Chapitre 6

Démonstration par récurrence

Sommaire

6.1 Activité

Dans le cas de suites définies de façon explicite, toutes les propriétés des fonctions (dérivée, limites) sont disponibles. Ce n'est pas le cas des suites définies par récurrence. On procède alors parfois à des démonstrations appelées *démonstration par récurrence*.

ACTIVITÉ 6.1 (Suites arithmétiques).
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On a conjecturé en Première que, pour une suite arithmétique, comme $u_1 = u_0 + 1 \times r$, comme $u_2 = u_0 + 2 \times r$, on avait très certainement la relation $\mathscr{P} : u_n = u_0 + n \times r$.
On va le démontrer.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ est vraie pour pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie jusqu'au rang p. Montrer qu'alors elle est vraie au rang $p+1$.
3. Conclure.

6.2 Bilan

Si on veut démontrer par récurrence que tous les termes d'une suite (u_n) vérifient une propriété $\mathscr{P}$, on procède de la façon suivante :
- on montre que le ou les premiers termes vérifient $\mathscr{P}$;
- on montre que si la propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée jusqu'à u_p, alors u_{p+1} vérifie aussi $\mathscr{P}$ (on dit qu'elle est *héréditaire*) ;
- on peut alors conclure, par récurrence, que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6.3 Exercices

6.3.1 Récurrence

EXERCICE 6.1 (Suites géométriques).
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a conjecturé en Première que, pour une suite géométrique, comme $u_1 = u_0 \times q$, comme $u_2 = u_0 \times q^2$, on avait très certainement la relation $\mathscr{P} : u_n = u_0 \times q^n$.
On va le démontrer.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ est vraie pour pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Supposons que $\mathscr{P}$ est vraie jusqu'au rang p. Montrer qu'alors elle est vraie au rang $p+1$.
3. Conclure.

EXERCICE 6.2.
On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que u_1, u_2 et u_3 appartiennent à $[0; 1]$.
2. Montrer que si $0 \leqslant u_p \leqslant 1$ alors $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.
3. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

EXERCICE 6.3.
On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ avec $u_0 = 2$.

1. (a) Montrer que la fonction f, définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, est croissante sur $[0; +\infty[$.
   (b) Déterminer un encadrement de $f(x)$ dans le cas où $x \in [1; 2]$.
2. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3. Vérifier que $u_0 \in [1; 2]$.
   (b) Montrer que, si $u_p \in [1; 2]$, alors $u_{p+1} \in [1; \frac{4}{3}]$ et donc, *a fortiori*, $u_{p+1} \in [1; 2]$.
   (c) Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 6.4.
On donne la suite : $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{1+v_n}\right) \end{cases}$

1. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 6.1.
   (b) Conjecturer sa monotonie et ses bornes.
2. Montrer par récurrence que (v_n) est minorée par 0.
3. (a) Montrer que $v_1 < v_0$.
   (b) On suppose que $v_{p+1} < v_p$. Montrer qu'alors $v_{p+2} < v_{p+1}$ (on pourra étudier le signe de $v_{p+2} - v_{p+1}$).
   (c) Que peut-on en conclure ?
   (d) En déduire que (v_n) est majorée par 2.

6.3.2 Exercices supplémentaires

EXERCICE 6.5.
On donne la suite : $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$

1. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 6.2.
   (b) Conjecturer sa convergence
2. On pose $v_n = \frac{w_n-1}{w_n+3}$
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de (w_n).

EXERCICE 6.6.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+7u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?
2. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 6.3.
   (b) Conjecturer sa convergence.
3. Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 0$.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2-u_n}{u_n}$.
   (a) Calculer les quatre premiers termes de (v_n).
   (b) Montrer que (v_n) est arithmétique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
   (d) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

FIGURE 6.1 – Figure de l'exercice 6.4

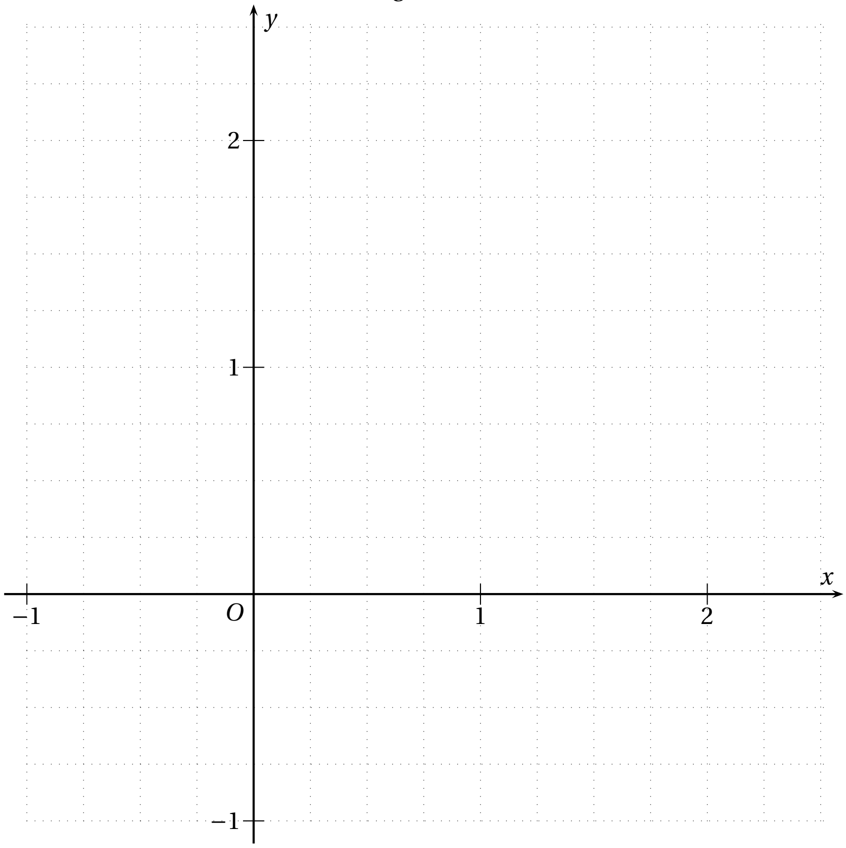

FIGURE 6.2 – Figure de l'exercice 6.5

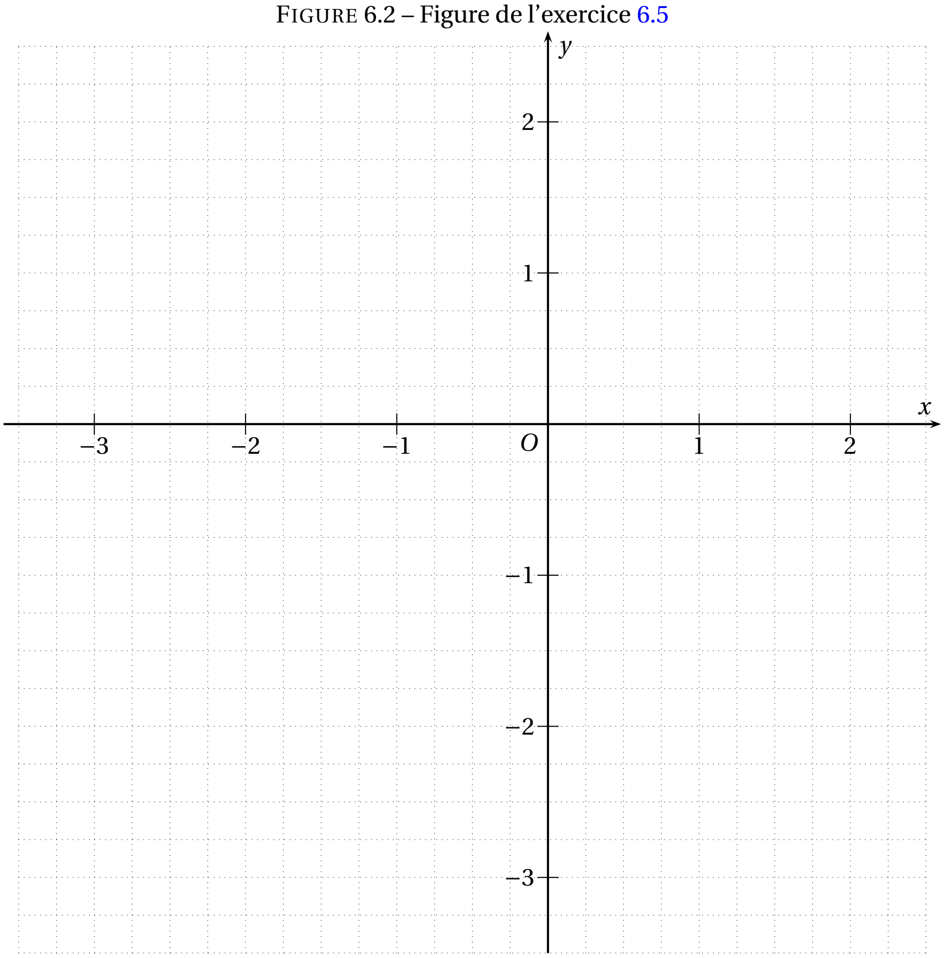

FIGURE 6.3 – Figure de l'exercice 6.6