Chapitre 4

Sections

Sommaire

Ce chapitre n'est constitué que de rappels.

4.1 Positions relatives de droites et de plans

4.1.1 Règles d'incidence

Règle 4.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée (AB).*

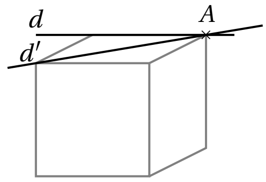
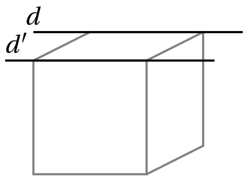
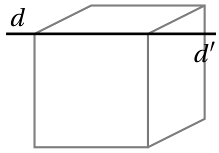
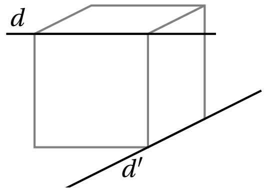
Règle 4.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté (ABC).*

Règle 4.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathscr{P}$.*

Règle 4.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (*PYTHAGORE*,* THALÈS*, etc.).*

4.1.2 Positions relatives de deux droites

Règle 4.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

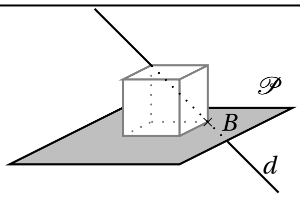
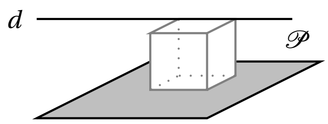
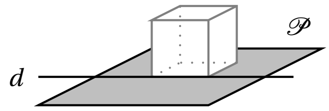
Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersection A. $d \cap d' = \{A\}$	d et d' sont strictement parallèles. $d \cap d' = \varnothing$	d et d' sont confondues $d \cap d' = d = d'$	Aucun plan ne contient à la fois d et d'. $d \cap d' = \varnothing$

Remarque. Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles. Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.

Remarques. • On peut définir un plan de plusieurs manières :
- par la donnée de trois points ;
- par la donné de deux droites sécantes ;
- par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
- par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

4.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

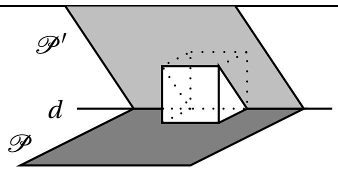
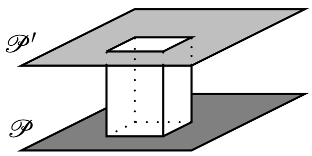
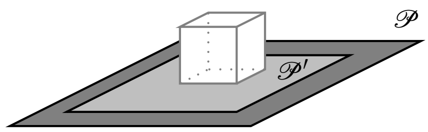
Règle 4.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B. $d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	d est contenue dans $\mathscr{P}$ $d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

4.1.4 Positions relatives de deux plans

Règle 4.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques.
- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.
- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenu dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

4.2 Parallélisme dans l'espace

4.2.1 Parallélisme entre droites

Propriété 4.1. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

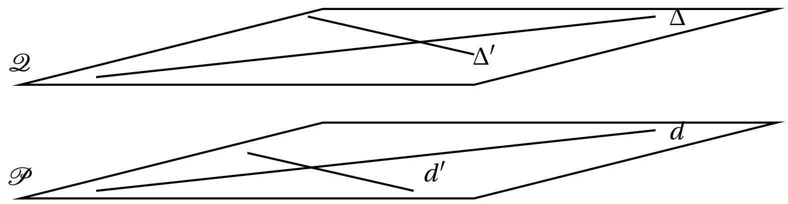
Propriété 4.2. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

4.2.2 Parallélisme entre plans

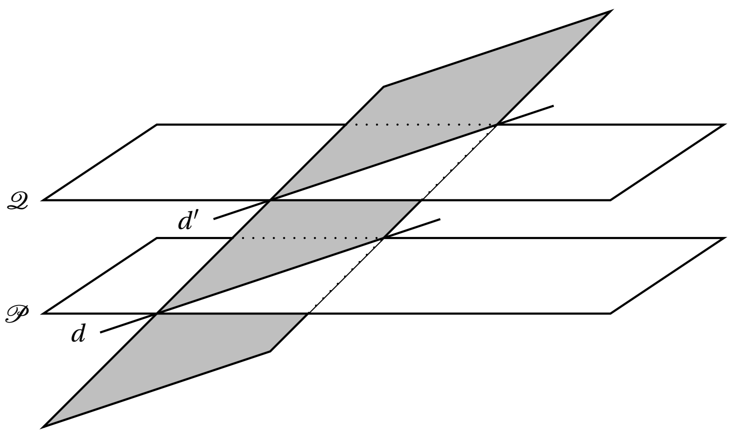
Propriété 4.3. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 4.4. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



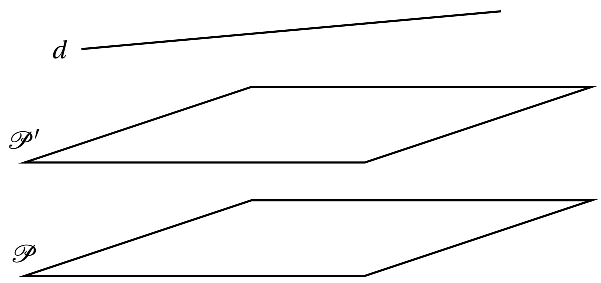
Propriété 4.5. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersection d et d' sont parallèles.*



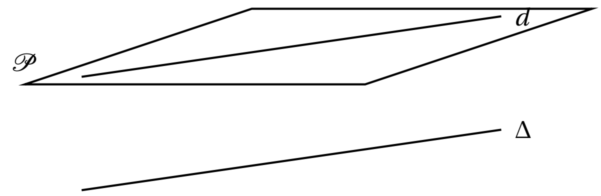
4.2.3 Parallélisme entre droite et plan

Propriété 4.6. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

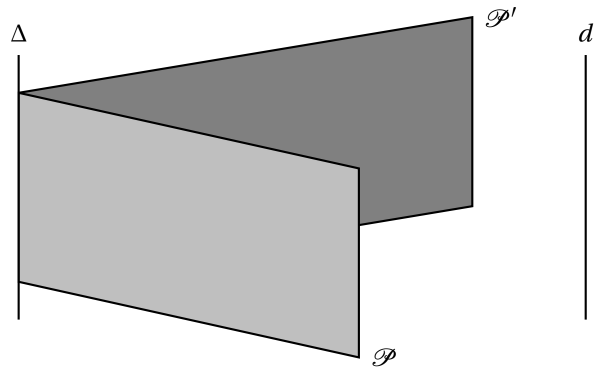
$$\text{Si } d \parallel \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ alors } d \parallel \mathscr{P}'$$



Propriété 4.7. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dan un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*



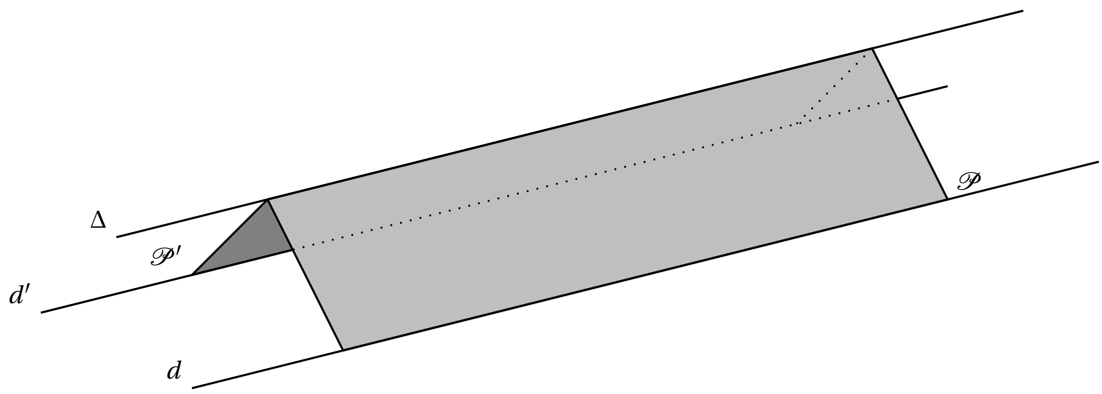
Propriété 4.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 4.9 (Théorème du toit)**.** *Si :*

- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

alors Δ est parallèle à d et à d'.

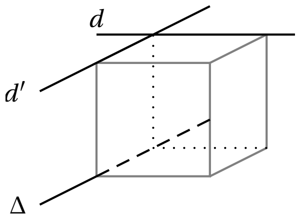


4.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

4.3.1 Droites

Définition 4.1. Deux droites sont dites *perpendiculaires* si elles ont un point en commun et qu'elles forment en ce point un angle droit.
Deux droites sont dites *orthogonales* s'il existe une droite de l'espace parallèle à l'une d'entre elles et perpendiculaire à l'autre.

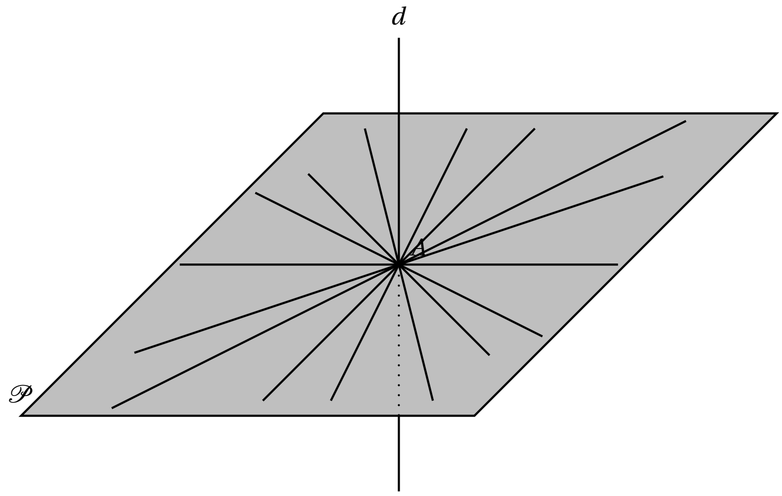
Exemple 4.1. Sur le dessin ci-dessous, d et d' sont perpendiculaires et d et Δ sont orthogonales.



Remarque. Des droites perpendiculaires sont aussi des droites orthogonales.

4.3.2 Droite et plan perpendiculaires

Définition 4.2. Dire qu'une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$ signifie que la droite d est perpendiculaire en un point A du plan $\mathscr{P}$ à toute droite de ce plan passant par A.



Propriété 4.10. *Si une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}$, elle est alors orthogonale à toutes les droites contenues dans ce plan.*

Propriété 4.11. *Si une droite d est orthogonale à* ***deux droites sécantes*** *d'un plan $\mathscr{P}$, alors d et $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires.*

Remarque. C'est essentiellement cette propriété qu'on utilise pour démontrer qu'une droite est perpendicualire à un plan.

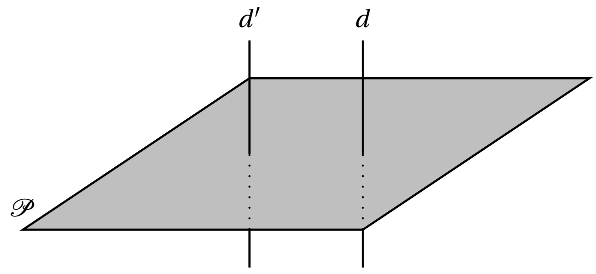
4.3.3 Autres propriétés

Propriété 4.12. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \perp \mathscr{P} \text{ et } d' \perp \mathscr{P} \text{ alors } d \parallel d'$$

Propriété 4.13. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d \perp \mathscr{P} \text{ alors } d' \perp \mathscr{P}$$

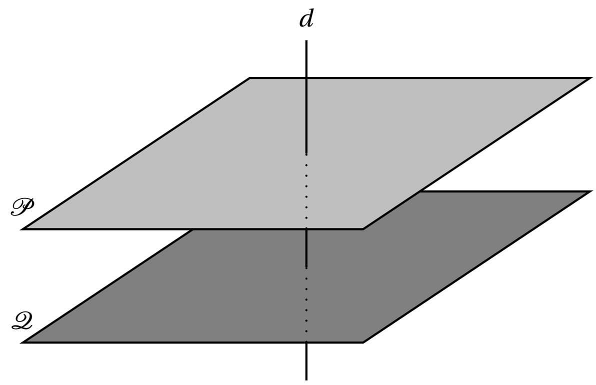


Propriété 4.14. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \perp d \text{ et } \mathscr{Q} \perp d \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{Q}$$

Propriété 4.15. *Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{Q} \text{ et } d \perp \mathscr{P} \text{ alors } d \perp \mathscr{Q}$$

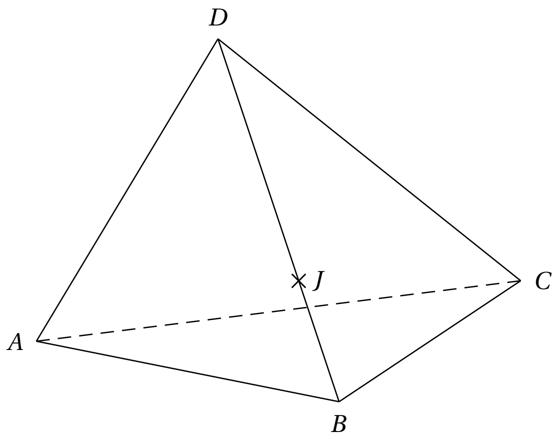


4.4 Exercices

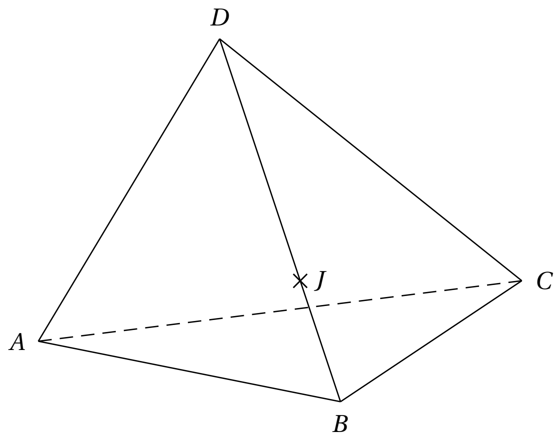
EXERCICE 4.1 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 4.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 4.1 – Sections de l'exercice 4.1

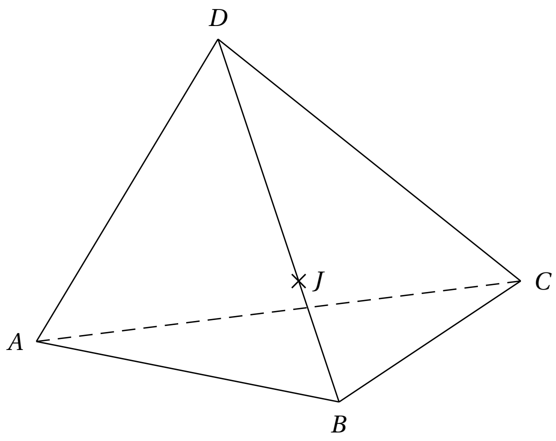
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



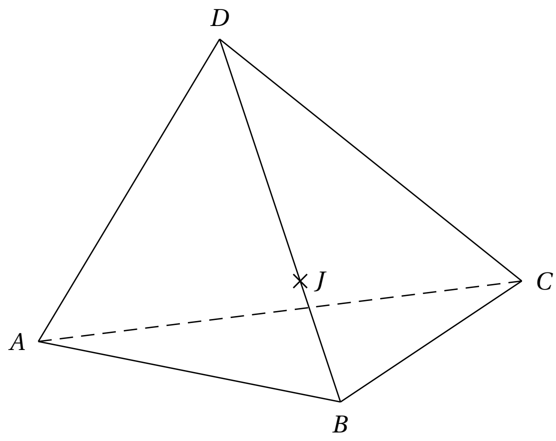
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



EXERCICE 4.2 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 4.2 de la présente page, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

FIGURE 4.2 – Sections de l'exercice 4.2