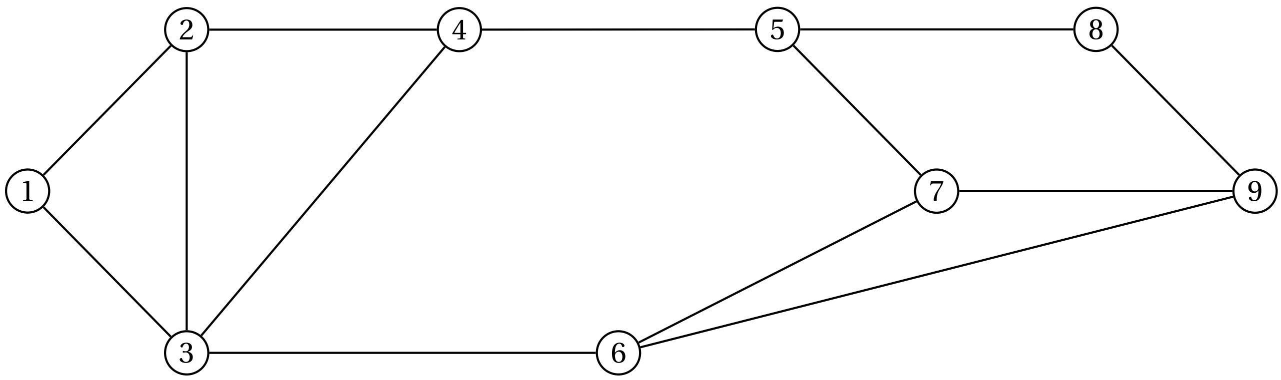
Chapitre 5

Comptage de chaînes

Sommaire

5.1 Un problème

Sébastien se rend régulièrement en train de la ville U (sommet 1) à la ville V (sommet 9), dans un réseau donné par le graphe ci-dessous. Il fait toujours le trajet en 5 étapes, et veut faire à chaque fois un chemin différent. Combien de trajets pourra-t-il faire ?



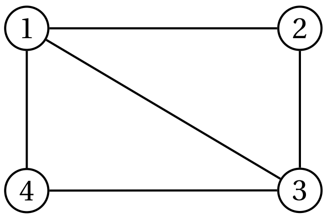
5.2 Une solution

Comme on l'a vu précédemment, si l'on essaie une énumération complète de tous les chemins de longueur 5 de U à V, on se rend vite compte qu'il est difficile de ne pas en oublier. Il faut trouver un moyen systématique de faire l'énumération. La solution passe par les matrices.

5.2.1 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition 5.1. Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n. On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A = (a_{i;j})$, où $a_{i;j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j.

Exemple 5.1. Le graphe G ci-dessous a la matrice d'adjacence A ci-contre.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. L'allure de la matrice d'adjacence donne des indications sur la nature du graphe :

- La matrice d'adjacence d'un graphe sans boucle n'a que des 0 sur la diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe sans arête parallèle n'a que des 1 ou des 0.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe complet n'a que des 1, hormis sur sa diagonale où il y a des 0.

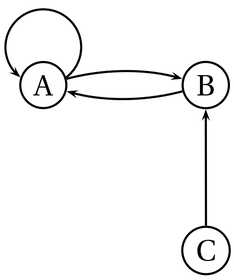
Cas d'un graphe orienté

On a vu que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. Il n'en va pas de même pour celle d'un graphe orienté car si une arête a pour extrémité initiale le sommet A et pour extrémité finale le sommet B, il n'en existe pas forcément une allant de B vers A, aussi dans ce cas le coefficient correspondant aux arêtes allant de A vers B ne sera pas le même que le coefficient correspondant aux arêtes allant de B vers A.
On donc doit convenir d'un sens de lecture pour la matrice d'un graphe orienté. La matrice

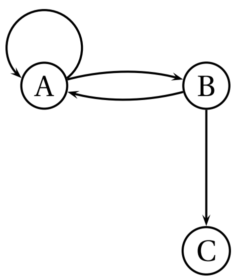
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

peut correspondre à l'un ou l'autre des graphes ci-dessous selon qu'on choisit de lire les extrémités initiales en ligne ou en colonne :

En ligne



En colonne



On convient alors de la chose suivante :

Définition 5.2. Par convention, dans la matrice d'adjacence d'un graphe G orienté, le terme a_{ij} (i-ième ligne, j-ième colonne) désigne le nombre d'arêtes d'origine le sommet i et d'extrémité finale le sommet j.

5.2.2 Puissances de la matrice d'adjacence d'un graphe

ACTIVITÉ 5.1.
Considérons le graphe G de l'exemple 5.1.

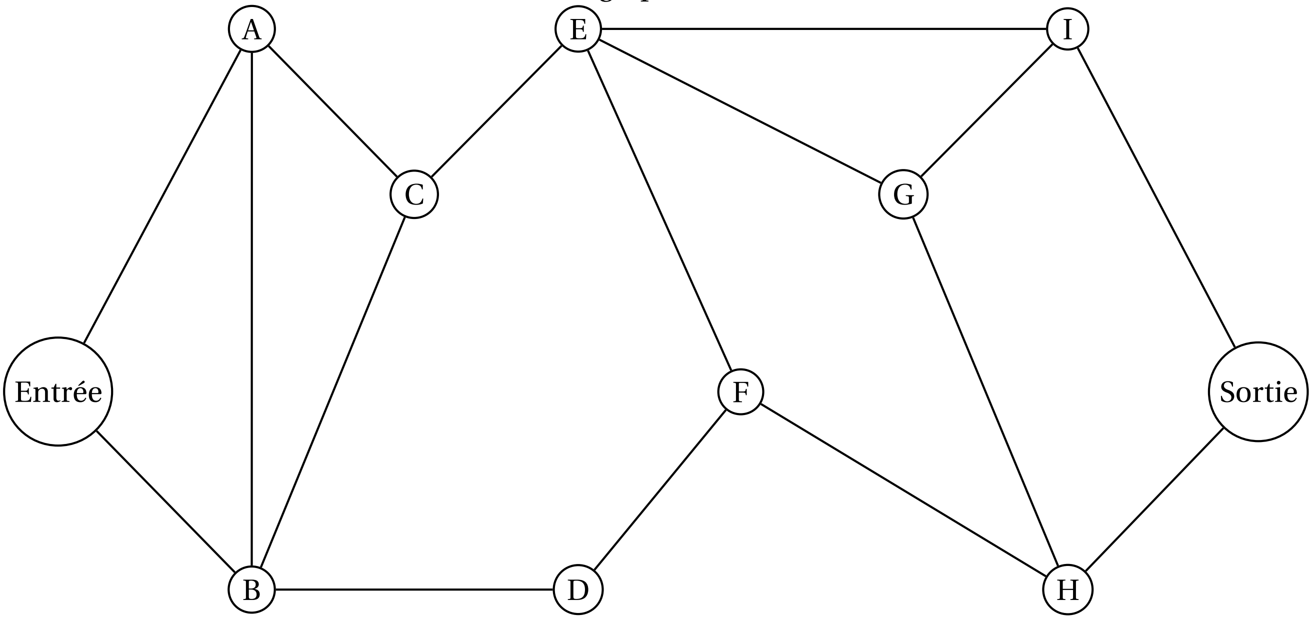
1. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 entre deux sommets quelconques et présenter les résultats sous forme de matrice.
2. À la calculatrice, obtenir A^2. Que constate-t-on ?
3. Le résultat précédent étant vrai dans le cas général, résoudre, à l'aide des matrices, le problème d'introduction.

Théorème 5.1 (admis)**.** *Soit G un graphe de matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i; j de la matrice A^n.*

5.3 Exercices

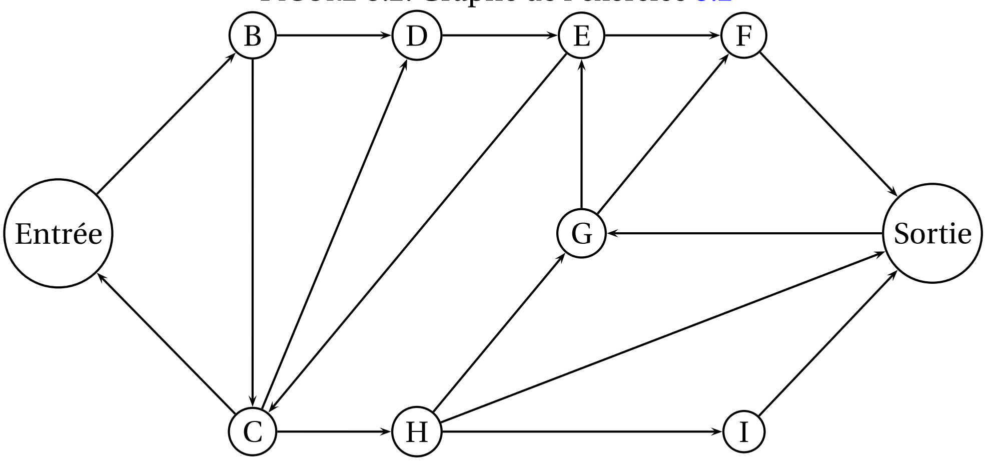
EXERCICE 5.1.
Quel est le nombre de chaînes de longueur 6 entre l'entrée et la sortie du graphe donné par la figure 5.1 de la présente page ?

FIGURE 5.1: Le graphe de l'exercice 5.1



EXERCICE 5.2.
La figure 5.2 de la présente page donne un graphe représentant un plan de circulation du centre-ville de Neverland.

FIGURE 5.2: Graphe de l'exercice 5.2



1. Quel est le nombre de manières d'aller en voiture de l'entrée à la sortie en 10 étapes ?
2. Et à pied ?

EXERCICE 5.3.
Représenter le graphe G dont la matrice d'adjacence est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.4.
On donne A la matrice d'adjacence d'un graphe G ainsi que quelques-unes de ses puissances ci-dessous. Sans tracer le graphe répondre aux questions.

1. Quel est l'ordre de G ?
2. G est-il un graphe orienté ?
3. (a) Quel est le degré du sommet 3 ?
   (b) Le graphe est-il eulérien ?
4. Combien de chaînes de longueur 4 relient les sommets 2 et 5 ?
5. Pourquoi y a-t-il forcément une erreur dans la matrice A^5 ?
6. (a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 7 ?
   (b) Quel est le diamètre de G ?

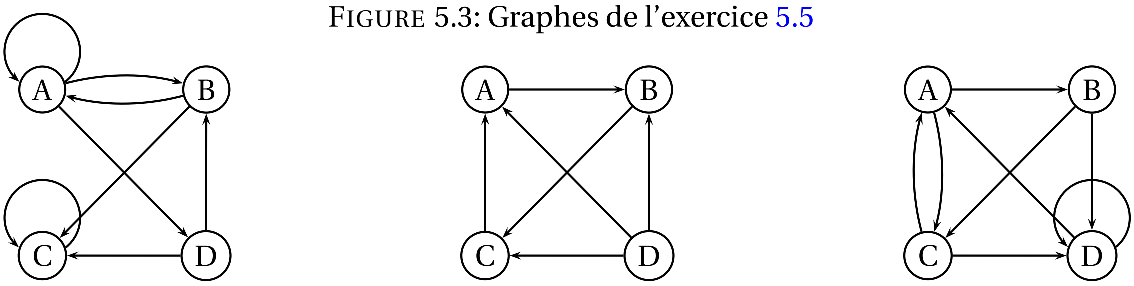
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\qquad
A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 9 & 18 & 5 & 5 & 2 \\ 13 & 28 & 21 & 15 & 25 & 12 & 13 & 3 \\ 11 & 21 & 21 & 16 & 18 & 11 & 12 & 2 \\ 9 & 15 & 16 & 13 & 15 & 9 & 10 & 2 \\ 18 & 25 & 18 & 15 & 38 & 13 & 13 & 7 \\ 5 & 12 & 11 & 9 & 13 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 9 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 6 & 9 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 9 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 7 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}
\qquad
A^5 = \begin{pmatrix} 24 & 49 & 42 & 31 & 43 & 23 & 25 & 5 \\ 49 & 74 & 66 & 53 & 89 & 38 & 40 & 13 \\ 42 & 66 & 50 & 39 & 81 & 30 & 31 & 12 \\ 31 & 53 & 39 & 30 & 63 & 25 & 26 & 10 \\ 43 & 89 & 81 & 63 & 84 & 51 & 58 & 13 \\ 23 & 38 & 30 & 25 & 51 & 22 & 27 & 9 \\ 25 & 40 & 31 & 26 & 58 & 27 & 24 & 14 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 8 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 5.5.
Pour chacun des graphes de la figure 5.3 de la présente page donner sa matrice d'adjacence.

FIGURE 5.3: Graphes de l'exercice 5.5



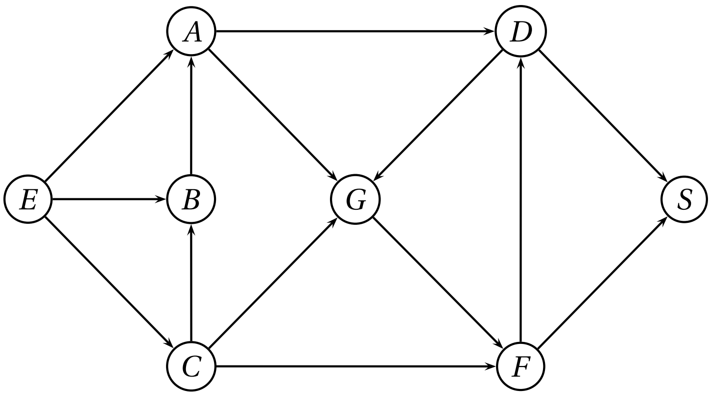
EXERCICE 5.6.
Pour chacune des matrices suivantes, dessiner le graphe associé.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

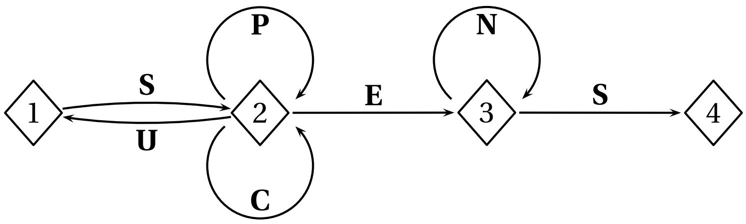
EXERCICE 5.7.
Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne, sur la figure ci-dessous, le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).
Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6
La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5
Combien de traversées peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?
Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.



EXERCICE 5.8.
Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et SPPCES sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et SPEN.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le (ou les) code(s) reconnu(s) par le graphe.

   SUCCES SCENES SUSPENS

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice on a calculé : $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes ?