Chapitre 2

Graphes eulériens

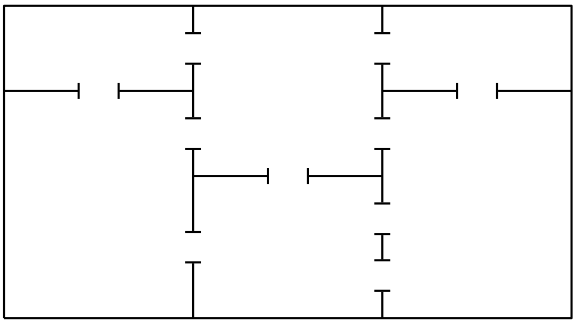
Sommaire

2.1 Quelques problèmes

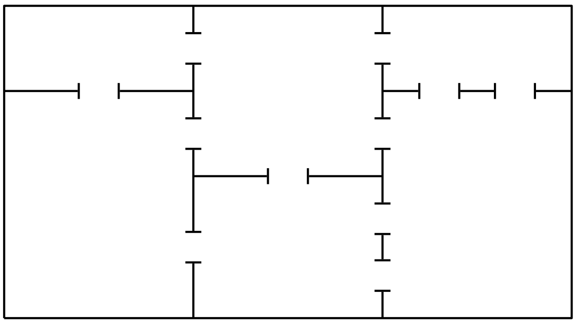
PROBLÈME 2.1 (Au musée).
On fournit sur la figure 2.1 de la présente page plusieurs plans de musée.

FIGURE 2.1: Plans de musée du problème 2.1

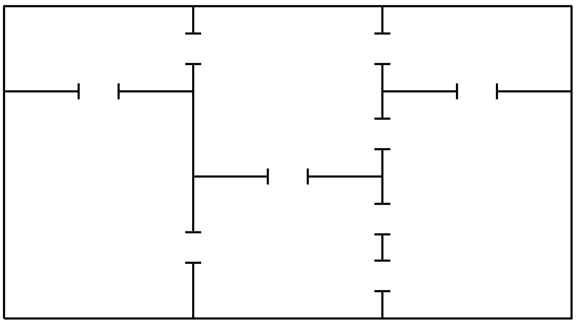
- Plan du musée de la ville d'Izis :



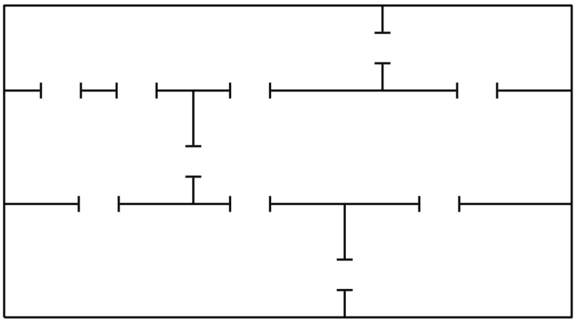
- Plan du musée de la ville d'Aza



- Plan du musée de la ville d'Oz



- Plan du musée de la ville d'Ezé

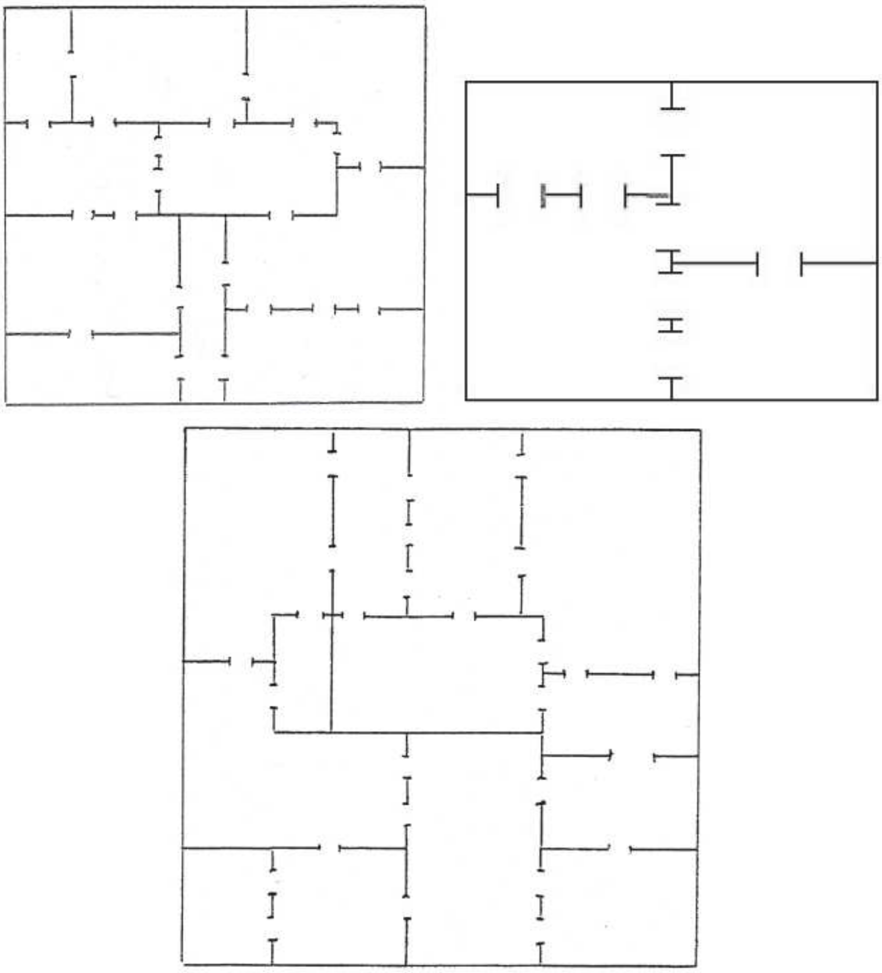


Un visiteur se promène dans ces différents musées et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

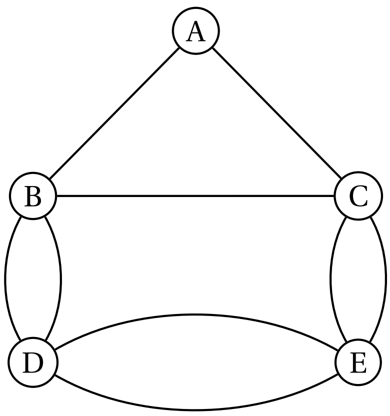
Mais peut-il trouver un « chemin » passant une seule fois par chacune des portes ?
Et peut-il trouver un « chemin » passant une seule fois par chacune des portes et qui revienne à son point de départ ? *On appelera pour l'instant « circuit » ce type de « chemin ».*

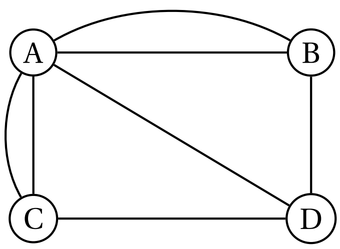
1. En vous aidant des plans de musée, quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre quant aux conditions qui permettraient l'existence d'un chemin ou d'un circuit ?
2. Vérifier ces conjectures sur les musées de la figure 2.2 de la présente page.

FIGURE 2.2: Musées de la question 2

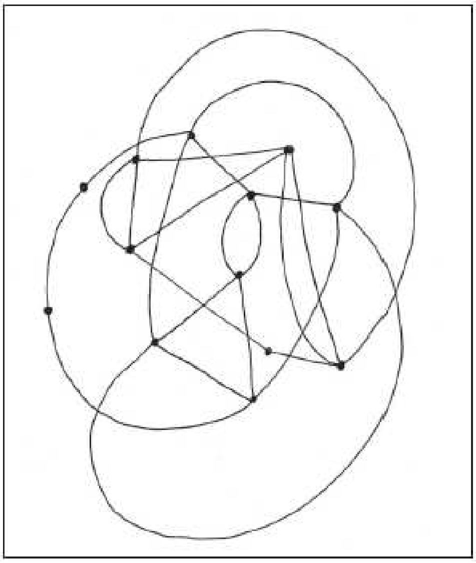


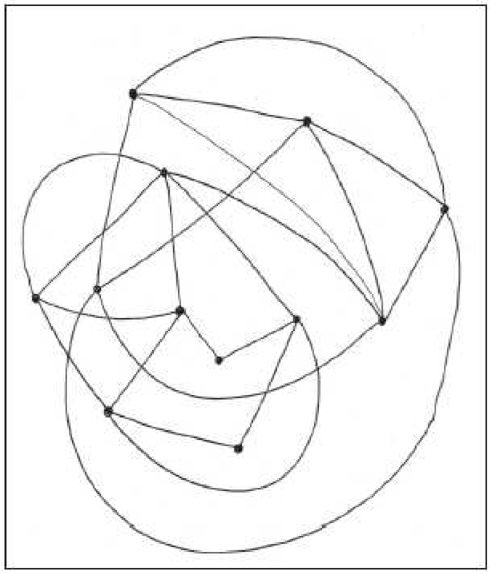
PROBLÈME 2.2 (Avec des graphes)**.** 1. Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes ? Expliquez pourquoi.



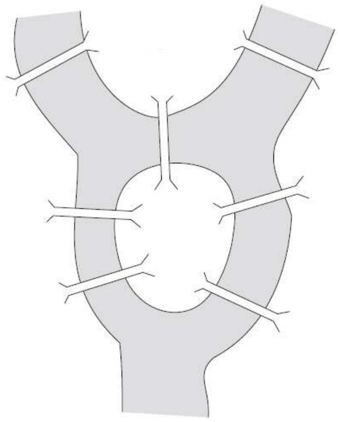


2. Vérifier si vos conjectures sont valides sur les graphes ci-dessous.

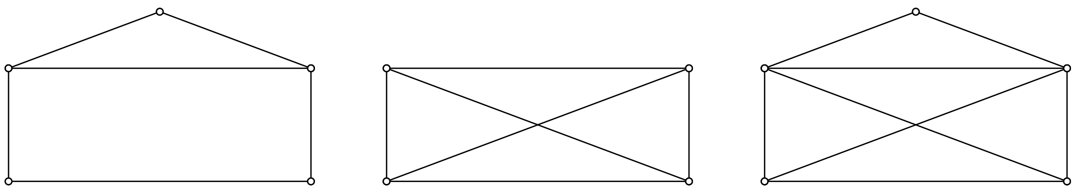




PROBLÈME 2.3 (Les sept ponts de Königsberg)**.**
Le problème qui suit est, selon la légende [1], à l'origine de l'invention des graphes par EULER, qui résidait à Königsberg. Au XVIIIe siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche.
La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma de la figure ci-contre.
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont.
Comment faire ?



PROBLÈME 2.4 (Les enveloppes)**.**
Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes de la figure ci-dessous ?



1. EULER a bien trouvé la solution générale de ce type de problèmes mais sans utiliser les graphes et, s'il a prouvé dans quels cas un tel trajet était impossible, il n'a pas prouvé pourquoi dans les autres cas c'est toujours possible.

2.2 Bilan et compléments

Cela nous amène à définir :

Définition 2.1 (Chaîne eulérienne)**.** Une chaîne est *eulérienne* si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle (sommet de départ et de fin confondus), on l'appelle *cycle eulérien*.

Le théorème suivant, dit théorème d'EULER, qu'on admettra, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 2.1 (d'EULER)**.** *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*

De façon plus précise :

- si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien ;
- le graphe ne peut avoir un seul sommet impair ;
- si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

La propriété suivante, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

Propriété 2.2. *Un graphe connexe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes.

2.3 Exercices

EXERCICE 2.1.
À l'aide du théorème ou de la propriété, déterminer ceux des problèmes présentés plus haut qui n'ont pas de solution et, si cela n'a pas été déjà fait, trouver les solutions des autres.

EXERCICE 2.2.
On construit un musée dont les pièces sont disposées comme indiqué sur la figure 2.3 page ci-contre (les entrées et sorties du musée ne sont pas crées).

1. Montrer qu'il est impossible d'organiser un parcours dans ce musée qui emprunterait une et une seule fois chaque passage entre deux salles.
2. Quel passage doit-on condamner, ou quel passage doit-on créer pour qu'un tel trajet soit possible ?
   Dans quelle(s) pièce(s) doit-on alors créer l'entrée et la sortie du musée ?

EXERCICE 2.3.
Cinq pays sont représentés (schématiquement) avec leurs frontières sur la figure 2.4 page suivante. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

EXERCICE 2.4.
La carte de la figure 2.5 page ci-contre est celle des régions françaises. Est-il possible de parcourir la France en passant une et une seule fois par toutes les frontières entre les régions ?

EXERCICE 2.5.
On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimun faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

FIGURE 2.3: Figure de l'exercice 2.2

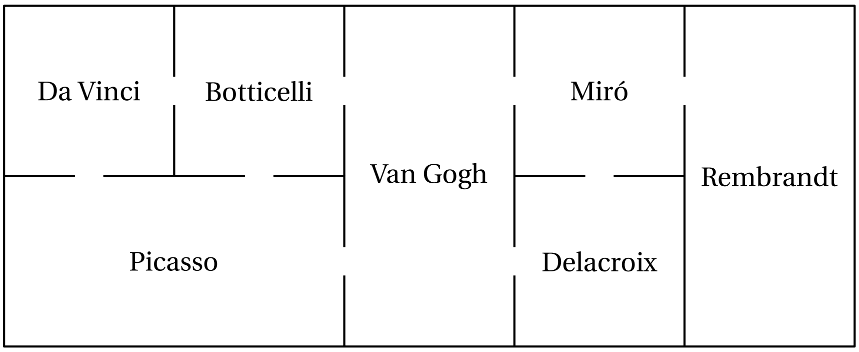


FIGURE 2.4: Problème des frontières

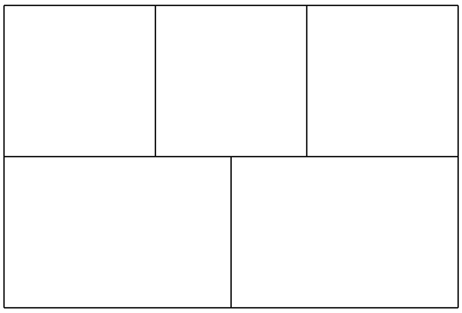


FIGURE 2.5: Les régions de France