est constitué de rappels de Seconde et de Première. Les propriétés n'y seront donc pas démontrées

8.1 Repérage dans l'espace

Définition 8.1. Un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si les points O, I, J et K tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
O est appelé *origine du repère* et $\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ est appelée la *base du repère*.
Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires, le repère est dit *orthogonal*.
Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1$, le repère est dit *orthonormal* (ou orthonormé).

Propriété 8.1. *Le plan est muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

- *Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x;\,y;\,z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.*
- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;\,y;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.*

Remarque. Par définition les coordonnées de M et de $\overrightarrow{OM}$ sont donc les mêmes.

Propriété 8.2. *Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$:*

- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$
- *les coordonnées de I, milieu de $[AB]$, sont*
$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Propriété 8.3. *Soit $\vec{u}\,(x;\,y;\,z)$, $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_B)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$.*
Si le repère est orthonormal *alors :*

- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
- $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Propriété 8.4. *Soit* $\overrightarrow{u} = (x\,;\,y\,;\,z)$ *et* $\overrightarrow{v} = (x'\,;\,y'\,;\,z')$.
Si le repère est orthonormal *alors* $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

8.2 Équation cartésienne d'un plan

8.2.1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 8.5. *Le plan est muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

- *Tout plan* $\mathscr{P}$ *de l'espace admet une équation de la forme* $ax + by + cz = d$ *avec* $(a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$
- *Si* $(a\,;\,b\,;\,c) \neq (0\,;\,0\,;\,0)$ *alors l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x\,;\,y\,;\,z)$ *vérifiant* $ax + by + cz = d$ *est un plan.*

8.2.2 Vecteur normal à un plan

Définition 8.2. $\vec{n}$ est dit *vecteur normal* au plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux droites sécantes incluses dans $\mathscr{P}$.

Propriété 8.6. *Soit* $\vec{n}$ *normal à un plan* $\mathscr{P}$ *et* $A \in \mathscr{P}$. *Pour tout point* $M \in \mathscr{P}$ *on a* $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Théorème 8.7. *Dans un repère orthonormal, soit* $\vec{n}$ *non nul et* $\mathscr{P}$ *un plan.*

$$\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c) \text{ normal à } \mathscr{P} \Leftrightarrow \mathscr{P} \text{ admet une équation de la forme } ax + by + cz = d.$$

8.2.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes

Propriété 8.8. *L'espace étant muni d'un repère orthonormal,* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *sont deux plans d'équations respectives* $\mathscr{P}$: $ax + by + cz = d$ *et* $\mathscr{P}' : a'x + b'y + c'z = d'$.

$$\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a\,;\,b\,;\,c) \text{ et } \vec{n'}(a'\,;\,b'\,;\,c') \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \text{ il existe } k \text{ tel que } a = ka', b = kb' \text{ et } c = kc'$$

Remarque. Une conséquence de cette propriété est que les plans $\mathscr{P} : ax + by + cz = d$ et $\mathscr{P}' : ax + by + cz = d'$ sont parallèles $(k = 1)$.

Propriété 8.9. *L'espace étant muni d'un repère orthonormal,* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{P}'$ *sont deux plans d'équations respectives* $\mathscr{P}$: $ax + by + cz = d$ *et* $\mathscr{P}' : a'x + b'y + c'z = d'$.

$$\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a\,;\,b\,;\,c) \text{ et } \vec{n'}(a'\,;\,b'\,;\,c') \text{ orthogonaux } \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

8.2.4 Équations particulières

Propriété 8.10. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *on a :*

- *le plan* (xOy) *admet* $z = 0$ *comme équation cartésienne ;*
- *le plan* (zOy) *admet* $x = 0$ *comme équation cartésienne ;*
- *Le plan* (xOz) *admet* $y = 0$ *comme équation cartésienne.*

Propriété 8.11. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *on a :*

- *tout plan parallèle à* (xOy) *admet* $z = d$ *comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à* (zOy) *admet* $x = d$ *comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à* (xOz) *admet* $y = d$ *comme équation cartésienne.*

Propriété 8.12. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *on a :*

- *tout plan parallèle à* (Ox) *admet* $by + cz = d$ *avec* $(b\,;\,c) \neq (0\,;\,0)$ *comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à* (Oy) *admet* $ax + cz = d$ *avec* $(a\,;\,c) \neq (0\,;\,0)$ *comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à* (Oz) *admet* $ax + by = d$ *avec* $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ *comme équation cartésienne.*

8.3 Système d'équations cartésiennes d'une droite

8.3.1 Cas général

Théorème 8.13. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *on a :*

- *toute droite de l'espace admet un système d'équation de la forme* $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ *avec* $(a;b;c) \neq (0;0;0) \neq (a';b';c')$ *et tels que il n'existe pas de réel* k *tel que* $a=ka'$, $b=kb'$ *et* $c=kc'$ *;*
- *Si* $(a;b;c) \neq (0;0;0) \neq (a';b';c')$ *et qu'il n'existe pas de réel* k *tel que* $a=ka'$, $b=kb'$ *et* $c=kc'$ *alors l'ensemble des points* M *dont les coordonnées* $(x;y;z)$ *vérifient* $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$ *est une droite.*

8.3.2 Système d'équations cartésiennes des axes

Propriété 8.14. *Le plan étant muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, *on a :*

- *l'axe* (Ox) *admet* $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe* (Oy) *admet* $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe* (Oz) *admet* $\begin{cases} y=0 \\ a=0 \end{cases}$ *comme système d'équations cartésiennes.*

8.4 Exercices

8.4.1 Équations de plans

EXERCICE 8.1.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. L'unité est le centimètre.
On considère les points $A(-1;3;3)$, $B(0;5;5)$, $C(2;3;6)$ et $D(1;1;4)$.

1. (a) i. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ii. Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. iii. Montrer que $AB = AD$.
   (b) Que peut-on en déduire pour $ABCD$? Calculer son aire.
2. (a) Calculer les coordonnées du point I, centre du carré $ABCD$.
   (b) Soit $J\left(\frac{9}{2};5;\frac{1}{2}\right)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC).
   (c) En déduire une équation du plan (ABC).
3. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point F que l'on déterminera.

EXERCICE 8.2.
$\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est orthonormé. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(1;-2;7)$ et dont $\vec{u} = \left(-1;\frac{1}{2};2\right)$ est un vecteur normal.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.

EXERCICE 8.3.
1. $2x+3y-4z+1=0$ est l'équation d'un plan.
   Quels points parmi $A\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$, $B\left(0;\frac{1}{4};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$ et $D(1;-1;2)$ appartiennent à ce plan ?
2. Soit $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$ et $C(-2;1;2)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et en déduire que A, B et C définissent un plan.
   (b) Sachant que ce plan est d'équation $ax+by+cz+d=0$ et que A, B et C appartiennent à ce plan, en déduire une équation de ce plan.

EXERCICE 8.4.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x+y+z=6$.

1. Déterminer les coordonnées du point A, intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses (Ox).
2. Déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Oy) et (Oz).
3. Dans un repère de l'espace, placer les points A, B et C.
   Tracer les droites (AB), (AC) et (BC), traces du plan $\mathscr{P}$ sur les plans de coordonnées.

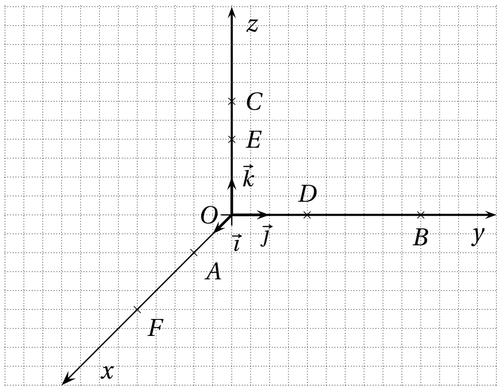
EXERCICE 8.5.
Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par : $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;6)$ sous la forme $ax+by+cz=d$.
On choisira d entier afin que a,b et c soient aussi des entiers.

EXERCICE 8.6.
Soit $A(1;1;1)$, $B(0;2;3)$ et $C(1;2;0)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Soit $ax+by+cz=d$ une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer des valeurs possibles pour a, b, c et d.
   En déduire une équation de $\mathscr{P}$ dont tous les coefficients sont entiers.

EXERCICE 8.7.

1. Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans le repère de la figure ci-contre.
2. Déterminer les équations des plans
   (a) $\mathscr{P}_1$ parallèle à (Ox) passant par B et C ;
   (b) $\mathscr{P}_2$ parallèle à (Oy) passant par A et E ;
   (c) $\mathscr{P}_3$ parallèle à (Oz) passant par B et F.
3. Déterminer les équations des plans (ABC), (ADE), (CFB) et (FED).



EXERCICE 8.8.
On considère les points $A(0;3;2)$, $B(0;2;4)$ et $C(3;0;2)$.

1. Montrer que ces points définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Justifier que la droite (AB) est la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan (yOz).
3. Déterminer graphiquement les points d'intersection E et F de la droite (AB) sur les axes (Oz) et (Oy).
4. En déduire la représentation du plan $\mathscr{P}$.

8.4.2 Équations de droites

EXERCICE 8.9.
On donne $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations respectives $2x+3y-4z+5=0$ et $-x+y-z+2=0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.
2. En déduire quel est l'ensemble des points $M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.

EXERCICE 8.10.
L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. A et B sont les deux points de coordonnées $A(0;0;2)$ et $B(0;3;2)$.

1. Montrer que A et B appartiennent au plan (yOz).
2. Montrer que A et B appartiennent à un plan parallèle à (xOy).
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

EXERCICE 8.11.
L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ orthonormé. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont les deux plans d'équations respectives $2x+3y+z-4=0$ et $z=2$.

1. (a) Le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z-4 \\ z=2 \end{array}\right.$ définit-il une droite $\mathscr{D}$?
   (b) Construire la trace de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$ sur les plans de coordonnées.
   (c) En déduire la représentation de $\mathscr{D}$.
2. Mêmes questions avec les systèmes suivants :
   - $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z-7=0 \\ x=5 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z-8=0 \\ -x+y-z-2=0 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z-6=0 \\ 3x+y+z-4=0 \end{array}\right.$

EXERCICE 8.12.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A\,(-1\,;2\,;1)$ et $B\,(3\,;-2\,;0)$.
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB).
   (b) Soit $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de la droite (AB).
   Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. De la même manière, déterminer un système d'équations cartésiennes de :
   - (CD) avec $C\,(-1\,;2\,;-3)$ et $D\,(0\,;-2\,;1)$.
   - (EF) avec $E\,(1\,;0\,;1)$ et $F\,(1\,;-2\,;4)$;

EXERCICE 8.13.
Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite :

1. qui passe par $A\,(-3\,;2\,;0)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOy) ;
2. qui passe par $B\,(5\,;0\,;-2)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOz).

EXERCICE 8.14.
Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, $\mathscr{D}$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{cases}$.

1. (a) Résoudre le système suivant $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \\ x=0 \end{cases}$.
   (b) Interpréter géométriquement la solution du système résolu en 1a.
2. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec chacun des plans de coordonnées.

8.4.3 Exercices d'annales

EXERCICE 8.15.
$OPQRSTUV$ est un cube de côté 6 dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace (voir la figure 8.1 page suivante).

1. (a) Soit $G(4\,;2\,;4)$, montrer que les points R, G et T sont alignés.
   (b) Montrer que les droites (RG) et (SG) sont perpendiculaires.
2. On désigne par I le milieu de $[TP]$ et par J le milieu de $[VR]$.
   (a) Calculer les coordonnées de I et de J.
   (b) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[IJ]$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (d) Calculer l'aire du triangle SIJ.
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (b) Déterminer alors une équation du plan (SUM).

EXERCICE 8.16.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est tel que $B(2\,;0\,;0)$, $D(0\,;6\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$.
Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure 8.2 page suivante.
   Donner (sans justification) les coordonnées des points A, C, F, G et H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1\,;0\,;4)$ et $(2\,;0\,;2)$.
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation : $y=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation : $2x+z=6$.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (ML).
   (c) Justifier que le plan $\mathscr{P}_2$ est parallèle à l'axe $\left(A\,;\overrightarrow{AJ}\right)$.
   (d) Tracer en rouge sur la figure l'intersection de $\mathscr{P}_2$ avec le pavé $ABCDEFGH$.
   On ne demande pas de justifier cette construction.

FIGURE 8.1 – Figure de l'exercice 8.15

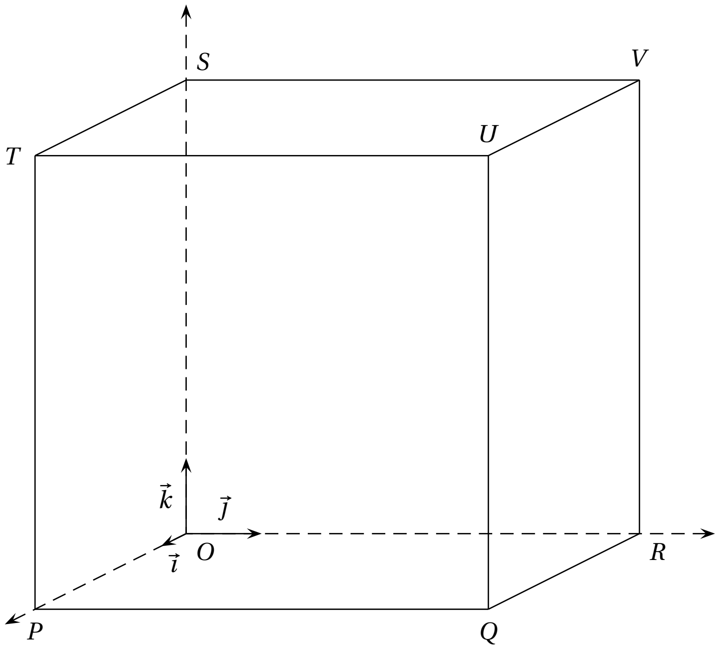


FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.16