

Chapitre 5

Colorations de graphes

Sommaire

5.1 Problèmes	37
5.2 Bilan et compléments	38
5.2.1 Coloration d'un graphe et nombre chromatique	38
5.2.2 Minorant du nombre chromatique	38
5.2.3 Majorant du nombre chromatique	38
5.2.4 Un exemple	39
5.3 Exercices	40

5.1 Problèmes

PROBLÈME 5.1 (Un problème d'aquariophile).

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, un X signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.

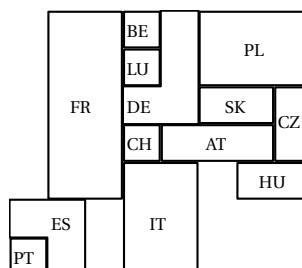
Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X					X	X	X
D	X				X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

PROBLÈME 5.2 (Colorier une carte).

On veut colorer chaque pays de la carte ci-dessous, qui est la carte schématisée d'une partie de l'Europe, de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur.

Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent.



PROBLÈME 5.3 (Organisation d'un tournoi).

Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et mastermind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.

1. Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?
2. En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

5.2 Bilan et compléments

5.2.1 Coloration d'un graphe et nombre chromatique

Les problèmes ci-dessus peuvent tous se ramener à un problème de coloration de graphe.

Définition 5.1. Une coloration d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Remarque. Il s'agit simplement d'un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés. Dans les problèmes, cet ensemble de couleurs peut être un ensemble de tranches horaires dans lesquelles on doit faire tenir diverses occupations de façon compatible, de cages de zoo dans lesquelles il ne faut pas mettre des animaux qui vont s'attaquer, de salles de classes dans lesquelles on veut organiser des options, etc.

Une grande partie de la difficulté tient ici dans le travail de modélisation, pour faire apparaître la question comme un problème de coloriage. En particulier, la construction du graphe n'est pas toujours évidente : pour les problèmes de coloriage de carte, comme on l'a vu dans l'exercice sur la carte de l'Europe, c'est le graphe directement induit qu'il faut considérer. Dans les problèmes de compatibilité, ce ne sont pas les sommets compatibles qu'il faut relier sur le graphe, comme on a spontanément tendance à le faire, mais les sommets incompatibles.

Définition 5.2. Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. On note généralement $\gamma(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G .

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique.

On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

5.2.2 Minorant du nombre chromatique

Quelques remarques simples permettent de minorer ce nombre chromatique.

Propriété 5.1. Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a : $\gamma(H) \leq \gamma(G)$

Preuve. Une coloration de G avec $\gamma(G)$ couleurs induit une coloration de H avec au plus $\gamma(G)$ couleurs. ◇

Propriété 5.2. Le nombre chromatique du graphe complet K_n est n .

Preuve. Les sommets étant tous adjacents, il faut autant de couleurs qu'il y a de sommets. ◇

Propriété 5.3. Soit G un graphe. Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n , alors $\gamma(G) \geq n$.

Preuve. C'est la conséquence évidente des deux précédentes propriétés. ◇

5.2.3 Majorant du nombre chromatique

Il est plus difficile de prouver des majorations générales du nombre chromatique.

Deux propriétés sont disponibles, mais elles donnent souvent des majorations trop larges :

Propriété. Soit G un graphe d'ordre n , alors $\gamma(G) \leq n$.

Preuve. Cette propriété est triviale : si on donne une couleur différente à chacun des sommets de G , on obtient une coloration de G . $\diamond$

Cette propriété donne un majorant du nombre chromatique qui est mauvais. La suivante, qu'on admettra, donne un meilleur majorant, aussi nous n'utiliserons que celle-là :

Propriété 5.4. *Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets. Alors : $\gamma(G) \leq r + 1$*

Pour en obtenir de meilleurs majorants, il faut avoir une stratégie pour colorier un graphe, stratégie qu'on appellera *algorithme de coloration*.

Un algorithme de coloration

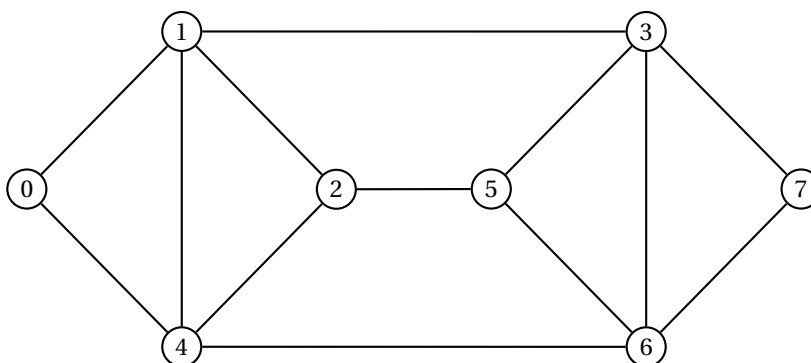
Nous allons décrire ci-après l'algorithme de coloration de WELCH et POWELL.

1. On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ de sommets telle que $\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \dots \geq \deg(x_n)$.
2. On choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1 , et :
 - en parcourant la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 au premier sommet non colorié et non adjacent à c_1 ;
 - en continuant à parcourir la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 aux autres sommets non coloriés et non adjacents aux sommets déjà coloriés avec c_1 et, ce, jusqu'à la fin de la liste.
3. S'il reste des sommets non coloriés, on attribue une nouvelle couleur au premier sommet non colorié et on reprend la démarche.
4. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

Remarque. C'est un bon algorithme, mais précisons quand même que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

5.2.4 Un exemple

Considérons le graphe G dessiné ci-dessous.



Appliquons l'algorithme décrit ci-dessus : 1, 3, 6, 4, 2, 5, 0, 7 est une liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

D'après l'algorithme :

- à la première étape on attribue une couleur c_1 aux sommets 1 et 6 ;
- à la deuxième étape, on attribue une couleur c_2 aux sommets 3 et 4 ;
- à la troisième étape, on attribue une couleur c_3 aux sommets 2, 0 et 7 ;
- enfin à la dernière étape on attribue une couleur c_4 au sommet 5.

Un tel algorithme peut se présenter sous forme de tableau :

Sommets (degré)	1 (4)	3 (4)	6 (4)	4 (4)	2 (3)	5 (3)	0 (2)	7 (2)
Étape 1	c_1		c_1					
Étape 2		c_2		c_2				
Étape 3					c_3		c_3	c_3
Étape 4						c_4		

On obtient un coloriage de G avec 4 couleurs, mais en fait le nombre chromatique de G est 3. En effet deux couleurs ne suffisent pas car G admet des triangles comme sous-graphes, c'est-à-dire des sous-graphes complets d'ordre 3, par contre, en prenant du bleu pour les sommets 0, 2 et 3, du rouge pour les sommets 4, 5 et 7 et du jaune pour les sommets 1 et 6, on obtient un coloriage avec 3 couleurs.

On a alors $\gamma(G) \geq 3$ car G contient un sous-graphe d'ordre 3 et $\gamma(G) \leq 3$ car on a mis en évidence une coloration de G à l'aide de 3 couleurs donc on a bien $\gamma(G) = 3$.

La morale de tout cela est que pour un petit nombre de sommets, il faut chercher directement le nombre chromatique plutôt que d'utiliser tel ou tel algorithme, même si à l'épreuve du baccalauréat on attend de vous que vous mettiez en évidence un algorithme de coloriage.

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1 (Produits chimiques).

On veut transporter dans un train des produits chimiques. Pour des raisons de sécurité, on ne mettra pas certains produits chimiques dans le même wagon.

On appelle $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ les produits chimiques et on indique dans le tableau ci-dessous les produits incompatibles (notés par un X).

Combien de wagons faudra-t-il prévoir ?

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1		X		X		
P_2	X		X		X	
P_3		X		X		
P_4	X		X			
P_5		X				X
P_6					X	

EXERCICE 5.2 (Organisation d'un examen).

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M.

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

EXERCICE 5.3 (Menuiserie).

Dans un atelier de menuiserie, six travaux sont à réaliser. On utilise quatre machines : une scie à dégrossir ; une raboteuse ; une mortaiseuse ; une ponceuse. Chaque travail nécessite l'utilisation de deux machines, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Plan des utilisations	
Travail	Machines utilisées
1	Scie et raboteuse
2	Scie et mortaiseuse
3	Mortaiseuse et ponceuse
4	Raboteuse et ponceuse
5	Mortaiseuse et ponceuse
6	Scie et mortaiseuse

Deux travaux ne peuvent être exécutés en même temps que s'ils utilisent des machines différentes.

1. Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps. Représenter ces contraintes par un graphe.
2. On suppose que le temps nécessaire pour chaque travail est le même (une séquence de 20 min). Déterminer le nombre minimal de séquences nécessaires pour réaliser ces six travaux.
3. Proposer une organisation.

EXERCICE 5.4 (Habillement).

Aujourd'hui Nathalie est perplexe : que mettre pour cet entretien d'embauche ?

Dans son armoire, elle a : 3 pulls, 3 jupes, 3 paires de chaussures à assortir.

Elle ne peut pas mettre plusieurs pulls, plusieurs jupes ou plusieurs paires de chaussures et, par ailleurs, il y a des incompatibilités qui sont donnés dans le tableau suivant, où p_1, p_2, p_3 désignent les trois pulls, j_1, j_2, j_3 , les trois jupes, c_1, c_2, c_3 les trois paires de chaussures.

	ne peut aller avec
p_1	j_1, c_2, j_3
p_2	c_1, j_2, c_3, j_3
p_3	j_1, j_2, c_2
j_1	p_1, p_3, c_3, c_1
j_2	p_2, p_3, c_1, c_2
j_3	p_1, p_2, c_1

1. Représenter ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les vêtements sont les sommets.
2. Colorier ce graphe.
3. En déduire toutes les possibilités d'assortiments compatibles.

EXERCICE 5.5 (Ouverture de magasins).

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

EXERCICE 5.6 (Coloration de graphes).

1. Montrer que le nombre chromatique du graphe G ci-dessous vaut 3.
Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?
2. Montrer que le nombre chromatique du graphe H ci-dessous vaut 2.

